22 Lez. 04/05 (registrato 04/05)

Dal lemma 1, applicato a $(u_h)_h$ si ottiene che $\|u_h\|_{\mathcal{C}^0} \le M' \ \forall h$ e $|u_h(x) - u_h(y)| \le c|x-y|^{1/2} \ \forall h$; quindi $(u_h)_h$ è equilimitata e equicontinua, e quindi per il teorema di Ascoli-Arzelà esiste sotto-successione (che indicheremo sempre con (u_h)) convergente uniform. ad una funzione $u \in \mathcal{C}^0([a,b])$: ossia

$$u_h \longrightarrow u \quad \text{in } \mathcal{C}^0([a,b]).$$

Quindi abbiamo, ricapitolando, a meno di pass ad una sottosucc. di (u_h),

$$\begin{cases} u_h' \longrightarrow v & \text{debole in } L^2 \\ u_h \longrightarrow u & \text{uniform. in } [a,b]. \end{cases}$$

Oss. che $\quad u_h(x) - u_h(y) = \int_y^x u_h'(t)\,dt \qquad \forall x,y \in [a,b]$

Notiamo che la converg. puntuale delle u_h e la converg. debole in $L^2(a,b)$ di u_h', permettono di passare al limite, a destra e a sinistra dell'ug. sopra, ottenendo

def. di conv. debole in L^2

$$\left(\int_a^b u_h(x)\varphi(x)\,dx \to \int_a^b v(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in L^2(a,b); \right. \text{ appl. la}$$

def. $\varphi(t) = \chi_{[x,y]}(t) \quad x,y \in [a,b]$

(2) $$u(x) - u(y) = \int_y^x v(t)\,dt$$

relazione fond. tra u (limite uniforme delle u_h) e v (limite debole in L^2 delle u_h').

Se sapessimo che $u \in \mathcal{C}^1([a,b])$, allora concluderemmo $v = u'$

Inoltre, dalla disug.

③ $$a^2 \geq b^2 + 2b(a-b)$$ (convessità della funz. $f(\xi)=\xi^2$) $\forall a,b \in \mathbb{R}$

otteniamo

$$\int_a^b u_h'^2(x)\,dx \geq \int_a^b u'^2(x)\,dx + 2\int_a^b \underbrace{u'(x)\big(u_h'(x)-u'(x)\big)}_{\downarrow\, 0 \text{ per } u_h' \xrightarrow{L^2} u'}\,dx$$

Quindi, passando al limite, si ottiene

$$\liminf_{h\to+\infty} \int_a^b u_h'^2(x)\,dx \geq \int_a^b u'^2(x)\,dx .$$

Inoltre, dalla converg. uniforme di u_h a u si ha

$$\lim_{h\to+\infty} \int_a^b g(x)\,u_h(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,u(x)\,dx ,$$

e quindi infine

$$F(u) \leq \liminf_{h\to+\infty} F(u_h) \left(= \lim_{h\to+\infty} F(u_h) = \inf_{v\in X} F(v) \right)$$

e quindi, in queste condizioni (se sapessimo .... $u \in \mathcal{C}^1$, ... $v = u'$...) potremmo concludere che u è pt. di minimo per F in X!

Poiché in realtà u non è nec. $\mathcal{C}^1$, assumiamo la relazione ② che non è altro che la validità del TFC, come nozione generalizzata di derivabilità per la funzione u, con derivata v.

($v:[a,b]\to\mathbb{R}$, mis.; $\int_a^b |v|\,dx < +\infty$)

Def. 1 Diciamo che $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ è assolut. continua se $\exists\, v \in L^1(a,b)$ t.c.

$$u(x) - u(y) = \int_y^x v(t)\,dt \qquad \forall\, x,y \in [a,b].$$

L'insieme delle funz. ass. continue su $[a,b]$ indichiamo con $AC([a,b])$ (= insieme delle funzioni primitive di funzioni $L^1(a,b)$). Se $u \in AC([a,b])$ allora tale v indica la derivata "generalizzata" di u. → INDICHIAMO ANCORA CON u'

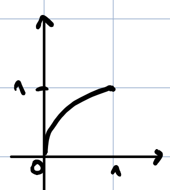
OSS. 1) Se $u \in \mathcal{C}^1([a,b])$, allora $u'(x) = v(x)$ q.o. in $[a,b]$.

(segue dal teor. di derivazione di Lebesgue:

$\forall v \in L^1(\Omega)$ esiste $\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} v(y)\,dy$ e vale $v(x)$ per q.o. $x \in \Omega$)

2) Se $u \in AC([a,b])$, allora $u \in \mathcal{C}([a,b])$, anzi u è uniform. continua in $[a,b]$.

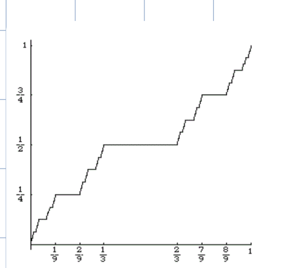
(segue dall'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue: Se $v \in L^1(a,b)$, allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall A \subset (a,b)$ misurabile con $|A| < \delta \Rightarrow \int_A |v|\,dx < \varepsilon$).



3) $f(x) = \sqrt{x}$ in $[0,1]$; è uniform. continua in $[0,1]$, essendo continua in $[0,1]$; oss. che $u \notin \mathcal{C}^1([0,1])$ poiché $f'_+(0) = +\infty$. Ma $f \in AC([0,1])$; infatti $\forall x,y \in [0,1]$

$f(x) - f(y) = \int_y^x \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$, e $\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1(0,1)$!! .

4) La funzione di Cantor su $[0,1]$ è continua, anzi u.c. in $[0,1]$, è deriv. q.o. con $u' = 0$ e non è $AC([0,1])$, poiché



$$\underset{1}{\underset{\shortparallel}{u(1)}} - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{u(0)}} = \int_0^1 \underset{0}{\underset{\shortparallel}{u'(t)}}\,dt \qquad 1 > 0 \ !$$

■

Def. 2 (def. classica, Vitali-Tonelli) Una funzione $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ è detta **assolut. continua** se $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$: per ogni famiglia finita di intervalli aperti $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n)$ a due a due disgiunti di $[a,b]$ si ha

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}|u(b_i)-u(a_i)|<\varepsilon.$$

OSS. 1) Se $u\in AC([a,b])$ nel senso della def. 2 $\Rightarrow$ u è unif. continua in $[a,b]$.

2) $u\in Lip([a,b])$ $(\exists K>0,\ |u(x)-u(y)|\leq K|x-y|\ \forall x,y\in[a,b])$ $\Rightarrow$ $u\in AC([a,b])$ nel senso della def. 2.

3) $u\in C^1([a,b])$ $\Rightarrow$ $u\in Lip([a,b])$ e quindi in $AC([a,b])$ secondo la def. 2.

Def. 2 $\Rightarrow$ Def. 1

4) **Teor.** Se u soddisfa la def. 2, allora $\exists\, u'$ (in senso classico) q.o. in $[a,b]$, $u'\in L^1(a,b)$ e vale $u(y)-u(x)=\int_x^y u'(t)\,dt$ $\forall x,y\in[a,b]$.

Def. 1 $\Rightarrow$ Def. 2

5) **Teor.** Se u soddisfa la def. 1, e $v\in L^1(a,b)$ è t.c. $u(x)=u(a)+\int_a^x v(t)\,dt$, allora u soddisfa la def. 2.

(Segue dall'ass. continuità dell'integrale di Lebesgue). ∎

Ritorniamo al ns. pbm. variazionale $F(u) = \int_a^b [u'^2 + g(x)u]dx$

Siamo interessati per il ns. pbm. di minimo $g \in L^2(a,b)$ per F a funzioni "derivabili in qualche senso" e con "derivata in L^2".

È naturale introdurre i seg. spazi funzionali

$$H^1(a,b) \doteq \{u \in AC([a,b]) : u' \in L^2(a,b)\}$$

(introdotto med. "$\wp$")

$$H^1_0(a,b) \doteq \{u \in H^1(a,b) : u(a) = u(b) = 0\}$$

NOTA: $u(x) = \sqrt{x} \in AC([0,1])$
$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \in L^1(0,1)$
$u'(x) \notin L^2(0,1)$
$\Rightarrow u(x) = \sqrt{x} \notin H^1$

Lo spazio $H^1_0(a,b)$ appare come naturale estensione dell'insieme delle funz. ammiss. X in cui abbiamo inizialm. considerato il func. F.

$\hat{X} \supset X$ $\quad \hat{X} \doteq H^1_0(a,b)$ $\quad \hat{F}$ il funzionale F considerato "esteso" a $\hat{X}$

$$\hat{F}(u) = \int_a^b [u'^2 + g(x)u(x)]dx$$

È naturale considerare la seg. nozione di convergenza in $\hat{X}$: una succ. $(u_n)_n \subset H^1_0(a,b)$ converge ad u se

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u & \text{uniform. in } [a,b] \\ u_n' \longrightarrow u' & \text{debole in } L^2(a,b), \end{cases}$$

dove u_n', u' sono le derivate di u_n, u rispett. nel senso della deriv. della def. 1 (soddisf. ②).

Se consid. $\hat{F}$ su $\hat{X} = H^1_0(a,b)$ potendo svolgere <u>esattamente</u> gli stessi ragionamenti precedenti (quando tutto era ambientato con X! oss. che vale ancora il lemma 1 e tutto il resto procede analog.) si ha il seg. risultato.

Teorema: sia $F(u) = \int_a^b [u'^2 + g(x)u]\,dx$ def. su $H^1_0(a,b)$, con $g \in L^2(a,b)$.
Allora il pbm. di minimo $\inf_{u \in H^1_0(a,b)} F(u)$ ha soluzione (essa è unica per la ~~strett.~~ conv. di F).

Oss. Ripercorrendo il tutto:

i) abbiamo indiv. $\hat{X} \supset X$, e introdotto una nozione di converg. opportuna su $\hat{X}$ che denot. $u_n \xrightarrow{H^1_0} u$.

ii) si ha $\inf_{u \in H^1_0} \hat{F}(u) < +\infty$. Si consid. una succ. minimizz. $(u_n) \subset \hat{X}$ t.c. $\hat{F}(u_n) \to \inf_{u \in H^1_0} \hat{F}(u)$

iii) $\exists (u_{n_k}) \subset (u_n)_n$, $\exists u \in H^1_0$ t.c. $u_{n_k} \xrightarrow{H^1_0} u$.

iv) $\hat{F}$ è seq. s.c.i. rispetto alla converg. in H^1_0, cioè $\forall u_n \xrightarrow{H^1_0} u \Rightarrow \hat{F}(u) \le \liminf_{n \to +\infty} \hat{F}(u_n)$.

$\rightsquigarrow$ v) risultato di regolarità! Se la funz. lagrangiana è più regolare, anche il pt. di min. è più regolare. Si prova che se $g \in C^0([a,b])$, allora $u \in C^1([a,b])$. ■

I ragionamenti che hanno portato al teorema sopra possono essere estesi a classi di funzionali più generale. Una prima estensione è il seg.

Teorema: Sia $F(u) = \int_a^b [f(u') + g(x)u]\,dx$ definito su $H^1_0(a,b)$ con $g \in L^2(a,b)$. Supp. che

i) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e convessa;

ii) (coercitività) $\exists\, c, C > 0$ t.c.

$$c\,\xi^2 \le f(\xi) \le C(1+\xi^2) \longrightarrow |f_\xi(\xi)| \le C'(1+|\xi|)$$

Allora il pbm. di minimo $\inf_{u \in H^1_0} F(u)$ ha soluzione.

Dim. La coercitività assicura l'equilimit. in L^2 delle derivate della succ. minimizz. u_n; quindi, a meno a pass. a sottosucc. si ottiene la converg. debole in L^2 delle derivate e la equilimit. e equicont. delle funz. stesse, e quindi la converg. unif. delle funz. (a meno di passare ad sottosucc.):

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u & \text{unif. su } [a,b]. \\ u_n' \rightharpoonup u' & \text{in } L^2 \end{cases}$$

Su $[a,b]$ risulta per convessità di f !! $(\mathcal{C}^1)$

$$f(u_n') \ge f(u') + f_\xi(u')(u_n' - u')$$

Dalla crescita di f si ha $|f_\xi(u')| \le c'(1+|u'|)$ e quindi $f_\xi(u') \in L^2(a,b)$. Allora, poiché $u_n' \rightharpoonup u'$ in L^2 segue

$$\int_a^b f_\xi(u')(u_n' - u')\,dx \xrightarrow[n]{} 0$$

$$\Rightarrow \quad \liminf_{h\to+\infty} \int_a^b f(u_h')\,dx \geq \int_a^b f(u')\,dx .$$

Poiché $\int_a^b g(x)\, u_h(x)\,dx \longrightarrow \int_a^b g(x)\,u(x)\,dx$ si ha infine

$$F(u) \leq \liminf_{h\to+\infty} F(u_h) \quad \Big(= \lim_{h\to+\infty} F(u_h) = \inf_{u\in H_0^1} F(u) \Big),$$

■

Giusto per concludere: Esistenza / eq. di Eulero-Lagrange regolarità "generale"

Teorema Sia $F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\,dx \qquad X = \{u \in H^1(a,b) : u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Sia

i) $f \in C^1([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$

ii) $\xi \longmapsto f(x,u,\xi)$ convessa $\forall (x,u) \in [a,b]\times\mathbb{R}$

iii) (coercività) $\exists\ 2 > q \geq 1,\ \alpha_1 > 0,\ \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$f(x,u,\xi) \geq \alpha_1 \xi^2 + \alpha_2 |u|^q + \alpha_3 \quad \forall (x,u,\xi) \in [a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Allora il pbm.

$$(P) \qquad \inf_{u\in X} F(u)$$

ammette una soluzione $u_0 \in X$.

Inoltre, se f verifica

iv) $\forall R > 0,\ \exists\, \alpha_4 = \alpha_4(R)$:

$$|f_u(x,u,\xi)|,\ |f_\xi(x,u,\xi)| \leq \alpha_4(1+|\xi|) \quad \forall (x,u,\xi) \in [a,b]\times[-R,R]\times\mathbb{R}$$

EE | allora ogni funz. minimizzante $\bar{u} \in X$ soddisf. l'eq. di Eulero-Lagrange in forma debole:

$$\text{(EE)} \qquad \int_a^b \left[f_u(x,\bar{u},\bar{u}')v + f_\xi(x,\bar{u},\bar{u}')v' \right] dx = 0 \qquad \forall v \in C_0^\infty([a,b])$$

Reg | Se $f \in C^\infty([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ soddisf. iii) iv) e
$f_{\xi\xi}(x,u,\xi) > 0 \quad \forall (x,u,\xi) \in [a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$,
allora ogni pt. di minimo di (P) è $C^\infty([a,b])$.

(si dim. che se $f \in C^k$, $k \geq 2$, $\Rightarrow$ pt. di min. $\in C^k$).

Caso particolare: $f(x,u,\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + g(x,u)$, con $g \in C^\infty([a,b]\times\mathbb{R})$
soddisf. $\exists\ 2 > q \geq 1$, $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$g(x,u) \geq \alpha_2 |u|^q + \alpha_3 \qquad \forall (x,u) \in [a,b]\times\mathbb{R}.$$

Allora $\exists\ u_0 \in C^\infty([a,b])$ pt. di min. per (P). Se inoltre $g(x,\cdot)$ è convessa $\forall x \in [a,b]$, il pt. di minimo unico!

Esempi/controesempi/generalizzazioni trovate nella bibliografia indicata alla fine del programma!

Contattatemi via e-mail per ogni vostro dubbio!

Spero di vedervi presto a Povo 1!