Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in Matematica
Corso di Calcolo delle Variazioni - a.a. 2019/20 - Programma
docente: Prof. Anneliese Defranceschi
e-mail: anneliese.defranceschi@unitn.it
homepage: http://latemar.science.unitn.it/defranceschi
Nota: L'esame consiste in una prova orale sugli argomenti svolti a lezione.

Introduzione al corso. Ottimizzazione in $\mathbb{R}$ (in $\mathbb{R}^n$) (teorema di Weierstrass generalizzato; variazione prima e variazione seconda, punti critici, convessità).

Brevi cenni storici del CdV. Integrali variazionali (integrando variazionale, funzione di Lagrange o lagrangiana). Il problema standard del CdV. Esempi di modellizzazione di problemi classici mediante problemi variazionali (curva di minima lunghezza, la brachistocrona, superficie di rotazione di area minima; problema di Didone, disuguaglianza isoperimetrica).

Commenti sulla (non)-esistenza di minimi e sulla regolarità di minimi.

Metodi indiretti (classici)

Problemi variazionali (in dimensione uno e caso scalare). Variazione prima e variazione seconda. Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni. Condizioni necessarie per il problema variazionale standard: Equazioni di Eulero-Lagrange (estremali deboli, estremali,..., funzioni minimizzanti...). Cenno al caso vettoriale (e per funzione in più variabilie). Condizioni sufficienti (convessità/convessità indebolita). Un integrale primo per un funzionale con lagrangiana autonoma.

Casi particolari dell'equazione di Eulero-Lagrange. Discussione dei modelli presentati nell'introduzione (retta, cicloide, catenaria/catenoide).

Discussione di un problema variazionale relativo a insiemi di funzioni ammissibili 'non'-standard.

Problemi variazionali con vincoli isoperimetrici (in dimensione uno e il caso scalare). Teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Applicazioni varie: il problema di Didone; il problema del filo sospeso.

Disuguaglianze di Poincarè-Wirtinger. Applicazioni: il problema di Didone. La disuguaglianza isoperimetrica (dim. di Hurwitz).

Lemma di Du Bois-Reymond e un suo corollario. Equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale. Estremali spezzati (eq. di Eulero-Lagrange in forma integrale e le condizioni di Erdmann-Weierstrass). Applicazioni (il doppio pozzo).

Problemi variazionali (in dimensione uno e caso scalare). Minimi relativi deboli e forti (stretti). Esempi e controesempi (esempio di Scheeffer). Variazione seconda e condizioni sufficienti per minimi relativi deboli. La non-sufficienza della positività della variazione seconda per minimi relativi deboli (esempio di Scheeffer).

Condizioni necessarie e sufficienti per minimi relativi deboli: Condizione di Legendre. Teoria di Jacobi: integrale accessorio e lagrangiana accessoria, campi di Jacobi. Lemma di Legendre e di Jacobi. Punti coniugati. Esempi e applicazioni.

Condizioni necessarie e sufficienti per minimi relativi forti: La funzione di eccesso di Weierstrass. Teoria dei campi di Weierstrass: campi di estremali e funzione pendenza. Equazione di Eulero (modificata) per il campo. Equazioni di Carathéodory. L'integrale invariante di Hilbert. Le condizioni forti di Weierstrass. Le condizioni di Legendre stretti/forti. Punti coniugati ed esistenza di campi estremali in cui immergere un estremale. Esempi e applicazioni.

Metodi diretti

Introduzione. Teorema di Weierstrass e qualche sua variante. Funzione semicontinua inferiormente (seq.) e sottolivelli compatti (seq.) . Funzione coerciva (seq.) . Teorema di Tonelli (generalizzazione del teorema di Weierstrass). Esistenza del minimo (astratto).

Applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto al funzionale $F(u) = \int_0^1 [(u(x))^2 - 2g(x)u(x)]\,dx$ su $X = L^2(0,1)$.

Applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto al funzionale $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + g(x)u(x)]\, dx$ su $X = H_0^1(a,b)$. Funzioni assolutamente continue $AC([a,b])$: definizioni a confronto e alcune proprietà.

Un risultato di esistenza di un minimo per $F(u) = \int_a^b [f(u'(x)) + g(x)u(x)]\, dx$ su $X = H_0^1(a,b)$. Cenno alla regolarità del punto minimo se i dati sono regolari.

Un risultato generale di esistenza; l'equazione di Eulero-Lagrange; risultato di regolarità.

Bibliografia

Note del corso - Video delle lezioni

1) F. Angrisani, G. Ascione, C. Leone, C. Mantegazza: Appunti di Calcolo delle Variazioni. Amazon (2019).

2) B. Dacorogna: Introduction to the Calculus of Variations. Imperial College Press (2004).

3) M. Giaquinta, S. Hildebrandt: Calculus of Variations I. Springer Verlag (1994).

4) H. Sagan: Introduction to the Calculus of Variations. Dover Publ., Inc., New York (1969).

5) M. Mesterson-Gibbson: A Primer on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory. AMS (2009).

6) G. Buttazzo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt: One-dimensional variational problems. Clarendon Press, Oxford (1998).

7) U. Brechtken-Manderscheid: Einfuehrung in die Variationsrechnung. Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt (1983).

8) J.L. Troutman: Variational Calculus with Elementary Convexity. Springer, New York (1983).

a) H. Brezis: Analisi Funzionale. Liguori, Napoli (1986).

b) G.B. Folland: Real Analysis. Modern techniques and their applications. J. Wiley & Sons, NY (1984).

c) I. Fonseca, G. Leoni: Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p Spaces. Springer NY (2007).