Abbiamo visto nella lez. prec. che se $u_0 \in \mathcal{C}^2([a,b])$ risolve l'eq. di (EE), allora vale

$$(EE)' \qquad \frac{d}{dx}\left[f(x,u_0,u_0') - u_0' f_\xi(x,u_0,u_0')\right] = f_x(x,u_0,u_0') \quad \forall x \in [a,b].$$

In particolare possiamo dire (grazie al teorema 1 visto nella lez. 4) che vale il seg.

Teorema 3: Se $f \in \mathcal{C}^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ e se $u_0 \in X \cap \mathcal{C}^2([a,b])$ è una funz. minimizzante per F su X, allora $\forall x \in [a,b]$ vale $(EE)'$.

OSS. 1 Se $f(x,u,\xi) = f(u,\xi)$ (caso autonomo), allora si ha per $u_0 \in \mathcal{C}^2([a,b])$ estremale di F, che $(EE)'$ si scrive nella forma

$$\frac{d}{dx}\left[f(u_0,u_0') - u_0' f_\xi(u_0,u_0')\right] = 0 \quad \text{su } [a,b],$$

ossia

$$\boxed{f(u_0,u_0') - u_0' f_\xi(u_0,u_0') = c \quad \forall x \in [a,b]} \qquad (**)$$

con $c \in \mathbb{R}$ (costante che sarà determinata a posteriori).

Notiamo che l'eq. diff. $(**)$ è un'eq. diff. del 1° ordine (!!) [a diff. di (EE) che è del secondo ordine] e quindi più facile da risolvere.

Questo fatto ci verrà di grande aiuto quando vogliamo risolvere il pbm. della brachistòcrona.

Posto $\Phi(u,\xi) : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Phi(u,\xi) \doteq f(u,\xi) - \xi f_\xi(u,\xi)$ (o con segno opposto) si ha che Φ è un integrale primo del funzionale F, cioè è costante lungo ogni estremale di F.

Oss. 2 Poichè $\frac{d}{dx}\left[\Phi(u_0,u_0')\right] = u_0'\left[f_u(u_0,u_0') - \frac{d}{dx}(f_\xi(u_0,u_0'))\right]$ (basta vedere la dim. della prop. della lez 5), u_0 è un estremale di F $\Rightarrow$ $\Phi(u_0,u_0') = c$. Viceversa, se u_0 è una soluzione con tratti non costanti di $\Phi(u_0,u_0') = c$, allora u_0 è un estremale di F. □

Vogliamo in seguito applicare i risultati visti fino ad ora (sui quali si basa il metodo indiretto del CdV) per studiare/discutere pbm. di minimo (quelli "classici" e altri). La ns.

ROAD MAP sarà : a) scriviamo l'eq. di Eulero-Lagrange (EE) (opp. (EE)' nel caso autonomo)

b) speriamo di riuscire a risolverla

c) speriamo di riuscire a dim. che la/le soluzioni sono pt. di minimo. Per ora le strade praticabili per fare questo sono

- farlo "a mano" sfruttando la forma speciale del funzionale
- convessità (disug. di Jensen)

Nel caso speciale $f(x,u,\xi) = f(\xi)$ discutiamo un caso non-convesso (lagrangiana a due pozzi - paradosso di Eulero) usando la "convessificata" di f ... Lemma "trivial" per avere cond. suff. affinchè un pt. sia di minimo.

CASO 1 : $f(x,u,\xi) = f(\xi)$

Questo è il caso più semplice. L'eq. di (EE) si scrive

$$\frac{d}{dx}\left[f'(u')\right] = 0 \quad \text{su } [a,b] \qquad (f_\xi = f')$$

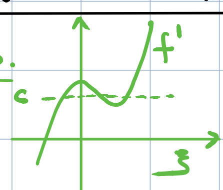
cioè

$$f'(u') = \text{cost.} \quad \text{su } [a,b]$$

(otteniamo da (EE) poiché $f_u = 0$. Notiamo che si otterrà la stessa condizione $f'(u') = \text{cost}$ su $[a,b]$ anche da (EED).
Infatti, (EED) in questo caso si scrive $\int_a^b f'(u')\, v'\, dx = 0 \quad \forall v \in Z$
Il lemma di Du Bois-Reymond (lo vedremo success.)
implica allora che $f'(u') = \text{cost.}$ su $[a,b]$).

Notiamo che $u(x) = c_1 x + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ è un estremale di F (sempre!) ed è l'unico possibile a meno che $f'(\xi)$ non sia costante in un intero intervallo.

OSS.



Se $f'(\xi) = c$ ha solo pt. isolati come soluzione allora $u'(x)$, se continua, deve essere costante!

In particolare, imponendo $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$ otteniamo

$$\boxed{u_0(x) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x - a) + \alpha} \in X$$

e u_0 è un pt. stazionario di F in X. Rimane da discutere se tale retta è un pt. di minimo di (P) $\inf_{u \in X} F(u)$, e se essa è unico.

Caso 1.a: f è strett. convessa

In questo caso, $u_0 \in X$ è infatti un pt. di minimo per F su X (seg. dal teor. 1, lez 4 e teor. 2, lez. 5). È unico grazie al fatto che f soddisfa la stretta convessità "indebolita".

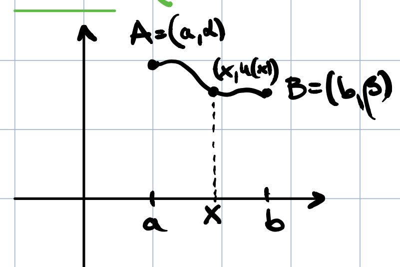
OSS. Il fatto che u_0 estremale è un pt. di minimo per F su X può essere dim. in questo caso usando la disug. di Jensen con "u' e non u": $\forall u \in X$ si ha

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u'(x))\,dx \underset{J}{\geq} f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u'(x)\,dx\right) = f\left(\frac{u(b)-u(a)}{b-a}\right)$$

$$= f\left(\frac{\beta-\alpha}{b-a}\right) = f(\underbrace{u_0'(x)}_{\text{costante}}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u_0'(x))\,dx$$

Si ha quindi $F(u) \geq F(u_0)$ $\forall u \in X$. ■

Es. 1 (curva di minima lunghezza - caso non-parametrico)



Pbm. studiare

(P1) $\quad \inf\left\{L(u) = \int_a^b \sqrt{1+u'^2}\,dx : u \in X\right\}$

$X = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta\}$.

Abbiamo $f(x,u,\xi) = f(\xi) = \sqrt{1+\xi^2}$ strett. convessa in ξ.

Da quanto oss. l'unica soluzione di (P1) è

$$\boxed{u_0(x) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a) + \alpha \qquad x \in [a,b]}$$

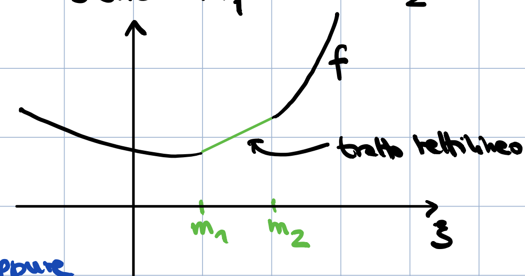
■

Es. 2. Studiare il pbm. di minimo per $F(u) = \int_0^2 u'^2(x)\,dx$, $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,2]) : u(0) = 2,\ u(2) = 10\}$. Calcolare $\inf_{u \in X} F(u)$. □

Caso 1.b. : f convessa

Se f è solo convessa, ma non strett. convessa, allora la retta u_0 è sempre ancora un pt. di minimo per F su X.
(per gli stessi teoremi di prima!)

NOTA: NON è UNICO se e solo se il coeff. angolare m della retta $u(x) = mx+q \in X$ casca all'interno di un intervallo in cui f è una funzione affine, cioè $\exists$ sono $m_1 < m < m_2$ t.c.
$f_{\xi\xi}(\xi)=0 \quad \forall \xi \in [m_1, m_2]$.
$(= f''(\xi))$



OSS. i) m non può essere m_1 oppure m_2, cioè se lo è, allora c'è unicità!

Infatti, supp. $m = m_1$ e supp. che $u(x) = m_1 x + q \in X$ sia pt. di minimo per F su X. Prov. che è unico.

Per convessità

$$f(\xi) \geq f(m_1) + f'(m_1)(\xi - m_1) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

In particolare, $\forall w \in X$

$$(*) \quad f(w'(x)) \geq f(m_1) + f'(m_1)(w'(x) - m_1) \quad \forall x \in [a,b]$$

Se $w \in X$ minimizza F in X, dobbiamo avere $=$ $\forall x \in [a,b]$

(infatti, altrimenti $\exists x_0 \in]a,b[$ t.c. $f(w'(x_0)) > f(m_1) + f'(m_1) \cdot (w'(x_0) - m_1)$
e, per continuità, $f(w'(x)) > f(m_1) + f'(m_1)(w'(x) - m_1)$
$\forall x \in I$, I intorno opportuno di x_0. Risulta

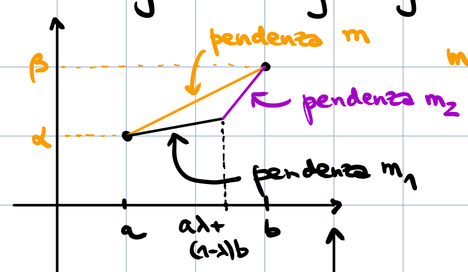
$$\int_a^b f(w'(x))dx > \int_a^b f(m_1)dx + f'(m_1)\cancel{\int_a^b (w'(x) - m_1)dx} \Rightarrow F(w) > F(u)$$

contraddicendo che $w \in X$ minimizza F su X)

Ma, per avere $=$ in ⊛, deve essere $w'(x) \geq m_1$ $\forall x \in [a,b]$ (cioè $w'(x)$ deve trovarsi nella zona affine dif, cioè nell'intervallo $[m_1, m_2]$), ossia $(w(x) - u(x))' \geq 0$ dunque $w(x) - u(x)$ è monotona su $[a,b]$, ma nulla agli estremi; quindi $w(x) = u(x)$ su $[a,b]$, provando che $u(x) = m_1 x + q$ è l'unico pt. di minimo. $\square$

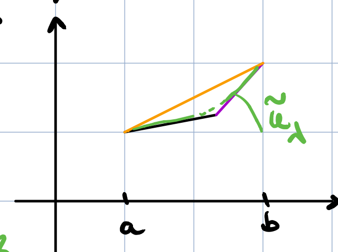
ii) Se $u(x) = mx + q$ con $m \in]m_1, m_2[$, allora ci sono altri pt. di minimo di F in X.

Si ottengono "zig-zagando" e "smussando"



$m_1 < m < m_2$

u_λ affine a tratti $\notin C^1([a,b])$



$\tilde{u}_\lambda$ (smussato il pt. angoloso)

$\tilde{u}_\lambda \in C^1([a,b])$

$\tilde{u}_\lambda(a) = \alpha$, $\tilde{u}_\lambda(b) = \beta$

$\tilde{u}_\lambda'(x) \in [m_1, m_2]$ $\forall x \in [a,b]$

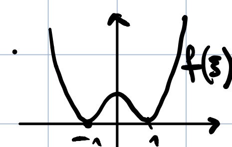
Poiché sul tratto rettilineo $f(\xi) = f(m) + f'(m)(\xi - m)$ $\forall \xi \in [m_1, m_2]$ si ha $f(\tilde{u}_\lambda'(x)) = f(m) + f'(m)(u_\lambda'(x) - m)$ $\forall x \in [a,b]$ e integrando $F(\tilde{u}_\lambda) = F(u)$, e quindi $\tilde{u}_\lambda$ è un pt. di minimo. ∎

Caso 1.c.: f non convessa

Se f non è convessa, in generale, il pbm. di minimo (P) $\inf_{u \in X} F(u)$, non ha soluzione, e quindi u_0 sopra non è necess. un pt. di minimo.

Es. 3 Paradosso di Eulero – caso più generale.

Già discusso! lez 4 pag. 26



$$F(u) = \int_0^1 ((u')^2 - 1)^2 \, dx \qquad f(x,u,\xi) = f(\xi) = (\xi^2 - 1)^2$$

La retta $u_0(x) = 0$ è estremale di F in $X = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$, ma non è un pt. di minimo di F su X.

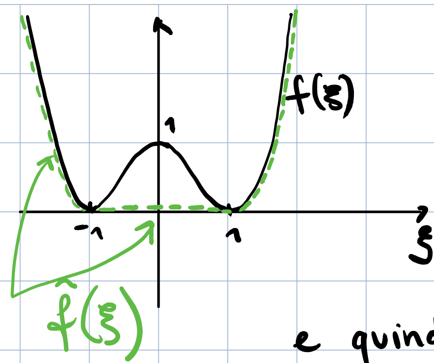
> Discutiamo, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il pbm. di minimo per $F(u)$ in $X_\lambda = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = 0,\ u(1) = \lambda\}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

$f(x,u,\xi) = f(\xi)$; l'eq. di Eulero-Lagrange ha come soluzione in X la retta $u_0(x) = \lambda x$ su $[0,1]$.

Proviamo che:

- se $|\lambda| \geq 1$, allora il minimo c'è, e la retta $u_0(x) = \lambda x$ è l'unico pt. di minimo per F in X.
- se $|\lambda| < 1$, allora il minimo non c'è e $\inf_{u \in X_\lambda} F(u) = 0$.
  (come caso $\lambda = 0$)

"VIA CONVESSIFICATA"
(si possono usare così le oss. del caso 1.b)



Consid. la funzione convessificata $\hat f$ di f, ossia la funzione convessa più grande $\leq f$. Abbiamo

$$\hat f(\xi) \leq f(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$\underbrace{\int_0^1 \hat f(u'(x))dx}_{} \leq \int_0^1 f(u'(x))dx \quad \forall u \in X$$

$$(*) \quad \hat F(u) \leq F(u) \quad \forall u \in X.$$

Allora, dato $u_0(x) = \lambda x \in X$:

- se $|\lambda| \geq 1$ si ha

$$F(u_0) = \int_0^1 f(u_0'(x))dx = \int_0^1 f(\lambda)dx = \int_0^1 \hat f(\lambda)dx = \int_0^1 \hat f(u_0'(x))dx$$

$f(\lambda) = \hat f(\lambda)$ se $|\lambda| \geq 1$

$$= \hat F(u_0) \leq \hat F(u) \underset{(*)}{\leq} F(u) \quad \forall u \in X$$

(usiamo qui per $\hat f$ quanto oss. nel caso 1.b !!!)

nel caso convesso la retta u_0 è pt. di minimo

provando che u_0 è un pt. di minimo anche per F !!
Inoltre è unico perché è unico per $\hat F$ (la pendenza λ non cade nella zona affine di $\hat f$ compreso $\lambda = -1$, $\lambda = 1$).

vedi pag.48

- se $|\lambda| < 1$, proviamo innanzitutto che $\inf_{u \in X_\lambda} F(u) = 0$.
Si procede analog. come nel caso $\lambda = 0$. [pag.48] Segue allora che un pt. di minimo per F in X_λ deve soddisfare $F(u) = 0$,

ossia $|u'(x)|=1$ su $[0,1]$. Ma per continuità si ha allora $u'(x)=1$ su $[0,1]$ (opp. $u'(x)=-1$), che non è compatibile con i dati al bordo. □

Cenni dim. tralasciate sopra:

pag. 47: Se $\bar{u}\in X$ è un altro pt. di minimo per F, allora

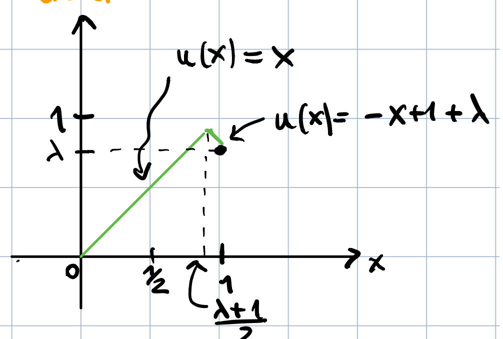
$$F(u_0) \le \hat{F}(u_0) \le \hat{F}(\bar{u}) \le F(\bar{u}) \le F(u_0)$$

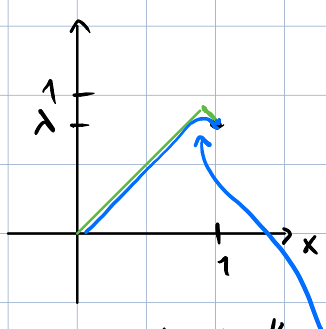
ossia $\hat{F}(u_0) = \hat{F}(\bar{u})$

e quindi $u_0=\bar{u}$ per unicità del pt. di minimo per $\hat{F}$. □

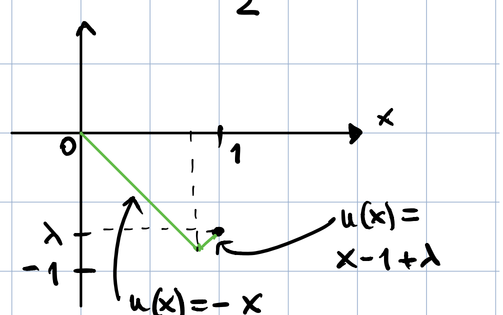
pag. 47: Ovviamente in $\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([0,1])$ c'è il minimo:

Se $0\le\lambda<1$





Se $-1<\lambda\le 0$



Ora basta "smussare" il punto angoloso (come fatto per $\lambda=0$) e si trovano $u_\varepsilon\in X_\lambda$ con $F(u_\varepsilon)\longrightarrow 0$; si ha $\inf\limits_{u\in X_\lambda}F(u)=0$ ■

Es. 2 pag. 43

La Lagrangiana è $f(\xi)=\xi^2 \in \mathcal{C}^2$ strett. convessa.
L'eq. di Eulero-Lagrange si scrive $\frac{d}{dx}[2u'(x)]=0$ su $[0,2]$; le soluzioni sono tutte e sole le funzioni $u(x)=c_1x+c_2$. Imponendo che $u(0)=5$, $u(1)=10$ otteniamo che $u_0(x)=\frac{5}{2}x+5$ su $[0,2]$ è l'unico pt. di minimo per F su X.

Infine $\inf_{u\in X} F(u) = F(u_0) = \int_0^2 u_0'^2(x)\,dx = \frac{25}{4}\cdot 2 = \frac{25}{2}$. ∎