

INDICE delle Note delle lezioni

a.a. 2019/2020

... un corso introduttivo al Calcolo delle Variazioni

- Metodi indiretti e pblm. classici
- Metodi diretti e primi risultati del CdV moderno

Introduzione al Calcolo delle Variazioni

Pblm. di minimo / "metodo indiretto" in \mathbb{R} / "metodo diretto in \mathbb{R}^n " 1

Teorema di Weierstrass generalizzato 2

Funzionali integrali e spazio delle funzioni ammissibili; pblm. di min. 3

Pblm. classici (curva di minima lunghezza, brachistocrona, superficie di rivoluzione di area minima, pblm. di Didone, pblm. iso perimetrico) 4

Un funzionale prius di minimo: a) esempio di Weierstrass 9

b) un altro esempio 11

Metodo indiretto - metodo indiretto / cenno storico 13

Variazione prima / seconda in \mathbb{R}^n ; ottimizzazione in \mathbb{R}^n 14

Variazione prima per funzionali integrali. Esempi 17

Il problema standard del CdV e l'eq. di Euler-Lagrange

Il Lemma fondamentale del CdV 19

L'eq. di Euler-Lagrange debole (ED). Estremale debole

L'eq. di Euler-Lagrange (EE). Estremale. Varie osservazioni 22

Non-regolarità C^2 di estremali deboli 26

Paradosso di Euler (\exists di un minimizzante C^1). Minimi C^1_{betti} 26

Cond. suff. di ottimalità : convessità / stretta convessità ed unicità	31
Funzioni convesse in \mathbb{R}^n ; caratterizzazioni; disug. di Jensen	31
Stretta convessità "ideale" e l'unicità del pt. di minimo	36
L'eq. di Eulero - Lagrange (EE).	38
L'eq. di Eulero - Lagrange (EE)' nel caso autonomo. Integrale primo	40
Casi particolari dell' eq. di Eulero - Lagrange (gli estremali elencati)	
Caso 1 : $f(x, u, \dot{x}) = f(\dot{x})$	42
Caso 1.a : f strett. convessa	43
Caso 1.b : f convessa	44
Caso 1.c : f non convessa (paradosso di Euler)	46
Lemma trivial	50
Caso 2 : $f(x, u, \dot{x}) = f(x, \dot{x})$	52
Es. di Weierstrass	53
Caso 3 : $f(x, u, \dot{x}) = f(u, \dot{x})$	55
Caso 3.a : f convessa	56
Caso 3.b : f non convessa	58
La diseguaglianza di Poincaré	61
La diseguaglianza di Poincaré - Wirtinger	62
Interpret. fisica dell' integrale primo per funzionali con lagrangiana non dipendente esplicit. da x	65
Caso 4 : $f(x, u, \dot{x})$ contessa	68
Il pbm. della brachistocrona (cicloide)	73
Il pbm. della superficie di rotazione di area minima (catenaria)	83
Minimizzazione con un solo estremo fissato/estremi liberi/estremi periodici	86

Problemi variazionali vincolati

Vincoli isoperimetrici. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange	95
Il pbm. della catenaria (del filo pesante)	99
La catenaria nell'architettura	104
Il teorema delle funzioni implicite (Dini)	105
Il pbm. di Didone (usando i moltiplicatori di Lagrange)	106
Teorema di Green nel piano	108
Il pbm. di Didone (usando il teorema di Green nel piano e la diseguaglianza di Poincaré-Wirtinger)	109
Il caso generale	111
La diseguaglianza di Poincaré-Wirtinger per funz. 2π -period.	112
La diseguaglianza isoperimetrica nel piano	112

L'equazione di Euler-Lagrange: la sorpresa!

Il lemma di DuBois-Reymond	116
Un suo corollario fondamentale	118
L'eq. di Euler-Lagrange per f e u di classe C^1 . L'eq. di Euler-Lagrange in forma integrale	119
Regolarità degli estremali definiti: il ruolo della convessità	120
Il procedimento del "bootstrap"	123

Estremali spezzati (minimi C^1 tratti)

La prima e seconda condizione di Erdmann-Weierstrass	125
Il paradosso di Euler (il doppio pozzo)	126

Un altro esempio di pt. di minimo in C^1
tratti.

130

Minimi relativi (locali) deboli e forti

Definizioni. Pt. di minimo forte \Rightarrow pt. di minimo deb.

135

\Leftarrow Esempio 1 ed Esempio di Scheffer

136

la variazione seconda per funzionali integrali

140

Condizioni del second'ordine

Proposizione base

141

La sola positività di $\delta^2 F(u, \cdot)$ non è una cond. sufficiente

142

La condizione nec. di Legendre

146

La funzione d'eccesso di Weierstrass

153

La condizione nec. di Weierstrass

154

Minimizzanti relativi deboli e la teoria di Jacobi

Lagrangevina accessoria e integrale accessorio

159

Eq. (accessoria) di Jacobi. Campi di Jacobi

160

Lemma di Legendre

162

Lemma di Jacobi

165

Teorema 1: La cond. di Legendre si detta e l'assenza di un campo

di Jacobi positivo come cond. suff. per pt. di min. debole

166

Punti coniugati. Def. e proprietà

168

Teorema di Jacobi (cond. nec. e suff.)

170

Esempi/esercizi

172

Minimizzanti relativi forti e la teoria dei campi di Weierstrass

Calibrazione	180
Campo di estremali . La funzione pendenza	181
Esempi	182
Eq. di Euler (modificata) per il campo	184
Eq. di Gerthéodory	187
L'integrale invariante di Hilbert	187
Teorema 1: la positività della funzione d'accesso di Weierstrasse e la minimalità di un estremale immerso in un campo	190
Le condizioni forti di Weierstrass	190
Campo di Weierstrass	193
Cond. suff. affinché un estremale immerso in un campo di estremali sia pt. di min. relativo debole (nsp. forte)	194
Cond. suff. affinché un estremale sia un pt. di minimo tel. forte mediante i punti coniugati e la teoria dei campi	196
Esempi/esercizi	197

Metodi diretti

Introduzione	205
Teorema di Weierstrass	208
I ^a variante del teorema di Weierstrass	209
II ^a variante del teorema di Weierstrass	210
Funzione (seq.) semicontinua inferiormente	211
Caratterizzazioni	212

Funzione (seq.) coercitiva	212
Teorema di Tonelli (Weierstrass generalizzato)	213
Es.1. $\mathcal{F}(u) = \int_a^b [u^2 - 2gu] dx$, $g \in L^2(0,1)$	216
Lo spazio $L^2(a,b)$: convergenza forte / debole	218
Risultati principali	218
• Applicazione del metodo diretto a $\mathcal{F}(u)$ su $L^2(a,b)$ rispetto alla convergenza forte	220
• Applicazione del metodo diretto a $\mathcal{F}(u)$ su $L^2(a,b)$ rispetto alla convergenza debole	221
Es.2. $\mathcal{F}(u) = \int_a^b [u'^2 + gu] dx$, $g \in L^2(a,b)$	223
Road map del metodo diretto	224
Funzioni assolut. continue $AC([a,b])$: due def. a confronto e varie osservazioni	228
Lo spazio $H_0^1(a,b)$	231
• Applicazione del metodo diretto a $\mathcal{F}(u)$ su su $H_0^1(a,b)$ dotato di una "naturale" convergenza	231
Un risultato di esistenza di minimo per $\mathcal{F}(u) = \int_a^b [f(u') + gu] dx$ su $H_0^1(a,b)$	233
Un risultato di esistenza / regolarità e eq. di Euler-Lagrange per un funzionale più generale	234