

## INDICE delle Note delle lezioni

a.a. 2019/2020

... un corso introduttivo al Calcolo delle Variazioni

- Metodi indiretti e pblm. classici
- Metodi diretti e primi risultati del CdV moderno

### Introduzione al Calcolo delle Variazioni

Pblm. di minimo / "metodo indiretto" in $\mathbb{R}$ / "metodo diretto" in $\mathbb{R}^n$	1
Teorema di Weierstrass generalizzato	2
Funzionali integrali e spazio delle funzioni ammissibili; pblm. di min.	3
Pblm. classici (curva di minima lunghezza, brachistocrona, superficie di rivoluzione di area minima, pblm. di Didone, pblm. iso perimetrico)	4
Un funzionale privo di minimo: a) esempio di Weierstrass	9
b) un altro esempio	11
Metodo indiretto - metodo diretto / cenno storico	13
Variazione prima / seconda in $\mathbb{R}^n$ ; ottimizzazione in $\mathbb{R}^n$	14
Variazione prima per funzionali integrali. Esempi	17

### Il problema standard del CdV e l'eq. di Eulero-Lagrange

Il Lemma fondamentale del CdV	19
L'eq. di Eulero-Lagrange debole (EED). Estremale debole	
L'eq. di Eulero-Lagrange (EE). Estremale. Varie osservazioni	22
Non-regolarità $\mathcal{C}^2$ di estremali deboli	26
Paradosso di Eulero ( $\nexists$ di un minimizzante $\mathcal{C}^1$ ). Minimi $\mathcal{C}^1$ tutti	26

Cond. suff. di ottimalità : convessità / stretta convessità ed unicità	31
Funzioni convesse in $\mathbb{R}^n$ ; caratterizzazioni; disug. di Jensen	31
Stretta convessità "idolatrica" e l'unicità del pt. di minimo	36
L'eq. di Eulero-Lagrange (EE)'	38
L'eq. di Eulero-Lagrange (EE)' nel caso autonomo. Integrale primo	40
Casi particolari dell'eq. di Eulero-Lagrange (gli estremali e loro natura)	
Caso 1 : $f(x, u, \xi) = f(\xi)$	42
Caso 1.a : $f$ stretta convessa	43
Caso 1.b : $f$ convessa	44
Caso 1.c : $f$ non convessa (paradosso di Eulero)	46
Lemma trivial	50
Caso 2 : $f(x, u, \xi) = f(x, \xi)$	52
Es. di Weierstrass	53
Caso 3 : $f(x, u, \xi) = f(u, \xi)$	55
Caso 3.a : $f$ convessa	56
Caso 3.b : $f$ non convessa	58
La disuguaglianza di Poincaré	61
La disuguaglianza di Poincaré - Wirtinger	62
Interpret. fisica dell'integrale primo per funzionali con lagrangiana non dipendente esplicit. da $x$	65
Caso 4 : $f(x, u, \xi)$ convessa	68
Il pblm. della brachistocrona (cicloide)	73
Il pblm. della superficie di rotazione di area minima (catenaria)	83
Minimizzazione con un solo estremo fissato / estremi liberi / estremi periodici	86

## Problemi variazionali vincolati

Vincoli isoperimetrici. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange	95
Il pbm. della catenaria (del filo pesante)	99
La catenaria nell'architettura	104
Il teorema delle funzioni implicite (Dini)	105
Il pbm. di Didone (usando i moltiplicatori di Lagrange)	106
Teorema di Green nel piano	108
Il pbm. di Didone (usando il teorema di Green nel piano e la disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger)	109
Il caso generale	111
La disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger per funz. $2\pi$ -period.	112
La disuguaglianza isoperimetrica nel piano	112

## L'equazione di Eulero-Lagrange: la sorpresa!

Il lemma di Du Bois-Reymond	116
Un suo corollario fondamentale	118
L'eq. di Eulero-Lagrange per $f$ e $u$ di classe $C^1$ . L'eq. di Eulero-Lagrange in forma integrale	119
Regolarità degli estremali deboli: il ruolo della convessità	120
Il procedimento del "bootstrap"	123

## Estremali spezzati (minimi $C^1_{\text{tutti}}$ )

La prima e seconda condizione di Erdmann-Weierstrass	125
Il paradosso di Eulero (il doppio pozzo)	126

Un altro esempio di pt. di minimo in $C^1_{\text{tutti}}$	130
<u>Minimi relativi (locali) deboli e forti</u>	
Definizioni. Pt. di minimo forte $\Rightarrow$ pt. di minimo deb.	135
← Esempio 1 ed Esempio di Scheffer	136
la variazione seconda per funzionali integrali	140
<u>Condizioni del second'ordine</u>	
Proposizione base	141
La sda positività di $\delta^2 F(u, \cdot)$ non è una cond. sufficiente	142
La condizione nec. di Legendre	146
La funzione d'eccesso di Weierstrass	153
La condizione nec. di Weierstrass	154
<u>Minimizzanti relativi deboli e la teoria di Jacobi</u>	
Lagrangiana accessoria e integrale accessorio	159
Eq. (accessoria) di Jacobi. Campi di Jacobi	160
Lemma di Legendre	162
Lemma di Jacobi	165
Teorema 1: la cond. di Legendre stretta e l'esistenza di un campo di Jacobi positivo come cond. suff. per pt. di min. deb.	166
Punti coniugati, Def. e proprietà	168
Teorema di Jacobi (Cond. nec. e suff.)	170
Esempi/esercizi	172

## Minimizzanti relativi forti e la teoria dei campi di Weierstrass

Calibrazione	180
Campo di estremali. La funzione pendenza	181
Esempi	182
Eq. di Eulero (modificate) per il campo	184
Eq. di Carathéodory	187
L'integrale invariante di Hilbert	187
Teorema 1: la positività della funzione d'eccesso di Weierstrass e la minimalità di un estremo immerso in un campo	190
Le condizioni forti di Weierstrass	190
Campo di Weierstrass	193
Cond. suff. affinché un estremo immerso in un campo di estremali sia pt. di min. relativo debole (nsp. forte)	194
Cond. suff. affinché un estremo sia un pt. di minimo rel. forte mediante i punti coniugati e la teoria dei campi	196
Esempi/esercizi	197

## Metodi diretti

Introduzione	205
Teorema di Weierstrass	208
I <sup>a</sup> variante del teorema di Weierstrass	209
II <sup>a</sup> variante del teorema di Weierstrass	210
Funzione (seq.) semicontinua inferiormente	211
Caratterizzazioni	212

Funzione (seq.) coercitiva	212
Teorema di Tonelli (Weierstrass generalizzato)	213
Es.1. $F(u) = \int_0^1 [u^2 - 2gu] dx$ , $g \in L^2(0,1)$	216
Lo spazio $L^2(a,b)$ : convergenza forte/debole	218
Risultati principali	218
• Applicazione del metodo diretto a $F(u)$ su $L^2(a,b)$ rispetto alla convergenza forte	220
• Applicazione del metodo diretto a $F(u)$ su $L^2(a,b)$ rispetto alla convergenza debole	221
Es.2. $F(u) = \int_a^b [u'^2 + gu] dx$ , $g \in L^2(a,b)$	223
Road map del metodo diretto	224
Funzioni assolat. continue $AC([a,b])$ : due def. a confronto e varie osservazioni	228
Lo spazio $H_0^1(a,b)$	231
• Applicazione del metodo diretto a $F(u)$ su $H_0^1(a,b)$ dotato di una "naturale" convergenza	231
Un risultato di esistenza di minimo per $F(u) = \int_a^b [f(u') + gu] dx$ su $H_0^1(a,b)$	233
Un risultato di esistenza/regolarità e eq. di Eulero-Lagrange per un funzionale più generale	234