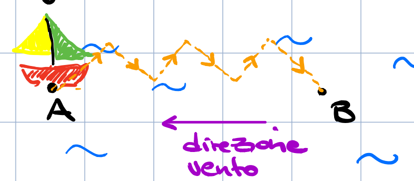
5 Lez. 9/03 (registrata 10 marzo)

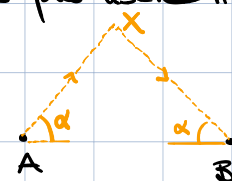
Oss. Problemi con minimi "con pt. angolosi" non sono affatto di natura artificiale, ma appaiono in modo naturale in natura:

Es. a) Pbm. della navigazione con una barca a vela lungo un fiume controvento

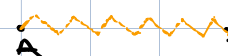



supponiamo di trascurare la corrente dell'acqua

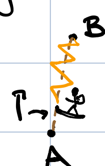
Quello che tutti i velisti sanno è quello che si deve andare lungo una curva spezzata! In questo modo il velista può usare il vento per navigare contro di esso in due rate, con l'angolazione $\alpha$ più favorevole.




se si tiene conto della corrente ...




Es. b) Pbm. di raggiungere la cima B di una ripida montagna (con addosso gli sci o a piedi) a partire dal pt. A. Se la pendenza è poca,




e quindi non c'è il pbm. di scivolamento si procede lungo il cammino di "minima distanza" $\Gamma$; altrimenti, nella parte di terreno, dove la maggior pendenza supera un certo valore costante $a$ (che è la pendenza ideale per guadagnare altezza senza scivolamento all'indietro), lo sciatore (o l'escursionista) posiziona i suoi sci (i suoi piedi) alternativamente lungo due direzioni di pendenza ideale $a$. Esso descrive un cammino a zigzag su $\Gamma$, piuttosto che $\Gamma$ stesso. □

$\delta^2 F(u_0, v) \ldots$ $u_0$ pt. di minimo locale; studieremo più avanti nel corso!

## CONDIZIONE SUFFICIENTE DI OTTIMALITÀ: CONVESSITÀ

Sempre le stesse ipotesi su $f$, $F(u) = \int_a^b f(x, u, u')\,dx$ ..

(P) $\inf_{u \in X} F(u)$ $X =$ spazio delle funz. ammissibili $= \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta\}$.

### Teorema 2:

i) Sia $f \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e $u_0 \in X$ soluzione di (EED).
Se $\forall x \in [a,b]$

$$(u, \xi) \longmapsto f(x, u, \xi) \text{ è convessa,}$$

allora $u_0$ è un pt. di minimo di (P).

ii) Sia $f \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $u_0 \in X \cap \mathcal{C}^2([a,b])$ soluzione di (EE)
se $\forall x \in [a,b]$

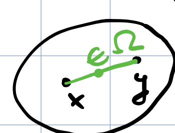
$$(u, \xi) \longmapsto f(x, u, \xi) \text{ è convessa,}$$

allora $u_0$ è un pt. di minimo di (P)

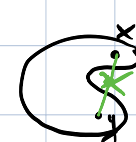
iii) Infine, se $f$ è strettamente convessa, allora un minimizzante di (P), se esiste, è unico.

#### Ripasso: Funzioni convesse

Def. i) Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice convesso se $\forall x, y \in \Omega$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ si ha $\lambda x + (1-\lambda) y \in \Omega$




convesso




$\Omega$ non convesso

ii) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice <u>convessa</u> (in $\Omega$) se

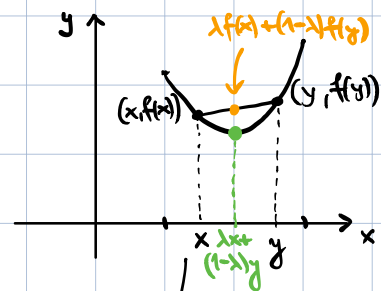
$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

$\forall\, x, y \in \Omega, \ \forall\, \lambda \in [0,1]$

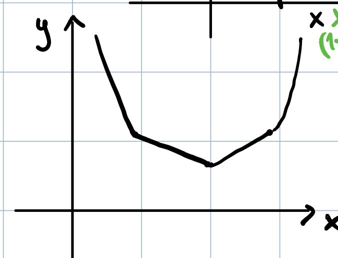
$f : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice <u>strettamente convessa</u> se la disuguaglianza è stretta $\forall\, x, y \in \Omega$, $x \neq y$ e $0 < \lambda < 1$, o equiv. se vale $=$ se e solo se $x = y$ oppure $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$.

<u>Es.</u> $n = 1$

$\Omega = I$ intervallo




$f$ strett. convessa




$f$ non strett. convessa.

$\square$

**Teorema (Caratt. della convessità funz. $\mathcal{C}^1$):**

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, convesso, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$.

$f$ è convessa se e solo se

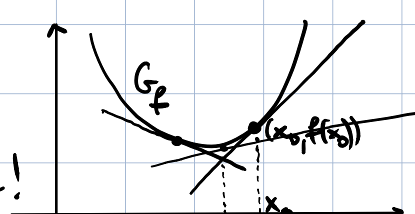
$$f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \forall\, x, x_0 \in \Omega$$

$f$ è strett. convessa se e solo se

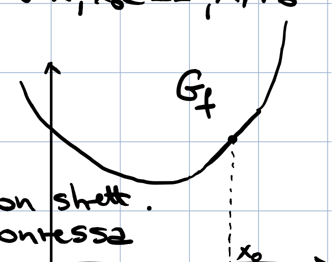
$$f(x) > f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \forall\, x, x_0 \in \Omega, \ x \neq x_0$$

<u>Es. $n = 1$</u>

strett. convessa!




non strett. convessa



**Teorema** (Caratt. della convessità funz. $\mathcal{C}^2$):

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, convesso, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2$.
$f$ è convessa se e solo se la matrice hessiana
$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{ij}$ è semidefinita positiva $\forall x \in \Omega$; ossia tutti gli autovalori sono $\geq 0$. Inoltre,
Inoltre $f$ è strett. convessa se la matrice hessiana $H_f(x)$ è definita positiva $\forall x \in \Omega$, ossia tutti gli autovalori sono positivi.

Chiudiamo questa raccolta di risultati con una disuguaglianza molto importante

**Teorema** (disug. di Jensen): Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato, $u \in L^1(\Omega)$; sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa di classe $\mathcal{C}^1$. Allora

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(u(x))\,dx \qquad |\Omega| = \text{misura di } \Omega.$$

Dim. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sapp. $f(\alpha) \geq f(\beta) + f'(\beta)(\alpha - \beta)$ per la convessità di $f$.

Prendiamo $\alpha = u(x)$ $\quad \beta = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\,dx$; $\forall x \in \Omega$ si ha allora

$$f(u(x)) \geq f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\,dx\right) + f'\left(\underbrace{\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\,dx}\right)\left(u(x) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\,dx\right).$$

Integrando su $\Omega$

$$\int_\Omega f(u(x))\,dx \geq |\Omega|\, f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\,dx\right) + \cancel{f'(\quad)\left(\int_\Omega u(x)\,dx - \frac{|\Omega|}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\,dx\right)}$$

ossia la disug. ricercata. ∎

Dim (Teorema 2):

i) Sia $u_0 \in X$ una soluzione di (EED). Poiché $\forall x \in [a,b]$

$$(u,\xi) \longmapsto f(x,u,\xi)$$

è convessa e di classe $C^1$, abbiamo $\forall u \in X$, $\forall x \in [a,b]$

$$f(x,u(x),u'(x)) \geq f(x,u_0(x),u_0'(x)) + f_u(x,u_0(x),u_0'(x))\,(u(x)-u_0(x))$$
$$+ f_\xi(x,u_0(x),u_0'(x))\,(u'(x)-u_0'(x)).$$

Integrando su $[a,b]$ abbiamo

$$F(u) \geq F(u_0) + \int_a^b \left[ f_u(x,u_0,u_0')(u-u_0) + f_\xi(x,u_0,u_0')(u'-u_0') \right] dx$$

ossia

$$F(u) \geq F(u_0) + \delta F(u_0, u-u_0) \qquad \forall u \in X.$$

Ponendo $v = u - u_0 \in Z$ in (EED) si ha $\delta F(u_0, u-u_0) = 0$ e quindi

$$F(u) \geq F(u_0) \qquad \forall u \in X. \qquad \square$$

ii) Segue banalmente da i). $\square$

iii) Proviamo infine l'unicità di un eventuale pt. minimo per il pbm. (P) nell'ipotesi che $\forall x \in [a,b]$ $(u,\xi) \longmapsto f(x,u,\xi)$ strett. convessa.

Supp. che esistano due soluzioni $u_0, \bar{u} \in X$ soluz. del pbm. di minimo (P). Vogliamo dim. che $u_0 = \bar{u}$. Poniamo

$$v = \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{2} \bar{u} \in X.$$

Applicando la def. di convessità di $(u,\xi) \longmapsto f(x,u,\xi)$ otteniamo $\forall x \in [a,b]$

$$f(x, w(x), w'(x)) \leq \frac{1}{2} f(x, u_0(x), u_0'(x)) + \frac{1}{2} f(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))$$

e quindi integrando su $[a,b]$ si ottiene

$$F(w) \leq \frac{1}{2} F(u_0) + \frac{1}{2} F(\bar{u}).$$

Quindi

$$\inf_{u \in X} F(u) \leq F(w) \leq \frac{1}{2} \underbrace{F(u_0)}_{= \frac{1}{2}\inf_{u\in X} F(u)} + \frac{1}{2} \underbrace{F(\bar{u})}_{= \frac{1}{2}\inf_{u\in X} F(u)} = \inf_{u \in X} F(u)$$

$$\Rightarrow \qquad F(w) = \frac{1}{2} F(u_0) + \frac{1}{2} F(\bar{u}),$$

ossia

$$\int_a^b \left[ \frac{1}{2} f(x, u_0, u_0') + \frac{1}{2} f(x, \bar{u}, \bar{u}') - f\left(x, \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}\bar{u}, \frac{1}{2}u_0' + \frac{1}{2}\bar{u}'\right) \right] dx$$

$$= 0$$

Poiché la funzione integranda è per la stretta convessità di $f$ positiva (ottenendo così un assurdo! (*)) a meno che $u_0 = \bar{u}$ e $u_0' = \bar{u}'$ su $[a,b]$, e quindi $u_0 = \bar{u}$ su $[a,b]$ come desiderato. $\square$

(*) Se abbiamo $\int_a^b g(x)dx = 0$ con $g$ continua, con $g(x) \geq 0$, allora deve essere $g(x) = 0$ su $[a,b]$.

Se $\exists x_0 \in ]a,b[$ t.c. $g(x_0) > 0$, allora per continuità di $g$ $\exists$ un intorno di $x_0$ t.c. $g(x) > 0$ su tutto questo intorno. D'altra parte $g(x) \geq 0$ su $[a,b]$ e quindi $\int_a^b g(x)dx > 0$. ■

NOTA: Per lo stretto legame che sussiste nel pbm. tra le variabili $u$ e $\xi$ una volta sostituite con $u(x)$ e $u'(x)$, otteniamo l'unicità del pt. di minimo per $F$ su $X$ (se $\exists$) anche con una stretta convessità indebolita: basta che $\forall x \in [a,b]$ la funzione

$$(u, \xi) \longmapsto f(x, u, \xi)$$

sia convessa, e strettamente convessa in una sola delle variabili $u$ o $\xi$.

Infatti, procedendo come nella dim. di iii) sopra, giungiamo all'uguaglianza

$$\int_a^b \left[\frac{1}{2} f(x, u_0, u_0') + \frac{1}{2} f(x, \bar{u}, \bar{u}') - f\left(x, \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}\bar{u}, \frac{1}{2}u_0' + \frac{1}{2}\bar{u}'\right)\right] dx$$

$$= 0.$$

Ora, la funz. integranda è $\geq 0$ e $= 0$ se e solo se $u_0 = \bar{u}$ oppure $u_0' = \bar{u}'$ su $[a,b]$, ossia $= 0$

$$\Leftrightarrow (u_0 - \bar{u})(u_0' - \bar{u}') = 0 \quad \text{su } [a,b]$$

$$\Leftrightarrow \left[(u_0 - \bar{u})^2\right]' = 0 \quad \text{su } [a,b]$$

$$\Leftrightarrow u_0 - \bar{u} = \text{cost} \quad \text{su } [a,b]$$

Poiché

$$u_0(a) = \bar{u}(a) \Rightarrow u_0 - \bar{u} \equiv 0 \quad \text{su } [a,b]$$

$\Rightarrow u_0 = \bar{u}$ su $[a,b]$. $\square$

OSS. • Se $f(x,u,\xi) = f_1(x,\xi) + f_2(x,u)$ con $\left.\begin{array}{l} f_1(x,\cdot) \text{ strett. convessa} \\ f_2(x,\cdot) \text{ convessa} \end{array}\right\}$ o viceversa

$\Rightarrow f$ è strett. convessa "indebolita"

$\Rightarrow$ unicità del pt. di minimo, se il funz. ha minimo.

•• Se $f(x,u,\xi) = f_1(\xi)$ strett. convessa

$\Rightarrow f$ è strett. convessa "indebolita"

$\Rightarrow$ unicità del pt. di minimo .....

Es. $f(x,u,\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + g(x)\,u$ stretta convessità indebolita ■

Prima di discutere/risolvere l'eq. di Eulero-Lagrange in vari casi e studiare se la/le soluzioni eventuali sono dei pt. di minimo (o solo estremali) diamo un'espressione differente dell'Eq. di (EE). Essa risulterà particol. utile nel caso che f non dip. esplicit. da x (come vedremo nel caso della brachistocrona).

**Prop.** Sia $f \in \mathcal{C}^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ e sia $u_0 \in \mathcal{C}^2([a,b])$ un estremale di F, ossia una soluzione di (EE). Allora $\forall x \in [a,b]$ vale

$$(EE)' \quad \frac{d}{dx}\left[f(x,u_0,u_0') - u_0'(x) f_\xi(x,u_0,u_0')\right] = f_x(x,u_0,u_0')$$

**Dim.** Notiamo che $\forall u_0 \in \mathcal{C}^2([a,b])$, possiamo eseguire la derivata al membro sinistro dell'eq. sopra:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x,u_0,u_0') - u_0' f_\xi(x,u_0,u_0')\right] =$$

$$f_x(x,u_0,u_0') + f_u(x,u_0,u_0')u_0' + \cancel{f_\xi(x,u_0,u_0')u_0''} -$$

$$- u_0'' \cancel{f_\xi(x, u_0, u_0')} - u_0' \frac{d}{dx}\left[f_\xi(x, u_0, u_0')\right]$$

$$= f_x(x, u_0, u_0') + u_0' \Big[\underbrace{f_u(x, u_0, u_0') - \frac{d}{dx}\left[f_\xi(x, u_0, u_0')\right]}_{=0 \text{ in } [a,b]}\Big].$$

Se $u_0$ è estremale di $F$, allora ✓ e quindi (EE)'. ■

OSS. Se cerchiamo soluzioni $u_0$ che non hanno tratti costanti, allora (EE)' è equiv. a (EE). □