8Lez. 16/03 (registrata 16/03)

$$\inf_{u\in X} F_\lambda(u)$$

con $\displaystyle F_\lambda(u)=\int_0^\pi (u'^2-\lambda^2u^2)\,dx$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $X=\{u\in C^1([0,\pi]) : u(0)=u(\pi)=0\}$.

Disuguaglianza di Poincaré (Poincaré-Wirtinger)

Sono disug. funzionali utili per la ricerca e lo studio dei minimi.
Esse fanno parte di una larga famiglia di disug. in cui la norma L^p (L^2) delle derivate controlla la norma L^p (L^2 particolare) di una funz. soggetta a vincoli, come ad esempio, essere zero al bordo (o in un estremo) o avere media nulla.

Prop. (Poincaré): Se $u\in C^1([a,b])$ con $u(a)=0$. Allora

$$\int_a^b u^2(x)\,dx \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b u'^2(x)\,dx,$$

con $=$ se e solo se $u\equiv 0$.

Dim. Sia $u\in C^1([a,b])$: $u(a)=0$; allora il TFC ci dà

$$u(x)=\int_a^x u'(t)\,dt \quad \forall x\in[a,b].$$

Dunque

$$|u(x)|\le\int_a^x |u'(t)|\cdot 1\,dt \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le}\left(\int_a^x |u'(t)|^2dt\right)^{1/2}\left(\int_a^x 1\,dt\right)^{1/2}$$

$$\underbrace{\left|\int_a^b u(x)v(x)\,dx\right|}_{|(u,v)_{L^2}|}\le\underbrace{\left(\int_a^b u^2(x)\,dx\right)^{1/2}}_{\|u\|_{L^2}}\underbrace{\left(\int_a^b v^2(x)\,dx\right)^{1/2}}_{\|v\|_{L^2}}$$

$$=\left(\int_a^x |u'(t)|^2dt\right)^{1/2}(x-a)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \int_a^b |u(x)|^2\,dx \le \int_a^b \Big(\underbrace{\int_a^x |u'(t)|^2\,dt}\Big)(x-a)\,dx \le \int_a^b\Big(\int_a^b u'^2\,dt\Big)(x-a)\,dx$$

$$= \int_a^b u'^2\,dx \underbrace{\int_a^b (x-a)\,dx}_{=\left.\frac{(x-a)^2}{2}\right|_a^b}$$

$$\int_a^b u^2\,dx \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b u'^2\,dx .$$

Se vale $=$ si deve avere $\int_a^x u'^2\,dt = \int_a^b u'^2\,dx \quad \forall x\in[a,b]$

da cui, TFC $\Rightarrow$

$u'^2(x) = 0 \quad \forall x\in[a,b]$, cioè $u'(x)\equiv 0 \quad \forall x\in[a,b]$. Poiché $u(a)=0$

$\Rightarrow u(x)\equiv 0 \quad \forall x\in[a,b]$. ■

abbreviato P-W

Prop. (Disug. di Poincaré-Wirtinger): $u\in \mathcal{C}^1([0,\pi])$ t.c. $u(0)=u(\pi)=0$.

Allora
$$\int_0^\pi u^2(x)\,dx \le \int_0^\pi u'^2(x)\,dx$$

con $=$ se e solo se $u(x) = c\sin x$, $c\in\mathbb{R}$.

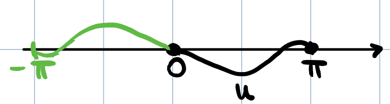
Nota: $u(x)=\sin x$, allora $\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi/2$ (integr. per parti)

$u'(x)=\cos x$

$$\int_0^\pi u'^2\,dx = \int_0^\pi (1-\sin^2 x)\,dx = \pi - \pi/2 = \pi/2 .$$ □

Oss. questa disug. ci serve nella discussione dell'es. $\inf_{u\in X} F_\lambda(u)$ sopra, ma sarà uno strumento di utilità cruciale per la discussione del prob. di Didone usando il teorema di Gauss-Green nel piano. Una sua generalizz. (cioè disug. di Poincaré-Wirtinger per funzioni 2π-periodiche) sarà cruciale per la ns. dimostrazione (proposta da Hurwitz) della disug. isoperimetrica usando il teorema di Gauss-Green nel piano. $\square$

Dim. Estendiamo u ad una funz. dispari definita anche in $[-\pi, 0[$ e poi la estendiamo ulteriorm. ad una funz. 2π-periodica su tutto $\mathbb{R}$.



Allora rimane def. una funzione $\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}$ su $\mathbb{R}$ grazie alle cond. al bordo.

Una tale funz. e la sua derivata hanno la serie di Fourier che converge in L^2: possiamo scrivere

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \qquad u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos(nx)$$

con $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x)\sin(nx)\,dx$. Dall'identità di Parseval si ha

$$\int_0^{\pi} u^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \qquad \int_0^{\pi} u'^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n^2 .$$

Confrontando i due integrali, ossia le due serie, si ottiene la disug. desiderata, e si ottiene $=$ se e solo $b_n = 0$ $\forall n \geq 2$ e quindi $u(x) = c\sin x$, $c \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

Per concludere questa lista di disug. funzionali vediamo il seg.

Corollario: Sia $u \in \mathcal{C}^1([0,L])$ t.c. $u(0) = u(L) = 0$. Allora

$$\int_0^L u^2(x)\,dx \leq \frac{L^2}{\pi^2}\int_0^L u'^2(x)\,dx$$

con $\frac{L^2}{\pi^2}$ la miglior costante possibile e $=$ se e soltanto se $u(x) = c\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$. Infatti, la disug. non sarebbe verificata con una costante più piccola da queste funzioni.

• ——— • ——— • ——— •

Ritorniamo al pbm. (P_λ) $\inf_{u\in X} F_\lambda(u)$ $\qquad F_\lambda(u) = \int_0^\pi (u'^2 - \lambda^2 u^2)\,dx$

$X = \{u \in C^1([0,\pi]) : u(0) = u(\pi) = 0\}$

$f(x,u,\xi) = f(u,\xi) = \xi^2 - \lambda^2 u^2$,

$f_\xi = 2\xi \qquad f_u = -2\lambda^2 u$

l'eq. di EE si scrive

$$u'' + \lambda^2 u = 0 \quad \text{in } [0,\pi].$$

a) L'eq. caratt. ass. all'eq. diff. (2° ordine omog. a coeff. costanti) è $z^2 + \lambda^2 = 0$, $z_{1/2} = \pm\lambda i$

L'integrale generale dell'eq. diff. è dato da

$$u(x) = c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

Imponendo le cond. al bordo si trova sempre la soluz. "banale", $u_0(x) \equiv 0$ in $[0,\pi]$,

Inoltre, se $\lambda = k$, $k \in \mathbb{Z}$, allora anche le funzioni

$$u_0(x) = c\sin\lambda x \qquad c \in \mathbb{R}$$

sono soluzioni; altrimenti c'è solo quella banale.

$\ni X$

b) Notiamo che

se $\lambda^2 \le 1$, allora

$$F_\lambda(u) = \int_0^\pi \left(u'^2 - \lambda^2 u^2\right)dx \geq \int_0^\pi \left(u'^2 - u^2\right)dx \geq 0 \quad \forall u \in X$$

$$-\lambda^2 \int_0^\pi u^2\,dx \geq -\int_0^\pi u^2\,dx \qquad \text{(disug. P–W)}$$

e quindi, $F_\lambda(u) \geq 0 \quad \forall u \in X$.

In particolare

se $\lambda^2 < 1$, $F_\lambda(u) \geq 0$ e $= 0 \iff u_0(x) \equiv 0$

$u_0 \equiv 0$ risulta l'unico pt. di minimo per F_λ in X. □

se $\lambda^2 = 1$, $F_\lambda(u) \geq 0$ e $= 0 \iff u_0(x) = c \sin x$, $c \in \mathbb{R}$

$u_0(x) = c\sin x$, $c \in \mathbb{R}$ sono tutti e soli i pt di minimo per F_λ in X. □

se $\lambda^2 > 1$, allora $\inf\limits_{u \in X} F_\lambda(u) = -\infty$.

Infatti, considerando $u_c(x) = c \sin x \in X$

$$F_\lambda(u_c) = c^2 \int_0^\pi \left[\cos^2 x - \lambda^2 \sin^2 x\right] dx = c^2 \frac{\pi}{2}(\underbrace{1-\lambda^2}_{<0}) \xrightarrow[c \to +\infty]{} -\infty.$$

■

Interpretazione fisica dell'eq. di Eulero-Lagrange (EE) e dell'integrale primo $\Phi(u,u') = \text{cost}$ in meccanica nella descrizione del moto di un pt. materiale in un campo conservativo.

$u \rightsquigarrow x$

$u : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $x : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^3$

Consideriamo un pt. materiale di massa m in moto in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ $(n=3)$ in presenza di un campo

$x \rightsquigarrow t$, $[a,b] \rightsquigarrow [t_1,t_2]$

$\underset{\in \mathbb{R}}{\xi} \rightsquigarrow \underset{\in \mathbb{R}^3}{v}$

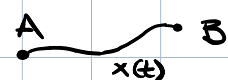
conservativo $E = -\nabla V : \Omega \to \mathbb{R}^3$ (V energia potenziale di classe $\mathcal{C}^1$) che genera una forza $F = qE$, q è una costante associata al pt. materiale.

Sia $x : [t_1, t_2] \to \Omega$, $x(t_1) = A$, $x(t_2) = B$ la legge del moto e siano

$$K = \frac{1}{2} m |\dot{x}(t)|^2 \quad \text{energia cinetica} \qquad |\dot{x}(t)|^2 = \dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \dot{x}_3^2(t)$$

$$\Pi = qV(x) \quad \text{energia potenziale}$$

del pt. materiale.



In meccanica, la lagrangiana del sistema

$$f(x,v) = \frac{1}{2} m |v|^2 - qV(x) = K - \Pi \qquad |v|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

e il cosidetto funzionale d'azione è

$$\mathcal{F}(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), \dot{x}(t))\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} |\dot{x}(t)|^2 - qV(x(t)) \right] dt .$$

Per il principio di minima azione, nel suo moto da A a B il punto descrive una traiettoria $t \longmapsto x(t)$ che minimizza il funzionale $\mathcal{F}$.

Otteniamo che $x_i \in \mathcal{C}^2$ $\forall i \in \{1,2,3\}$ e soddisfa l'eq. di Eulero-Lagrange

$$f_{v_i}(x,v) = m v_i \qquad f_{x_i} = -q \frac{\partial V}{\partial x_i}(x)$$

$$m \frac{d}{dt} \dot{x}_i(t) = -q \frac{\partial V}{\partial x_i}(x(t)) = qE_i \qquad i = 1,2,3$$

cioè $\qquad \underline{m\ddot{x} = qE(x)}$ $\qquad$ che è l'eq. del moto.
(cioè l'eq. di Eulero Lagrange dell'azione F è equiv. all'eq. di Newton).

Questo modo di procedere (Lagrange), in generale, nell'ottenere la legge del moto di un sistema come eq. di EL del funzionale con lagrangiana data dalla diff. tra l'energia cinetica e potenziale, va sotto il nome di "<u>meccanica lagrangiana</u>".

Se ora consideriamo

$$\mathcal{E}(x,v) = v \cdot f_v(x,v) - f(x,v) \qquad (= -\Phi(x,v))$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x,v) &= v \cdot mv - \frac{1}{2}m|v|^2 + qV(x)\\ &= m|v|^2 - \frac{1}{2}m|v|^2 + qV(x)\\ &= \frac{1}{2}m|v|^2 + qV(x),\end{aligned}$$

e quindi $\mathcal{E}(x(t),\dot{x}(t)) = \frac{1}{2}m|\dot{x}(t)|^2 + qV(x(t))$ è l'energia totale di un moto $x = x(t)$ e otteniamo che

$$\mathcal{E}(x(t),\dot{x}(t)) = \text{cost} \quad \text{su } [t_1,t_2]$$

lungo ogni estremale dell'integrale azione $F(x)$, i.e. l'energia totale è conservata lungo ogni soluzione $x(t)$ dell'eq. di Newton $m\ddot{x} = -qE(x)$. ∎

. ——— . ——— . ——— .

Prima di affrontare i pbm. classici (brachistocrona, superficie di rivoluzione di area minima) un metodo indiretto del CdV, in particolare usando l'integrale primo, vediamo brevemente (EE) per $F(u)=\int_a^b f(x,u,u')\,dx$ con $f(x,u,\xi)$ "completo" !!

CASO 4 : $f(x,u,\xi)$ (caso convesso)

Es. 1. $f(x,u,\xi)=\frac{\xi^2}{2}+g(x)u$. La funzione $g\in C^0([a,b])$ assegnata. ($a=0$, $b=1$)

Vogliamo studiare (P) $\inf_{u\in X} F(u)$, $F(u)=\int_0^1\left[\frac{1}{2}u'^2+g(x)u\right]dx$

$$X=\{u\in C^1([0,1]):u(0)=u(1)=0\}$$

oss. che $f(x,\cdot,\cdot)$ è strett. convessa in senso indebolito (f strett. convessa in ξ, e convessa in u per ogni $x\in[0,1]$ fissato) quindi un eventuale estremale di F è l'unico pt. di minimo assoluto per (P).

L'eq. di (EE) si scrive $\qquad f_\xi=\xi \quad f_u=g(x)$

$$u''(x)=g(x) \quad \text{su } [0,1].$$

Allora

$$u'(x)=\int_0^x g(s)\,ds+c_1 \quad \text{su } [0,1]$$

e infine

$$u(x)=\int_0^x\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)dt+c_1x+c_2 \quad , \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Se poniamo $\hat{g}(x)=\int_0^x\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)dt$, allora scriviamo

$$u(x)=\hat{g}(x)+c_1x+c_2 \, , \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Imponendo

$u(0)=u(1)=0$ si ottiene $c_2=0$ poiché $\hat{g}(0)=0$ e

$c_1 = -\hat{g}(1)$; quindi l'unica soluzione del pbm. di minimo (P) è $\underline{u(x) = \hat{g}(x) - \hat{g}(1)\,x}$, $x \in [0,1]$. □

Es. Studiare il pbm. di minimo $\inf_{u \in X} F(u)$, $F(u) = \int_{-1}^{1} \left[\frac{u'^2}{2} + g(x)u\right] dx$

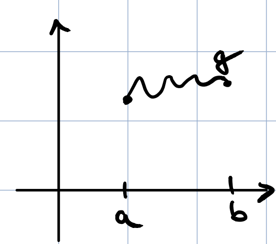
$X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = u(1) = 0\}$

$g(x) = -x + 1$; $g(x) = \sin x + 1$. ■

Es. 2 Data $g \in \mathcal{C}^0([a,b])$

consid. il funzionale

$$F(u) = \int_a^b u'^2\,dx + \int_a^b (u(x) - g(x))^2\,dx$$



$\inf_{u \in X} F(u)$: utilità applicativa : g è un segnale "sporco" ricevuto e vogliamo "ripulirlo".

Minimizzando F in X punto a sostituire g con una funzione u (il pt. di minimo) che deve essere

- abbastanza poco oscillante (altrimenti "pago" molto in derivata)
- abbastanza vicina a g (" molto la distanza).

Corollario pag. 63

Sia $u \in \mathcal{C}^1([0,L])$ t.c. $u(0)=u(L)=0$. Poniamo $\tilde{u}(s)=u\left(\frac{L}{\pi}s\right)$ $s\in[0,\pi]$

Allora $\tilde{u}(0)=\tilde{u}(\pi)=0$. Allora

$$\int_0^L u^2(x)\,dx \underset{x=\frac{L}{\pi}s}{=} \int_0^\pi u^2\left(\frac{L}{\pi}s\right)\frac{L}{\pi}ds = \frac{L}{\pi}\int_0^\pi \tilde{u}^2(s)\,ds \underset{\text{disug. di Poincaré-Wirtinger}}{\leq} \frac{L}{\pi}\int_0^\pi \tilde{u}'^2(s)\,ds =$$

con = se e solo se $\tilde{u}(s)=c\sin s$

$$= \frac{L}{\pi}\int_0^\pi \frac{L^2}{\pi^2}u'^2\left(\frac{L}{\pi}s\right)ds = \frac{L^2}{\pi^2}\int_0^L u'^2(x)\,dx$$

ossia $\int_0^L u^2\,dx \leq \frac{L^2}{\pi^2}\int_0^L u'^2\,dx$ con = se e solo se $u\left(\frac{L}{\pi}s\right)=c\sin s$,

ossia $u(x)=c\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$. ■

Es. pag. 69

d) $f(x,u,\xi)=\frac{\xi^2}{2}+g(x)u$ con $g(x)=-x+1$

L'(EE) si scrive

$$u''=g(x) \quad \text{su } [-1,1]$$

ossia

$$u''=-x+1 \quad \text{su } [-1,1]$$

e quindi

$$u'(x)=-\frac{x^2}{2}+x+c_1, \quad \text{ossia} \quad u(x)=-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+c_1x+c_2$$
$c_1,c_2\in\mathbb{R}$,

sono gli estremali di $\mathcal{F}$.

Imponendo $u(-1)=u(1)=0$ si ha $\begin{cases} \frac{1}{6}+\frac{1}{2}-c_1+c_2=0 \\ -\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+c_1+c_2=0 \end{cases}$

e quindi $c_2 = -\frac{1}{2}$, $c_1 = \frac{1}{6}$.

Risulta che $\underline{u_0(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}}$ è l'unico pt. di min. di F in X. □

b) $f(x,u,\xi) = \frac{\xi^2}{2} + g(x)u$ con $g(x) = \sin x + 1$

L'eq. di (EE) si scrive

$$u'' = g(x) \quad \text{su } [-1,1]$$

ossia $u'' = \sin x + 1$ su $[-1,1]$. Da questo segue

$$u'(x) = -\cos x + x + c_1 ,$$

ossia $u(x) = -\sin x + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

sono gli estremali di F.

Imponendo $u(-1) = u(1) = 0$ si ha $\begin{cases} \sin 1 + \frac{1}{2} - c_1 + c_2 = 0 \\ -\sin 1 + \frac{1}{2} + c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$

e quindi $c_2 = -\frac{1}{2}$, $c_1 = \sin 1$

Risulta che $u_0(x) = -\sin x + \frac{x^2}{2} + (\sin 1)x - \frac{1}{2}$ è l'unico pt. di minimo di F in X. ■