7 lez. 12/03 (registrata 12/03)

Oss. Abbiamo provato la minimalità della retta $u_0(x) = \lambda x \in X_\lambda$ per il funz. $F(u) = \int_0^1 (u'^2 - 1)^2 dx$ su $X_\lambda = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = 0,\ u(1) = \lambda\}$ nel caso $|\lambda| \geq 1$ via l'introduzione di funzionale ausiliario $\hat{F}$ ottenuto consid. la funz. convessif. $\hat{f}$ di f.

Questo approccio può essere visto come caso particolare del seg. lemma.

Lemma trivial (cond. suff. per la minimalità):

Siano $F, G : X \to \mathbb{R}$ due funzionali t.c.

i) $G(x) \leq F(x) \quad \forall x \in X$

ii) $\exists x_0 \in X : G(x_0) \leq G(x) \quad \forall x \in X$

iii) $G(x_0) = F(x_0)$

Allora $F(x_0) \leq F(x) \quad \forall x \in X$.

Dim. $\forall x \in X$,

$$F(x_0) \underset{iii)}{=} G(x_0) \underset{ii)}{\leq} G(x) \underset{i)}{\leq} F(x)$$

ossia $F(x_0) \leq F(x)$. ■

Questo lemma ci dà cond. suff. affinché un pt. x_0 sia di minimo attraverso l'uso di un opportuno funzionale ausiliario.

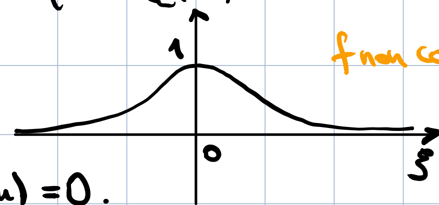
Nell'es. citato sopra $G = \hat{F}$. ■

Vediamo un altro esempio di funz. F, in cui $f(x,u,\xi) = f(\xi)$ non convesso, in cui il pbm. di minimo considerato non ha soluzione, e quindi la retta in X non è un pt. di minimo (in realtà è un pt. di massimo).

Es. 4 $\quad F(u) = \int_0^1 e^{-u'^2(x)}\, dx$, $\quad X = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$

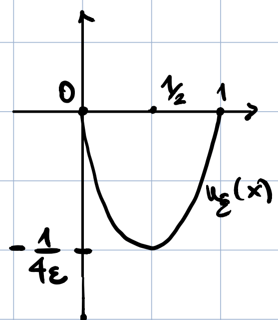
$e^{-u'^2(x)} > 0$

$f(x,u,\xi) = f(\xi)$
$= e^{-\xi^2}$ funz. gaussiana



f non convessa!

Si prova facilmente che $\inf\limits_{u \in X} F(u) = 0$.



$\forall \varepsilon > 0 \quad u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4\varepsilon} \quad \in X$

$u_\varepsilon'(x) = \frac{2}{\varepsilon}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

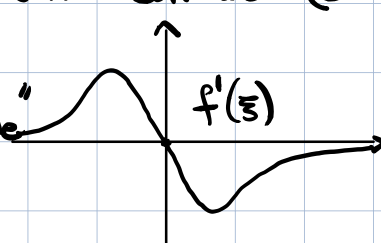
$$0 \le \inf_{u \in X} F(u) \le F(u_\varepsilon) = \int_0^1 e^{-\frac{4}{\varepsilon^2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} dx$$

$$\underset{\frac{2}{\varepsilon}(x-\frac{1}{2}) = s}{=} \frac{\varepsilon}{2} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{-s^2}\, ds \le \frac{\varepsilon}{2} \underline{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\, ds}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\pi} \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0$$

$\Rightarrow \inf\limits_{u \in X} F(u) = 0$.

Vediamo però che F non ammette minimo e questo lo proviamo usando l'eq. di Eulero-Lagrange.
Ricordo che $u(x) = c_1 x + c_2$ sono gli unici estremali (deboli) di F poiché $f'(\xi) = -2\xi e^{-\xi^2}$ non ammette alcun "tratto orizzontale" cioè intervallo in cui è costante.



Risulta che $u_0(x) \equiv 0$ su $[0,1]$ è l'unico estremale di F in X, ma questa funz. non è ovv. un pt. di minimo per F su X, essendo $F(u_0) = 1 \neq 0$.
Oss. che $F(u) = \int_0^1 e^{-u'^2(x)}\,dx \leq \int_0^1 1\,dx = 1 = F(u_0)$ $\forall u \in X$,
quindi $\sup_{u \in X} F(u) = \max_{u \in X} F(u) = F(u_0) = 1$. $\square$

CASO 2: $f(x,u,\xi) = f(x,\xi)$

In questo caso l'eq. di (EE) è

$$\frac{d}{dx}\left[f_\xi(x,u')\right] = 0 \quad \text{su } [a,b]$$

cioè

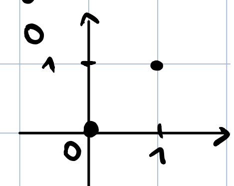
$$f_\xi(x,u') = \text{cost} \quad \text{su } [a,b].$$

(Notiamo che (EED) è $\int_a^b f_\xi(x,u')\, v'\,dx = 0 \;\; \forall v \in Z$ e si ha, grazie al lemma di Du Bois-Reymond che $f_\xi(x,u') = \text{cost}$ su $[a,b]$).

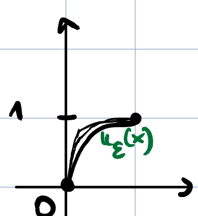
L'eq. $f_\xi(x,u') = \text{cost}$ su $[a,b]$ è già più difficile da risolvere che $f_\xi(u') = \text{cost}$ per il caso 1.
Oss. che se riusciamo a risolvere quest'eq. (diff. in forma implicita) rispetto a $u'(x)$ (cioè siamo capaci di invertire $\xi \longmapsto f_\xi(x,\xi)$ $\forall x \in [a,b]$), cioè riusciamo a scrivere

allora
$$u'(x) = g(x, c_1) \qquad c_1 = \text{cost}$$
$$u(x) = \int_a^x g(t, c_1)\,dt + c_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$
sono (tutti e soli) gli estremali di F. □

Es. 1 (Esempio di Weierstrass) Supp. $F(u) = \int_0^1 x^2 u'^2\,dx$
$X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0,\ u(1) = 1\}$
e chiediamo $\inf_{u \in X} F(u)$.



$f(x, u, \xi) = f(x, \xi) = x^2 \xi^2$ su $[0,1] \times \mathbb{R}$;
$\forall x \geq 0$ la funz. $f(x, \cdot)$ è convessa e è strettamente convessa solo se $x > 0$.
Possiamo provare (lez. 2) che $\inf_{u \in X} F(u) = 0$



$$u_\varepsilon = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \in X, \quad 0 \leq \inf_{u \in X} F \leq F(u_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0.$$

Possiamo provare dirett. (come fatto lez. 2) $\nexists \min_{u \in X} F(u)$ poiché $F(u) = 0$ per $u \in X$ che minimizza.
Ma questo richiederebbe $u'(x) = 0$ su $]0,1]$, il che è impossibile in quanto deve essere $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ con $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$.
Vogliamo ora discutere questo fatto usando le eq.

di (EE). Dall' eq. di (EE) abbiamo che un pt di minimo u di F in X soddisfa $f_\xi(x,u')=c_1$ su $[a,b]$ nel ns. caso particolare

$$2x^2u'(x)=c_1 \quad \text{su } [0,1] \qquad f(x,\xi)=x^2\xi^2$$
$$f_\xi(x,\xi)=2x^2\xi$$

Segue, che in particolare per $x=0$, si otterrebbe $c_1=0$, ossia $2x^2u'(x)=0 \ \forall x\in[0,1]$, da cui $u'(x)=0$, ossia $u(x)=\text{cost}$, ma una tale funz. non può soddisfare le cond. al bordo! Non ci sono soluz. dell'eq. EE in X, e quindi F non ha pt. di minimo.

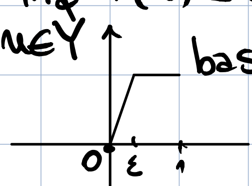
Oss. $2x^2u'(x)=c_1$ su $[a,b]$ $\qquad u'(x)=\dfrac{c_1}{2x^2}$ su $[a,b]$

$$u(x)=-\frac{c_1}{2x}+c_2, \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Poiché su $[0,1]$ deve essere ben definita $u(0)$, si deve porre $c_1=0$ e quindi si giunge a $u(x)=c_2$ su $[0,1]$. ■

OSS. $F(u)=\displaystyle\int_0^1 x^2u'^2(x)\,dx$ non ammette pt. di minimo nemmeno su $Y=\{u\in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([0,1]) : u(0)=0,\ u(1)=1\}$

Si dim. $\inf\limits_{u\in Y} F(u)=0$; basta consid. $u_\varepsilon(x)=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon}x & \text{su } [0,\varepsilon]\\ 1 & \text{su } [\varepsilon,1]\end{cases}$ $\quad 0<\varepsilon<1$



$0 \le \inf_{u \in X} F(u) \le F(u_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$. Ma $\nexists\, u \in Y$ t.c. $F(u) = 0$.

Infatti $u \in Y$ deve essere continua su $[0,1]$; inoltre $F(u) = 0 \Rightarrow u'(x) = 0$ su $]0,1]$ e quindi costante e quindi non possono essere soddisfatte le cond. al bordo. $\square$

Es. 2 Studiare il prob. di minimo $\inf_{u \in X} F(u)$,

$$F(u) = \int_1^2 x^2 u'^2\, dx, \quad X = \left\{ u \in C^1([1,2]) : u(1) = 1,\ u(2) = \tfrac{1}{2} \right\}.$$

Det. il valore del minimo. $\square$

Es. 3 $F(u) = \int_1^2 u'(1 + x^2 u')\, dx$, $X = \{ u \in C^1([1,2]) : u(1) = 3,\ u(2) = 5 \}$. $\blacksquare$

· ——— · ——— ·

CASO 3 : $f(x, u, \xi) = f(u, \xi)$

Anche se questo caso è molto più difficile da trattare di quelli precedenti, esso ha l'importante proprietà di avere l'integrale primo Φ per le soluz. dell'eq. di EE.

L'eq. di (EE) è

$$\frac{d}{dx}\left[f_\xi(u, u') \right] = f_u(u, u') \quad \text{su } [a,b]$$

e,

ogni soluzione $u \in \mathcal{C}^2([a,b])$ di (EE) soddisfa

$$\underbrace{f(u,u') - u' f_\xi(u,u')}_{\Phi(u,u')} = \text{cost} \quad \text{su } [a,b]$$

CASO 3.a : f convessa

Es. Consid. $F(u) = \int_{-1}^{1} \left[\frac{k}{2} u'^2 + g \cdot u\right] dx$, $k>0$, $g>0$

costanti. Vogliamo studiare (P) $\inf_{u \in X} F(u)$,
$X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = u(1) = 0\}$.

$f(x,u,\xi) = f(u,\xi) = \frac{k}{2}\xi^2 + gu \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Oss.

$f_\xi = k\xi$, $f_u = g$. L'eq. di (EE) si scrive

$$\frac{d}{dx}\left[ku'\right] = g \quad \text{su } [-1,1] \quad , \text{ ossia}$$

$$ku'' = g \quad \text{su } [-1,1].$$

Ne segue

$$u'' = \frac{g}{k} \quad \text{ossia} \quad u'(x) = \frac{g}{k}x + c_1 ,$$

$$u(x) = \frac{g}{2k}x^2 + c_1 x + c_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo che $u(-1)=u(1)=0$ si ottiene

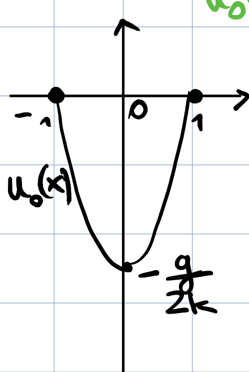
$$0=\frac{g}{2k}-c_1+c_2 \qquad 0=\frac{g}{2k}+c_1+c_2 \quad \Rightarrow \quad c_1=0, \quad c_2=-\frac{g}{2k}$$

otteniamo l'unica soluzione dell'eq. di EE in X è data da $u_0(x)=\frac{g}{2k}(x^2-1)$ su $[-1,1]$.
Poichè f è strettamente convessa "indebolita" possiamo asserire che u_0 è l'unico pt. di minimo "assoluto" del ns. prob. variazionale. $\square$

NOTA: Errore pensare che $u_1(x)\equiv 0 \in X$ sia pt. di minimo! $F(u_1)=0$, ma ved. che $F(u_0)<0$.

$$F(u_0)=\int_{-1}^{1}\left[\frac{k}{2}\left(\frac{g}{k}x\right)^2+g\left(\frac{g}{2k}(x^2-1)\right)\right]dx$$

$u_0'(x)=\frac{g}{k}x$

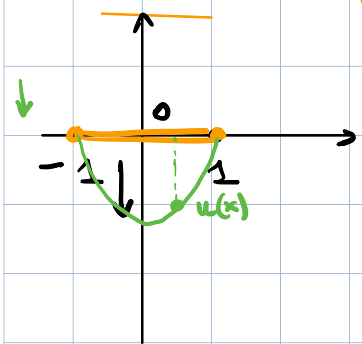


$$=\frac{g^2}{2k}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\frac{g^2}{2k}\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{g^2}{\cancel{2}k}\left(\frac{\cancel{2}}{3}\right)+\frac{g^2}{\cancel{2}k}\left(\frac{\cancel{2}}{3}-\frac{2}{2}\right)$$

$$=\frac{2g^2}{3k}-\frac{g^2}{k}=-\frac{g^2}{3k}<0 \qquad \blacksquare$$

OSS. Interpret. fisica del funzionale F



Corda elastica (di massa trasc.)
Supp. l'intervallo $[-1,1]$ sia la posizione di equilibrio della corda in assenza di forze esterne.

La deformazione, o meglio la deviazione dalla configurazione di riferimento, sarà descritta dalla funzione $u(x)$: pensiamo a "piccole deformazioni" verticali e scegliamo proprio $u(x)$ come l'altezza della corda deformata sopra o sotto la posizione dritta di equilibrio.

Energia immagazzinata del sistema descritto dalla funz. altezza $u(x)$ è supposto essere proporzionale alla variazione della lunghezza corda rispetto alla posizione di equilibrio:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+u'^2(x)}\,dx - \int_{-1}^{1} 1\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1+u'^2} - 1\right) dx \sim \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u'^2\,dx$$

[Sviluppo di Taylor
$\sqrt{1+x^2}-1 = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$] ($u'(x)$ piccola !!)

$\Rightarrow$ Energia immagazzinata di una corda leggermente deformata è descritta da $\frac{k}{2}\int_{-1}^{1} u'^2(x)\,dx$ $\quad k$ = tensione

Se c'è una forza esterna di densità g nella direzione verticale rispetto alla posizione orizzontale di riferimento la sua energia potenziale è $\int_{-1}^{1} g\,u(x)\,dx$.

L'energia potenziale totale $F(u)$ della corda è quindi descritta da $F(u)=\int_{-1}^{1}\left[\frac{k}{2}u'^2+g u\right]dx$. ■

Caso 3.6. f non convessa

Es. Vogliamo studiare una famiglia di funzionali non convessi: $\lambda\in\mathbb{R}$

$$F_\lambda(u)=\int_0^\pi (u'^2-\lambda^2u^2)\,dx$$

$f(x,u,\xi)=f_\lambda(u,\xi)=\xi^2-\lambda^2u^2$, $X=\{u\in C^1([0,\pi]):\ u(0)=u(\pi)=0\}$

Vogliamo indagare

(P_λ) $\inf\limits_{u\in X} F_\lambda(u)$ studiando l'EE associata

$f_\lambda(u,\xi)$ non convessa !!

Oss. L'eq. di (EE)

$$\frac{d}{dx}\left[f_\xi(u,u')\right]=f_u(u,u')$$

$f_\xi=2\xi$
$f_u=-2\lambda^2u$

risulta

$$u''+\lambda^2u=0 \quad \text{su } [0,\pi].$$

Proveremo

a) l'eq. di (EE) ha sempre almeno una soluzione ammissibile (quella banale) e per certi λ ne ha infinite.

b) Se $|\lambda| < 1$, la soluz. $u_0(x) \equiv 0$ è l'unico pt. di minimo per (P_λ)

Se $|\lambda| = 1$, le infinite soluz. $u_0(x) = c \sin x$ $c \in \mathbb{R}$ sono tutte e sole i pt. di minimo (assoluti).

Se $|\lambda| > 1$, il funzionale non è nemmeno inferiormente limitato. $\square$

. ———— . ———— .

✿ Es. 2 pag. 55

Abbiamo $f(x, \xi) = x^2 \xi^2$ su $[1,2] \times \mathbb{R}$.

L'eq. di EE risulta $2x^2 u'(x) = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$

e quindi $u(x) = -\dfrac{c_1}{2x} + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\in \mathcal{C}^2([1,2])$.

Imponendo $u(1) = 1$ si ha $-\dfrac{c_1}{2} + c_2 = 1$

$u(2) = 1/2$ si ha $-\dfrac{c_1}{4} + c_2 = 1/2$

da cui $-\dfrac{c_1}{4} = \dfrac{1}{2}$ $c_1 = -2$, e poi $c_2 = 1 + \dfrac{c_1}{2} = 0$

Risulta che $u_0(x) = \dfrac{1}{x}$ estremale di F su X.

Possiamo anche asserire, per la stretta convessità "indebolita" di f, che tale u_0 è pt. di minimo ed è unico! Inoltre $\min_{u\in X} F(u) = F(u_0) = \int_1^2 x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$\square$

Es.3 pag.55

Abbiamo $f(x,\xi) = \xi(1+x^2\xi)$ su $[1,2]\times\mathbb{R}$;
$\forall\, x\in[1,2]$, $f(x,\cdot)$ è strett. convessa in ξ.
Risolviamo l'eq. di (EE) $f_\xi(x,u') = c_1$, $c_1\in\mathbb{R}$, ossia

$$1+2x^2u' = c_1 \quad \text{su } [1,2] \qquad f_\xi = 1+2x^2\xi$$

con c_1 da determinare alla fine.
Si ha

$$u'(x) = \frac{c_1-1}{2x^2} \quad \text{su } [1,2]$$

$$u(x) = -\frac{c_1-1}{2x} + c_2 \quad \text{su } [1,2].$$

Imponendo $u(1)=3$, $u(2)=5$ si ottiene $c_1=9$, $c_2=7$
e $u_0(x) = -\frac{4}{x}+7$ è estremale di F in X.
Risulta che u_0 è l'unico pt. di minimo per F in X;
Si ha $\underset{\inf_{u\in X} F(u)}{F(u_0)} = \int_1^2 u_0'(1+x^2u_0')\,dx = \int_1^2 \frac{4}{x^2}\left(1+\cancel{x^2}\cdot\frac{4}{\cancel{x^2}}\right)dx$

$$= 20\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = 20\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = 20\cdot\frac{1}{2} = \boxed{10}$$

$\square$