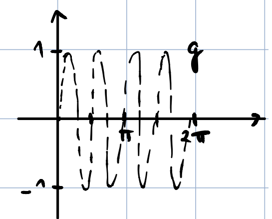
9Lez. 18/03 (registrata 18/03)



Pbm. $F(u) = \int_0^{2\pi} u'^2\,dx + \int_0^{2\pi} (u(x)-g(x))^2\,dx$ $\quad g(x)=\sin 4x$ su $[0,2\pi]$

Studiare

$\inf_{u\in X} F(u)$, $\quad X = \{u \in C^1([0,2\pi]) : u(0)=u(2\pi)=0\}$.

Oss. $f(x,u,\xi) = \xi^2 + (u-g(x))^2$ stretta convessa. $\quad f_\xi = 2\xi \quad f_u = 2(u-g(x))$

Quindi (EE) diventa allora $\frac{d}{dx}[2u'] = 2(u(x)-g(x))$

$$u'' = u - g(x) \quad \text{su } [0,2\pi]$$

$\Longleftrightarrow$ $\underline{u'' - u = -g \quad \text{su } [0,2\pi]}$ Eq. diff. ord. lin. 2° ordine coeff. cost. completa.

Scriviamo $z^2 - 1 = 0$ eq. caratt. ass. a $\underline{u''-u=0}$; $z_{1/2} = \pm 1$

Sapp. $u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + \bar{u}(x)$, dove $\bar{u}(x)$ è una soluz. particolare dell'eq. diff. completa.

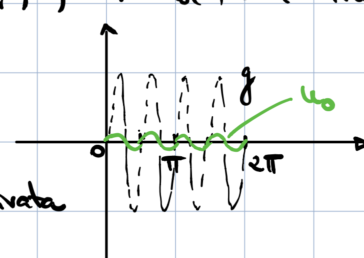
Cerchiamo una soluz. particolare $\bar{u}(x) = a\sin 4x + b\cos 4x$ dell'eq. compl. Imponendo che $\bar{u}(x)$ sia sol. di $u''-u = -\sin 4x$ su $[0,2\pi]$ si ottiene $\bar{u}(x) = \frac{1}{17}\sin 4x$. Quindi tutte le poss. soluz. dell'(EE) sono

$$u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{17}\sin 4x .$$

$u(x) \in X$ se e solo $\left.\begin{array}{l} u(0)=0, \text{ cioè } 0 = c_1 + c_2 \\ u(2\pi)=0, \text{ cioè } 0 = c_1 e^{-2\pi} + c_2 e^{2\pi} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow c_1 = c_2 = 0.$

Quindi l'unico estremale in X per F è $u_0(x) = \frac{1}{17}\sin 4x$.

Quindi per la stretta convessità di $f(x,\cdot,\cdot) \Rightarrow u_0(x)$ è l'unico pt. di minimo per F in X.



Oss. • $u(x)\equiv 0 \in X$ "paga" nulla in derivata

$$F(0) = \int_0^{2\pi} g^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 4x\,dx = \boxed{\pi}$$

- $u(x) = g(x) \in X$ "pago" nulla nella distanza da g, ma solo in deriv.

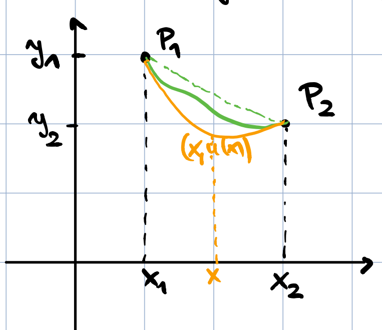
$$F(g) = \int_0^{2\pi} \underbrace{16\cos^2 4x}_{u'^2}\,dx = \boxed{16\pi}$$

- $F(u_0) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{17^2}\cdot 16\cos^2 4x\,dx + \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{17}\sin 4x - \sin 4x\right)^2 dx =$

$$= \frac{16}{17^2}\cdot\pi + \frac{16^2}{17^2}\int_0^{2\pi}\sin^2 4x\,dx = \frac{16}{17}\pi < \pi = F(0).$$

BRACHISTÓCRONA (pbm. della più rapida discesa)

(1967 Johann & Jakob Bernoulli) - Newton.



Dati due pt. $P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_2)$ nel piano con $x_1<x$, $y_1>y_2$, vogliamo det. quale sia la curva che collega P_1 a P_2, lungo la quale un pt. materiale soggetto alla sola forza di gravità discende da P_1 a P_2 nel minor tempo possibile.

Consid. quindi una curva da P_1 a P_2 su cui si muove il pt. materiale $P(t)=(x(t),y(t))$ di massa m e sia

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) = u(x(t)) \end{cases}$$

(la posizione del pt. materiale all'istante t / legge oraria del moto del pto)

dove supp. che la curva di discesa sia descritta da una funzione

nell'insieme X delle funz. $\mathcal{C}^1(]x_1,x_2[)\cap\mathcal{C}^0([x_1,x_1])$ t.c.
$u(x_1)=y_1$, $u(x_2)=y_2$, con $u(x)\le y_1$ $\forall x\in[x_1,x_2]$.
Supp. che il tempo $t=0$ corrisp. alla posizione iniziale P_1 .
Lo spazio percorso fino all'istante t è

$$s=s(t)=\int_0^{x(t)}\sqrt{1+u'^2(x)}\,dx\,.$$

s = ascissa curvilinea

Pertanto la velocità (scalare) è

$$v(t)=\frac{ds}{dt}=\sqrt{1+u'^2(x(t))}\cdot x'(t)\,,$$

da cui si ricava

$$x'(t)=\frac{v(t)}{\sqrt{1+u'^2(x(t))}} \qquad \text{(B1)}$$

Se m è la massa del pt. e $v_0=v(0)$ la velocità iniziale, allora per la legge di conservazione dell'energia (supp. che non ci siano forze dissipative)

$$\underbrace{\frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2}_{\text{energia cinetica}}+\underbrace{\cancel{m}gy_1}_{\text{e potenziale}}=\frac{1}{2}\cancel{m}v^2(t)+\cancel{m}g\,y(t)\,,$$

g = l'accelerazione gravit. supp. costante

da cui, tenendo conto che $y(t)=u(x(t))$

$$v^2(t)=v_0^2+2gy_1-2g\,u(x(t))$$

ossia

$$v^2(t)=2g\Big[\overbrace{\frac{v_0^2}{2g}+y_1}^{H}-u(x(t))\Big]$$

ossia

$$v^2(t)=2g\big[H-u(x(t))\big] \qquad H=\frac{v_0^2}{2g}+y_1 \quad (\ge u(x(t)))$$

Sostituiamo nella (B1) e otteniamo

$$x'(t) = \frac{\sqrt{2g\,(H-u(x(t)))}}{\sqrt{1+u'^2(x(t))}} \qquad (x'(t)>0 \quad \forall t>0)$$

Possiamo assumere che la funzione $x(t)$ sia invertibile; e per la funzione inversa $t(x)$ abbiamo che

$$t'(x) = \left.\frac{1}{x'(t)}\right|_{t\,:\,x(t)=x} = \frac{\sqrt{1+u'^2(x)}}{\sqrt{2g\,(H-u(x))}}$$

Il tempo impiegato per percorrere l'arco fra P_1 e P_2 si ottiene ora per integrazione:

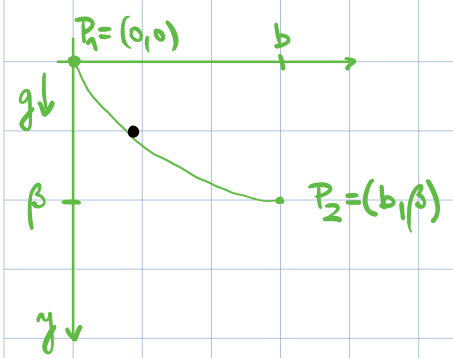
$$\int_{x_1}^{x_2} t'(x)\,dx \rightsquigarrow T(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+u'^2(x)}}{\sqrt{H-u(x)}}\,dx \qquad (B2)$$

$$t(x_2)-t(x_1)$$

NOTA:
- Conviene traslare il pt. P_1 nell'origine che diventa $(0,0)$
- supporre la velocità iniziale v_0 (in P_1) uguale a 0

$\Rightarrow$ $H=0$

- invertiamo l'orientazione dell'asse delle ordinate



Troviamo così il pblm. (P2) discusso nella lez 1:

$$(P2) \quad \inf\left\{ T(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^b \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\,dx \;:\; u\in X\right\}$$

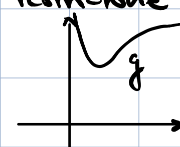
$$X = \left\{ u \in \mathcal{C}^0([0,b]) \cap \mathcal{C}^1(]0,b[) : u(0)=0,\ u(b)=\beta,\ u(x)>0 \text{ in }]0,b] \right\}.$$

Risolvere il pbm. di minimo cercando le soluzioni dell'integrale primo

$$\Phi(u,u') = f(u,u') - u' f_{\xi}(u,u') = c \qquad \text{su } [0,b]$$

(ricordo che se si cercano soluzioni di tale eq. che non siano cost. a tratti, ossia gli $x \in [0,b]$ t.c. $u'(x)=0$ sono pt. isolati, allora queste soluzioni sono le stesse dell'eq. di (EE)).

OSS. $f(u,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+\xi^2}{u}}$ non è convessa (basta consid. la restrizione di $f(u,\xi)$ alla retta $u=\xi$: $g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+\xi^2}{\xi}}$ su $]0,+\infty[$



)

quindi, risolvendo l'eq. dell'integrale primo (troveremo che l'unica soluz. è l'arco di cicloide con cuspide in $x=0$ che unisce l'origine al pt. (b,β)), non avendo la convessità della fnz. lagrang. non siamo legittimati a dire che questa soluzione è un pt. di minimo!

Ma ricorriamo al seg. trucco: poniamo $u(x) = \frac{v^2(x)}{2}$.

Allora $u'(x) = v(x)\,v'(x)$ e il funzionale ns. diventa equiv. a

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1+v^2 v'^2}{\frac{v^2}{2}}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1}{v^2} + v'^2}\, dx .$$

Ora la funz. integranda $(v,z) \longmapsto \sqrt{\frac{1}{v^2} + z^2}$ è strett. convessa (matrice hessiana definita positiva!!). E quindi il pbm. della brachistocrona si riduce a un pbm. di minimo convesso. Le cicloidi che risolvono l'eq. dell'integrale primo per il funz. originale corrispondono, attraverso il cambio di variabili scritto sopra, a soluzioni del nuovo pbm. di minimo convesso! $\square$

Nulla cambia nelle soluzioni del pbm. di minimo se consideriamo da ora in poi la funz. lagrangiana

$$f(u,\xi) = \sqrt{\frac{1+\xi^2}{u}}$$

Quindi, in questo caso l'eq. $c = \Phi(u,u') = f(u,u') - u' f_\xi(u,u')$ si scrive

$$\sqrt{\frac{1+u'^2}{u}} - u' \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}\sqrt{u}} = c \qquad f_\xi = \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}\sqrt{u}}$$

ossia

$$\frac{1+\cancel{u'^2} - \cancel{u'^2}}{\sqrt{u}\sqrt{1+u'^2}} = c \qquad (c>0)$$

da cui

$$(*) \quad \boxed{u(1+u'^2) = \frac{1}{c^2}} \qquad (F(u,u')=0)$$

Vogliamo trovare una parametrizzazione del grafico di u nella forma

$$\begin{cases} x = x(\tau) \\ y = y(\tau) = u(x(\tau)) \end{cases}$$

Possiamo scrivere $u(x(\tau)) = k(1-\cos\tau)$, dove k denota una costante opportuna. Allora

$$[u(x(\tau))]' = u'(x(\tau))\,x'(\tau) = k \sin\tau$$

$$\Rightarrow \quad u'(x(\tau)) = \frac{k\sin\tau}{x'(\tau)}$$

Allora l'eq. $(*)$ diventa

$$c^2\, k(1-\cos\tau)\left(1 + \frac{k^2 \sin^2\tau}{x'^2(\tau)}\right) = 1$$

e scegliendo $c^2 k = \frac{1}{2}$ si ottiene

$$\frac{1}{2}(1-\cos\tau)\left(1+\frac{k^2\sin^2\tau}{x'^2(\tau)}\right)=1$$

e quindi

$$\frac{k^2\sin^2\tau}{x'^2(\tau)}=\frac{1+\cos\tau}{1-\cos\tau}$$

e quindi

$$\frac{x'^2(\tau)}{k^2\sin^2\tau}=\frac{(1-\cos\tau)^2}{1-\cos^2\tau}$$

da cui

$$x'(\tau)=k(1-\cos\tau)$$

ossia

$$x(\tau)=k(\tau-\sin\tau)$$

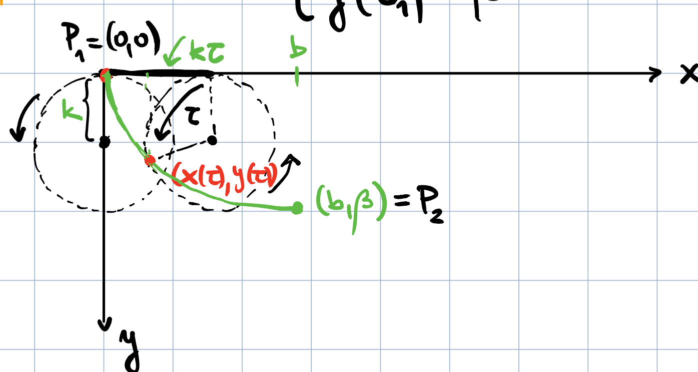
Quindi, la soluzione di $(*)$ risulta essere una cicloide con cuspide in $(0,0)$ tracciata da un punto sulla circonferenza di un cerchio di raggio k che rotola lungo l'asse x "da sotto", che in forma parametrica è

$$(**)\quad\begin{cases} x(\tau)=k(\tau-\sin\tau) \\ y(\tau)=u(x(\tau))=k(1-\cos\tau)\end{cases}\qquad \tau\in[0,\tau_1]$$

dove le costanti k e τ_1 sono determinate dalle condizioni

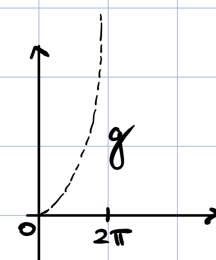
$$\begin{cases} x(\tau_1)=b \\ y(\tau_1)=\beta\end{cases}$$

(vedi oss. 2 sotto!)



OSS1: la funzione $x(\tau)=k(\tau-\sin\tau)$, $0\le\tau\le 2\pi$ soddisfa $x'(\tau)=k(1-\cos\tau)>0$ per $0<\tau<2\pi$. Quindi $x(\tau)$ è strett. crescente, quindi $\exists$ inversa $\tau=\tau(x)$ continua su $[0,2\pi k]$ e regolare su $]0,2\pi k[$, e quindi possiamo scrivere (**) in forma non-parametrica $y=y(\tau(x))=u(x)=k(1-\cos(\tau(x)))$. $\square$

OSS2: Per $\tau>0$ consideriamo il rapporto $g(\tau)=\dfrac{x(\tau)}{y(\tau)}=\dfrac{\tau-\sin\tau}{1-\cos\tau}$. Allora



$$\lim_{\tau\to 0^+} g(\tau)=\lim_{\tau\to 0^+}\frac{\frac{\tau^3}{3!}+o(\tau^3)}{\frac{\tau^2}{2}+o(\tau^2)}=0\,;$$

$$\lim_{\tau\to 2\pi^-} g(\tau)=+\infty\,.$$

Inoltre $g'(\tau)=\dfrac{2(1-\cos\tau)-\tau\sin\tau}{(1-\cos\tau)^2}$; $g'(\pi)=1>0$ e

$\forall\,\tau\neq\pi$ si ottiene $g'(\tau)=\dfrac{\cos\frac{\tau}{2}}{\sin^3\frac{\tau}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}-\frac{\tau}{2}\right)>0$ $\tau\in\,]0,2\pi[\,\setminus\{\pi\}$

Allora $g(\tau)$ è positiva, strettamente crescente da 0 a $+\infty$ su $[0,2\pi[$. Dalla continuità di g segue quindi che g assume ogni valore positivo esattamente una volta! In particolare, $\exists!\ \tau_1\in\,]0,2\pi[\ :\ \dfrac{x(\tau_1)}{y(\tau_1)}=\dfrac{b}{\beta}$, e per tale τ_1, scegliendo $k=\dfrac{b}{\tau_1-\sin\tau_1}$ (e per tale k la costante c t.c. $kc^2=\frac{1}{2}$) abbiamo garan=

tito l'esistenza di una (unica) cicloide congiungente $P_1 =$ $(0,0)$ a $(b,\beta) = P_2$. $\square$

OSS. 3 • Il tempo di percorrenza del pt. materiale lungo l'arco di cicloide da P_1 a P_2 si calcola facilm. e si trova
$$\boxed{T_{min} = \tau_1 \sqrt{\frac{k}{g}}}\,.$$

Oss. che $u(x(\tau)) = k(1-\cos\tau)$ $\quad x(\tau) = k(\tau - \sin\tau)$.

Otteniamo $\quad u'(x(\tau)) = \dfrac{k\sin\tau}{x'(\tau)} = \dfrac{\cancel{k}\sin\tau}{\cancel{k}(1-\cos\tau)}$. Quindi

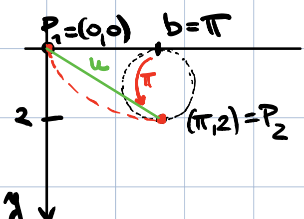
$$T_{min} = T(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\tau_1} \sqrt{\frac{1+u'(x(\tau))^2}{u(x(\tau))}}\, x'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\tau_1} \sqrt{\frac{1+\frac{\sin^2\tau}{(1-\cos\tau)^2}}{k(1-\cos\tau)}} \cdot k(1-\cos\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2g}} \int_0^{\tau_1} \sqrt{\frac{(1-\cos\tau)^2+\sin^2\tau}{(1-\cos\tau)^3}}\,(1-\cos\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{\sqrt{k}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,g} \int_0^{\tau_1} d\tau = \tau_1 \sqrt{\frac{k}{g}}\,. \qquad \square$$

•• Un caso particol. semplice è quello in cui $b = \pi$ e $\beta = 2$



In questo caso $k(\tau_1 - \sin\tau_1) = \pi \quad (=b)$

$k(1-\cos\tau_1) = 2 \quad (=\beta)$

$\Rightarrow \tau_1 = \pi \,, \quad k = 1$

Allora $T_{min} = \dfrac{\pi}{\sqrt{g}}$.

Notiamo anche che se $u(x) = \frac{2}{\pi}x \,, \quad 0 \le x \le \pi$

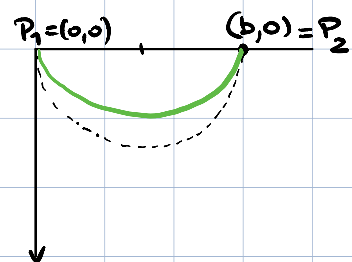
retta passante per P_1 e P_2.

$$T_{retta} = T(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\frac{4}{\pi^2}}{\frac{2}{\pi}x}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{\frac{\pi^2+4}{\pi^2}}}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\sqrt{\pi^2+4}}{\sqrt{\pi}} \left[x^{1/2}\right]_0^\pi = \sqrt{\frac{\pi^2+4}{g}}$$

Risulta ovviamente $T_{retta} > T_{min}$. □

...



Avendo $\beta = 0$ si trova

$\tau_1 = 2\pi \qquad k = \dfrac{b}{2\pi}$

$$\Rightarrow T_{min} = 2\pi \sqrt{\frac{b}{2\pi g}}$$

Se invece si considera $u(x) = \sqrt{bx - x^2}$ eq. semi-circonferenza congiungente P_1 e P_2, e si calcola $T_{semicirconf} = T(u) > T_{min}$. □

OSS.4. L'intervallo di tempo impiegato dal pt. materiale per raggiungere l'estremo inferiore dell'arco di cicloide è sempre il medesimo, indipendentemente dal pt. da cui viene abbandonato a se stesso dalla quiete. Questo fenomeno prende il nome di tautocrónia, ossia la cicloide è una curva tautocróna. ■