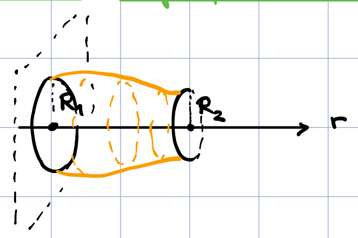
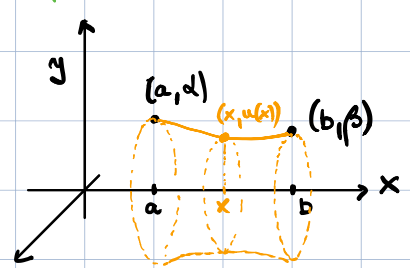
„ rotazione

(Eulero 1744)

Es. 3 : Superficie di rivoluzione di area minima



Consid. 2 circonferenze di raggio R_1 e R_2 su due distinti piani ortogonali alla retta r passante per i due centri ; il pbm. Consiste nel trovare tra tutte le superfici di rotazione di asse r aventi per contorno queste due circonferenze, quella di area minima.



$R_1 = \alpha$, $R_2 = \beta$

Il pbm. può essere quindi descritto come segue : trovare tra tutte le superfici di rotazione della forma

$$v(x,\theta) = (x,\ u(x)\cos\theta,\ u(x)\sin\theta) \qquad x\in[a,b],\ \theta\in[0,2\pi[$$

con $u(a)=\alpha$, $u(b)=\beta$ fissati , quella di area minima.

La formula dell'area della superficie di rotazione generata dalla curva $y = u(x)$ (>0 su $[a,b]$) è data

$$S(u) = 2\pi \int_a^b u(x)\sqrt{1+u'^2(x)}\,dx \qquad \int_0^{2\pi}\int_a^b \|v_x \wedge v_\theta\|\,dx\,d\theta$$

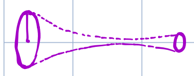
Quindi il ns. pbm. di area minima si riduce a trovare una soluzione del pbm. di minimo

(P3) $$\inf\left\{ S(u) = 2\pi\int_a^b u\sqrt{1+u'^2}\,dx \ :\ u\in X\right\}$$

con X = spazio delle funzioni ammissibili

$$= \left\{ u\in C^1([a,b]) : u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta,\ u(x)>0 \right\}.$$

In questo caso $f(x,u,\xi) = f(u,\xi) = 2\pi u\sqrt{1+\xi^2}$.



OSS. Le soluzioni di questo, quando esistono, sono catenoidi.

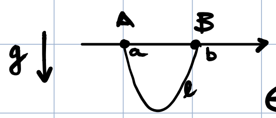
Se $b-a$ è molto più grande di α e β, va a mancare la soluzione!

Se ci sono, $u(x) = \frac{1}{c_1}\cosh(c_1 x + c_2)$, c_1, c_2 dipendono dalle condizioni al contorno.

Il grafico di questi $u(x)$ si chiamano catenaria.

motivazione nomenclatura:

($\rightsquigarrow$ forma della corda sospesa − filo sottile, pesante, inestensibile appeso a due estremi;



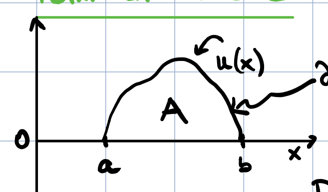
Energia potenziale $F(u) = c\int_a^b u(x)\sqrt{1+u'^2}\,dx$, c costante opportuna.

Si minimizza $F(u)$, $u\in X$: $u(a) = u(b) = 0$ con il vincolo $\int_a^b \sqrt{1+u'^2} = \ell$ $\rightsquigarrow$ soluzione del pbm. di minimo è un coseno iperbolico). $\square$

pbm. che discuteremo nel corso

Es. 4 Pbm. di Didone / disuguaglianza isoperimetrica

Pbm. di Didone:



Determinare $A \subseteq \mathbb{R}^2$ come in fig. tale da massimizzare area(A) $\left(= \int_a^b u(x)\,dx \text{ nel caso } \partial A \text{ descritto dal grafico di una funzione } u \in X\right)$, dato $|\partial A| = \ell$ fissato.

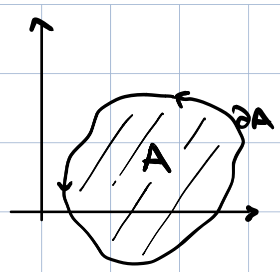
Posto $F(u) = -\int_a^b u(x)\,dx$, il problema di Didone si riduce a trovare una soluzione del pbm. di minimo

(P4)
$$\inf\{F(u) : u\in X\}$$

con
$$X = \Big\{u \in C^1([a,b]) : u(a)=u(b)=0,\ \underbrace{\int_a^b\sqrt{1+u'^2(x)}\,dx = \ell}_{\text{vincolo sulla } u}\Big\}.$$

"problema isoperimetrico"

Disug. isoperimetrica: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, limitato, la cui frontiera ∂A è una curva chiusa, semplice e sufficient. regolare



Se $L(\partial A)$ = lunghezza della frontiera e

area(A) = area di A,   (*) vedi fine lezione

la disug. isoperimetrica si scrive

$$4\pi \text{ area}(A) \le \left(L(\partial A)\right)^2$$

"nel caso A= cerchio B si ha 4π area$(B) = 4\pi \cdot \pi r^2 = (2\pi r)^2 = (\partial B)^2$!!"

e l'uguaglianza è vera $\Longleftrightarrow$ A è un cerchio (∂A è una circonf.)

Questo pbm. si riscrive (nel ns. linguaggio, o quasi...) parametrizz. la curva $\partial A = \{u : [a,b] \to \mathbb{R}^2 : u(x) = (u_1(x), u_2(x))\}$ in senso antiorario,

non più scalare !

e ponendo $L(\partial A) = L(u) = \int_a^b \sqrt{u_1'(x)^2 + u_2'(x)^2}\, dx$

$$\text{area}(A) = M(u) = \frac{1}{2}\int_a^b (u_1 u_2' - u_2 u_1')\,dx = \int_a^b u_1 u_2'\,dx = -\int_a^b u_2 u_1'\,dx.$$

notazione

Gauss-Green nel piano

Il ns. pbm. si riduce allora a

(P4)"
$$\inf\{L(u) : M(u) = 1,\ u(a) = u(b)\} = 2\sqrt{\pi}.$$

$\square$

<u>1ª parte</u>: Supposto che $\exists$ minimo, trovare condizioni nec. (Eq. di Eulero-Lagrange in particolare) e condiz. suff. (convessità; e altre....) affinché u_0 sia minimo. assoluto o "locale"

Vediamo con 2 esempi di funzionali integrali $F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))dx$ che supporre l'esistenza di un minimo in uno spazio di funz. ammissibili X "regolari" non è "lecito".

<u>$\nexists$enza del minimo</u>

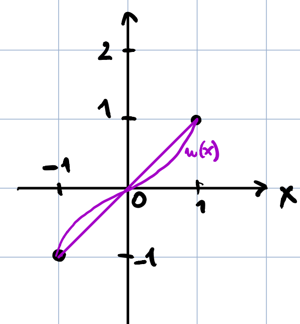
2) Esempio di Weierstraß : esempio di un funzionale $F(u) \geq 0$ per il quale $\nexists$ minimo in X !

$$F(u) = \int_{-1}^{1} x^2\, u'(x)^2\, dx \qquad f(x,u,\xi) = f(x,\xi) = x^2 \xi^2$$

$$X = \left\{ u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = -1,\ u(1) = 1 \right\}$$

Pbm : studiare

$$\inf_{u \in X} F(u) .$$

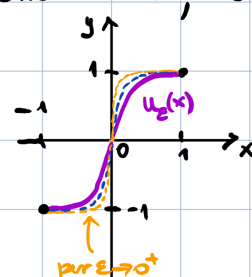


Abbiamo $f(x,\xi) \geq 0$

Ovviamente $F(u) \geq 0 \quad \forall u \in X$, e $\inf_{u \in X} F(u) \geq 0$.

Proviamo che $\inf_{u \in X} F(u) = 0$. Fissiamo $\varepsilon > 0$, consid.

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}}{\operatorname{arctg} 1/\varepsilon} \in X$$



(per $x > 0$ fissato, $u_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 1$

$x < 0$ " , $u_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} -1$)

Abb. $u_\varepsilon'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} 1/\varepsilon} \cdot \dfrac{1}{1 + \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{\varepsilon} = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} 1/\varepsilon} \cdot \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$

$$F(u_\varepsilon) = \int_{-1}^{1} x^2\, u_\varepsilon'^{\,2}\, dx = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{\varepsilon^2}{\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 (\varepsilon^2 + x^2)^2}\, dx$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(\varepsilon^2 + x^2)^2}\, dx = \frac{\varepsilon^2}{2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \int_{-1}^{1} \underbrace{x}_{g} \cdot \underbrace{\frac{2x}{(\varepsilon^2 + x^2)^2}}_{f'}\, dx$$

$$\underset{\text{per parti}}{\overset{}{\underset{\text{integr.}}{=}}} \frac{\varepsilon^2}{2(\mathrm{arctg}\frac{1}{\varepsilon})^2}\left[\underbrace{x}_{g}\Big(\underbrace{\frac{-1}{\varepsilon^2+x^2}}_{f}\Big)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\underbrace{1}_{g'}\cdot\Big(\underbrace{\frac{-1}{\varepsilon^2+x^2}}_{f}\Big)dx\right]$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{2(\mathrm{arctg}\frac{1}{\varepsilon})^2}\left[\frac{-2}{\varepsilon^2+1} + \int_{-1}^{1}\frac{1}{\varepsilon^2+x^2}\,dx\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{2(\mathrm{arctg}\frac{1}{\varepsilon})^2}\left[\frac{-2}{\varepsilon^2+1} + \cancel{\frac{1}{\varepsilon^2}}\,\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{1}\frac{\cancel{1}\ \frac{1}{\varepsilon}}{1+\underbrace{\frac{x^2}{\varepsilon^2}}_{(\frac{x}{\varepsilon})^2}}\,dx\right]$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{2(\mathrm{arctg}\frac{1}{\varepsilon})^2}\left[\frac{-2}{\varepsilon^2+1} + \frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{\varepsilon}\Big|_{-1}^{1}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{2(\mathrm{arctg}\frac{1}{\varepsilon})^2}\left[\frac{-2}{\varepsilon^2+1} + \frac{2}{\varepsilon}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\varepsilon}\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0$$

Quindi $\quad 0 \le \inf_{u\in X} F(u) \le \underset{\substack{\downarrow\,\varepsilon\to 0\\ 0}}{F(u_\varepsilon)} \quad \forall \varepsilon>0$

$\Rightarrow \quad \inf_{u\in X} F(u) = 0.$

D'altra parte, $\nexists\, u\in X : F(u)=0$. Infatti, se fosse $F(u)=0$ allora si avrebbe $u'(x)\equiv 0 \quad \forall x\in[-1,1]$.

se fosse $u'(x_0)>0$ (<0) $\underset{\text{perm. del segno}}{\Rightarrow}$ $u'(x)>0$ (<0) in un intorno di x_0 ma allora $F(u)>0$!!

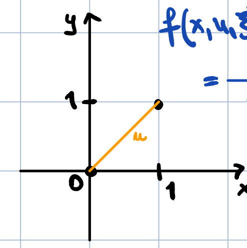
e quindi $u(x) = \text{cost.}$ su $[-1,1]$, ma questo non è possibile per le cond. al bordo! ■

<u>OSS.</u> Per trovare una funz. minimizz. per $F(u)$, si dovrebbe ammettere funzioni discontinue come insieme X (cioè "lasciare C^1"), come per es. $u_0(x) = \mathrm{sign} = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$

Ma ha senso allora il concetto di $u'(x)$ su $[-1,1]$? □

b) $\nexists$ min / max per un integrale variazionale (limit. inf / sup.)

$$F(u) = \int_0^1 \frac{1}{1+u'^2(x)}\,dx$$

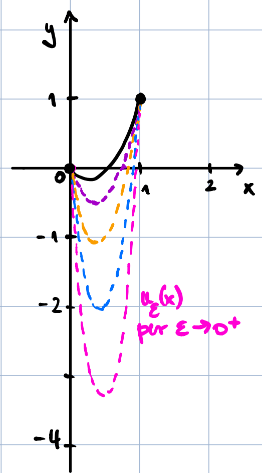


$f(x,u,\xi) = f(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi^2}$

$$X = \{u \in C^1([0,1]) : u(0)=0,\ u(1)=1\}$$

Ovviamente $0 < F(u) \leq 1 \quad \forall u \in X$.

Proviamo $\inf\limits_{u\in X} F(u) = 0$. Sia $0<\varepsilon<1$; sia $u_\varepsilon \in X$ definita da



$$u_\varepsilon(x) = \frac{x}{\varepsilon}(x-1+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\left(x^2-(1-\varepsilon)x\right) = \frac{1}{\varepsilon}\left(x-\frac{(1-\varepsilon)}{2}\right)^2 - \frac{(1-\varepsilon)^2}{4\varepsilon}$$

$$u_\varepsilon'(x) = \frac{2x}{\varepsilon} - \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Allora

$$F(u_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 \frac{2/\varepsilon}{1+\left(\frac{2x}{\varepsilon}-\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2}\,dx = \frac{\varepsilon}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\varepsilon}x - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right]_0^1 =$$

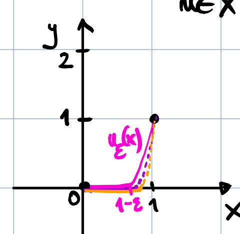
$$= \frac{\varepsilon}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0.$$

Poiché

$$0 \leq \inf_{u\in X} F(u) \leq \underset{\substack{\downarrow\,\varepsilon\to 0^+ \\ 0}}{F(u_\varepsilon)} \quad \forall \varepsilon \in\,]0,1[\;\Rightarrow\; \inf_{u\in X} F(u) = 0.$$

D'altra parte, $\nexists\, u \in X : F(u) = 0$. Infatti, dovrebbe essere $\dfrac{1}{1+u'^2(x)} \equiv 0$ su $[0,1]$. Assurdo! $\square$

Proviamo $\sup\limits_{u\in X} F(u) = 1$. Sia $0<\varepsilon<1$; sia $u_\varepsilon \in X$ definita da



$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{su } [0,1-\varepsilon] \\ \frac{1}{\varepsilon^2}(x-1+\varepsilon)^2 & \text{su } (1-\varepsilon,1] \end{cases} \qquad u_\varepsilon'(x) = \frac{2}{\varepsilon^2}(x-1+\varepsilon) \text{ su } (1-\varepsilon,1]$$

Allora

$$F(u_\varepsilon) = \int_0^1 \frac{1}{1+u_\varepsilon'^2(x)}\,dx = 1-\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{1-\varepsilon}^1 \frac{2/\varepsilon^2}{1+\left[\frac{2}{\varepsilon^2}(x-1+\varepsilon)\right]^2}\,dx$$

ossia $F(u_\varepsilon) = 1-\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\varepsilon^2}(x-1+\varepsilon)\right)\right]_{1-\varepsilon}^{1} =$

$= 1-\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\operatorname{arctg}\frac{2}{\varepsilon}\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 1$.

Poichè $\underbrace{F(u_\varepsilon)}_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ \downarrow \\ 1}} \leq \sup_{u\in X} F(u) \leq 1 \quad \forall\, 0<\varepsilon<1$, si ha $\sup_{u\in X} F(u) = 1$.

D'altra parte, $\nexists\, u\in X : F(u)=1$. Infatti, dovrebbe essere $u'(x)\equiv 0$ su $[0,1]$, ossia $u(x)=\text{cost}$ su $[0,1]$, ma questo non è possibile per le condizioni al bordo! ■

---

* pag. 8 : la disug. isoperimetrica dice che l'area di qualsiasi regione nel piano delimitata da una curva di lunghezza fissata non può mai superare l'area del cerchio il cui bordo ha tale lunghezza. Inoltre, se una regione ha la stessa lunghezza e l'area di un cerchio, allora deve essere un cerchio.

La disug. isoperimetrica mostra anche che il cerchio risolve il problema duale, cioè quello di trovare il sottoinsieme del piano di area assegnata e di perimetro minimo ; vedi P4". □