

(A) 1. Dobbiamo risolvere in $\mathbb{C}$ l'eq. $z^4 |z|^2 = -1$.

Poiché $|z^4 |z|^2| = |-1|$, ossia $|z|^6 = 1$ e quindi $|z| = 1$, l'eq. data si risolve $z^4 = -1$; le soluzioni di tale equazione in $\mathbb{C}$ sono le quattro radici quarte del nr. complesso -1 , la cui forma trigonometrica è

$$\cos \pi + i \sin \pi.$$

Dalla formula delle radici n-esime di un nr. complesso otteniamo i quattro numeri

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k \frac{2\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + k \frac{2\pi}{4}\right) \quad k=0,1,2,3,$$

cioè

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

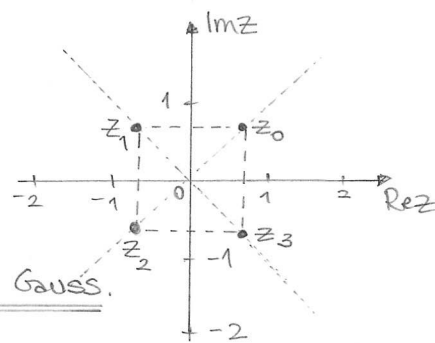
$$z_1 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_3 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Quindi $E = \{z_k : k=0,1,2,3\}$.

(a) Gli elementi di E costituiscono i vertici di un quadrato centrato nell'origine del piano di Gauss.



(V)

(b) Nono $z_1, z_2 \in E$ t.c. $z_1 = \bar{z}_2$. (V)

Ne esistono ben due coppie in E che soddisfano quanto richiesto: la coppia z_0, z_3 e la coppia z_1, z_2 .

(c) Nono $z_1, z_2 \in E$ t.c. $\arg z_1 = \arg z_2 + \pi$ (V)

Ne esistono ben due coppie in E che soddisfano quanto richiesto: la coppia z_0, z_2 e la coppia z_1, z_3 .

(d) $w = \frac{2}{\sqrt{3}+i} + i = \frac{2(\sqrt{3}-i)}{2} + i = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ e quindi $|w|=1$. Quindi $\min_{z \in E} \{|w|, |z|\} = 1$ ■

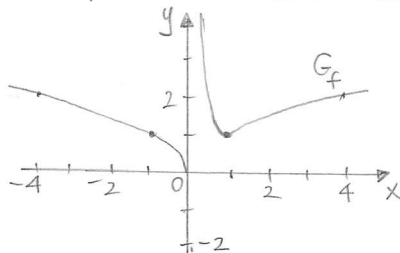
$$2. L_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4^{\log n}}{n} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4^{\log n}}{e^{\log n}} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{4} \right)^{n \log n}.$$

Poiché $0 < \frac{e}{4} < 1$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \log n = +\infty$, risulta $\underline{L_1 = 0}$. $\square$

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5^{\log n}}{n^2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5^{\log n}}{e^{2 \log n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{e^2} \right)^{n \log n}.$$

Come sopra si conclude che $\underline{L_2 = 0}$. $\blacksquare$

$$3. f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{|x|} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) la funzione f è decrescente sull'intervallo $]-\infty, 1]$

(F)

Notiamo che $f|_{]-\infty, 0]}$ e $f|_{]0, 1]}$ sono funzioni decrescenti, ma $f|_{]-\infty, 1]}$

non lo è. Infatti, basta prendere $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; si ha $x_1 < x_2$ e $f(x_1) < f(x_2)$. $\square$

(b) f è suriettiva (V) : abbiamo $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$. $\square$

(c) f ha un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ (F) :

$$\text{Infatti } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0; \text{ inoltre } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0 \cdot x] = +\infty!$$

Possono dedurre facilmente dal grafico di f che l'eq. $f(x) = k$ ha esattamente due soluzioni se e solo se $k = 1$. $\blacksquare$

$$4. \text{ Sia } A = \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx.$$

$$\text{Abbiamo } \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx \stackrel{\uparrow}{=} \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1-t^2}{2(1+t^2)} dt$$

$$t = \tan \frac{x}{2} \quad x = 2 \arctan t = \varphi(t)$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt = \int \left(\frac{2}{1+t^2} - 1 \right) dt = 2 \arctan t - t + c$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \cancel{2} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Allora } A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos x}{1+\cos x} dx = \left[x - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$\text{Allora } \underline{A = a\frac{\pi}{4} + b} \text{ con } \underline{a=2, b=-1.} \quad \blacksquare$$

$$5. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{8d}{3} & \text{se } x \leq d \\ \frac{2 \log(1+d^2-dx)}{\sin(x-d)} & \text{se } d < x < \frac{1}{d} + d \end{cases}$$

risulta continua in $x=d$ se e solo se $\lim_{x \rightarrow d^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow d^+} f(x) = f(d)$
se e solo se

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}d^2 - \frac{8d}{3} &= \lim_{x \rightarrow d^+} \frac{2 \log(1+d^2-dx)}{\sin(x-d)} = \frac{-d(x-d)}{(x-d)} \\ &= \lim_{x \rightarrow d^+} 2 \frac{\log(1+d^2-dx)}{d^2-dx} \cdot \left(\frac{d^2-dx}{x-d} \right) \cdot \frac{x-d}{\sin(x-d)} \\ &\stackrel{\left[\frac{0}{0} \right]}{=} \lim_{x \rightarrow d^+} 2 \frac{\log(1+d^2-dx)}{d^2-dx} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = -2d. \end{aligned}$$

Quindi dobbiamo det. $d > 0$ t.c. $2d^2 - 8d = -6d$,
ossia $2d^2 - 2d = 0$, da cui $\underline{d=1.}$ □

Abbiamo dunque per $d=1$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{2 \log(2-x)}{\sin(x-1)} & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Abbiamo } f'_+(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2 \log(1-h)}{\sin h} + 2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2 \log(1-h) + 2 \sin h}{h \sin h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-2h - h^2 + o(h^2) + 2h - \frac{h^3}{3} + o(h^3)}{h^2 + o(h^2)} \\ &= -1. \end{aligned}$$

ossia $\underline{f'_+(1) = -1.}$ Poichè $f'_-(1) = \frac{2}{3}$, risulta che f non è derivabile in $x=1.$ □

6. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Sà $\hat{x} \in [a, b]$ t.c.

$$f(\hat{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

(cioè $\hat{x}$ è pt. di minimo assoluto per $f|_{[a, b]}$).

(a) $\exists c \in [a, b]$ t.c. $\frac{f(b) + f(\hat{x})}{2} = f(c)$ (Si):

Infatti, essendo f derivabile in $\mathbb{R}$, f è continua in $\mathbb{R}$, e quindi in $[a, b]$.

Per il teorema dei valori intermedi, $f([a, b])$ è un intervallo; in particolare assume tutti i valori tra $f(b)$ e $f(\hat{x})$, e così il pt. medio di $f(b)$ e $f(\hat{x})$: quindi $\exists c \in [a, b]$ t.c. $\frac{f(b) + f(\hat{x})}{2} = f(c)$. $\square$

(b) $\exists c \in [a, b]$ t.c. $\frac{f(a) - f(\hat{x})}{2} = f(c)$ (No):

Infatti, basta prendere $f(x) = k$ costante $\neq 0$ su $[a, b]$.

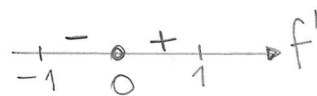
Allora $\frac{f(a) - f(\hat{x})}{2} = 0$, mentre $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \neq 0$. $\square$

(c) $f'(\hat{x}) = 0$ (No): basta prendere $f(x) = x$ su $\mathbb{R}$ e per es., $[a, b] = [0, 1]$. Allora $\hat{x} = 0$ e $f'(0) = 1$. $\square$

(d) $f'(\hat{x}) \leq f'(x) \quad \forall x \in [a, b]$ (No):

Basta prendere $f(x) = x^2$ su $[-1, 1]$

$f'(0) = 0 > f'(x) \quad \forall x \in [-1, 0[$.



7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x \sin|x^2 - 1|$.

(a) La funzione f soddisfa nell'intervallo $[0, 2]$ le ipotesi del teorema di Weierstrass (V)

Infatti f è una funzione continua (somma, composizione, prodotto di funzioni continue) su un intervallo chiuso e limitato. $\square$

(b) La funzione f soddisfa nell'intervallo $[-1, 1]$ le ipotesi del teorema

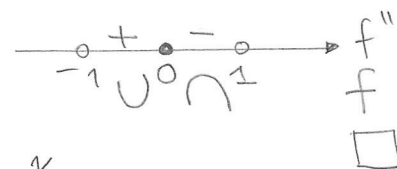
di Rolle (V):

In fatti abbiamo $f(x) = x \sin(1-x^2)$ su $[-1,1]$: f è continua su $[-1,1]$, derivabile su $] -1,1[$ e $f(-1) = f(1) = 0$. $\square$

(c) $x=0$ è un pt. di flesso per f (V):

Oss. che $f \in \mathcal{C}^2(]-1,1[)$; abbiamo $f'(x) = \sin(1-x^2) - 2x^2 \cos(1-x^2)$
 $f''(x) = -2x \cos(1-x^2) - 4x \cos(1-x^2) - 4x^3 \sin(1-x^2)$
 $= -6x \cos(1-x^2) - 4x^3 \sin(1-x^2)$.

Risulta $f''(0) = 0$. Inoltre da $f''(x) = -2x [3 \cos(1-x^2) + 2x^2 \sin(1-x^2)]$ risulta che $f''(x) > 0$ su $] -1,0[$ e $f''(x) < 0$ su $] 0,1[$.



$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, 0 < \frac{1}{n} \leq 1$ e

$$a_n = \int_0^{1/n} f(x) dx = \int_0^{1/n} x \sin(1-x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{1/n} 2x \sin(1-x^2) dx$$

$$= \frac{1}{2} \cos(1-x^2) \Big|_0^{1/n} = \frac{1}{2} \left[\cos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \cos 1 \right]$$

Abbiamo $a_n = \frac{1}{2} \left[\cos 1 \cos \frac{1}{n^2} + \sin 1 \sin \frac{1}{n^2} - \cos 1 \right]$

$$= \frac{1}{2} \left[\cos 1 \left(\cos \frac{1}{n^2} - 1 \right) + \sin 1 \sin \frac{1}{n^2} \right] \quad \forall n \geq 1$$

Quindi $0 < a_n \leq \frac{\sin 1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$ ($0 < \sin x < x \quad \forall x > 0$)

Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente, per il criterio del confronto anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente. $\blacksquare$

8. $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6 \sin^2 \sqrt{x} - \log(1+4x) - 2 \operatorname{arctg} x}{\cosh x - \cos x}$.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0} \right]$. Per calcolarlo usiamo gli sviluppi di Taylor. Poiché $\cosh x - \cos x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \cos x$

(*) $0 < a_n = \int_0^{1/n} x \sin(1-x^2) dx \leq \int_0^{1/n} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{1/n} = \frac{1}{2n^2} \quad \forall n \geq 1$.

(*)
Vedi
fondo
pagina
altro possibile
svolgimento
"più rapido"

$= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$, è sufficiente sviluppare il numeratore fino al secondo ordine. Tenendo conto degli argomenti che verranno inseriti al posto di t negli sviluppi per $t \rightarrow 0$ delle funzioni elementari $\sin t$, $\log(1+t)$ e $\arctan t$ e del fatto che il seno è elevato al quadrato, basta considerare gli sviluppi:

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \quad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \arctan t = t + o(t^2).$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} 6 \sin^2 \sqrt{x} - \log(1+4x) - 2 \arctan x &= \\ &= 6 \left(\sqrt{x} - \frac{(\sqrt{x})^3}{3!} + o((\sqrt{x})^3) \right)^2 - \left(4x - \frac{16x^2}{2} + o(x^2) \right) - 2x + o(x^2) \\ &= 6 \left(x - \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) - 4x + 8x^2 + o(x^2) - 2x + o(x^2) \\ &= 6x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Perciò otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6 \sin^2 \sqrt{x} - \log(1+4x) - 2 \arctan x}{\cosh x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{6 + \frac{o(x^2)}{x^2}}{1 + \frac{o(x^2)}{x^2}} \right) \stackrel{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} \frac{6}{1} = 6; \quad \text{dunque } \underline{\underline{L=6.}} \end{aligned}$$

9. Sia $x \in \mathbb{R}$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{4}{\pi} \arctan \frac{x}{2} \right)^n}{n+2}.$$

Poniamo $t = \frac{4}{\pi} \arctan \frac{x}{2}$; allora la serie data si riscrive come serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$ con coefficienti $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$.

Usando il criterio della radice n -esima (o del rapporto) risulta che il raggio di convergenza della serie di potenze è

$$r = \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = 1.$$

Perciò $\forall t \in \mathbb{R}$, $|t| < 1$, la serie di potenze converge (assolutamente) mentre non converge $\forall t$ con $|t| > 1$. Rimane da studiare il carattere della serie di potenze per $t = -1$ e $t = 1$.

Per $t = -1$ la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ e risulta dunque divergente.

Per $t = 1$, la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$, che è una serie a segni alterni convergente per il criterio di Leibniz.

In definitiva, la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ è convergente $\forall t \in]-1, 1[$.

Ricordando che $t = \frac{4}{\pi} \arctan \frac{x}{2}$, risulta che la serie data è convergente $\forall x \in \mathbb{R}$ t.c. $-1 < \frac{4}{\pi} \arctan \frac{x}{2} \leq 1$ ed è assolutamente convergente $\forall x \in \mathbb{R}$ t.c. $-1 < \frac{4}{\pi} \arctan \frac{x}{2} < 1$.

$$\text{Ora } -1 < \frac{4}{\pi} \arctan \frac{x}{2} \leq 1 \iff -\frac{\pi}{4} < \arctan \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\iff -1 < \frac{x}{2} \leq 1$$

$$\iff -2 < x \leq 2.$$

$$\text{Ovviamente } -1 < \frac{4}{\pi} \arctan \frac{x}{2} < 1 \iff -2 < x < 2.$$

Possiamo allora asserire:

- (a) L'insieme di convergenza della serie è $E =]-2, 2[$. (V)
- (b) L'insieme di convergenza della serie è $E = [-2, 2]$. (F)
- (c) La serie converge assolutamente per $x \in]-2, 2[$. (V)
- (d) L'insieme di convergenza della serie è $E = \{2\}$. (F)

10. Sia $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t(1+\sqrt{t})} dt$.

$f(t) = \frac{1}{t(1+\sqrt{t})} :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$
continua

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = +\infty$ (F).

Infatti, oss. che $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(- \int_x^1 f(t) dt \right)$.

Oss. che $f(t) \sim \frac{1}{t}$ per $t \rightarrow 0^+$. Poiché $\int_0^c \frac{1}{t} dt = +\infty \quad \forall c > 0$,

si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\infty$. □

(b) F è strettamente crescente nell'intervallo $]0, +\infty[$ (V).

f è continua su $]0, +\infty[$. Dal TFC abbiamo che $F(x)$ è derivabile su $]0, +\infty[$ e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in]0, +\infty[$. Poiché $f(x) > 0$ su $]0, +\infty[$, si ha $F'(x) > 0$ su $]0, +\infty[$ e quindi F è strett. crescente nell'intervallo $]0, +\infty[$. □

(c) Dobbiamo calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t(1+\sqrt{t})} dt$

$$\begin{aligned} \text{Ora } \int \frac{1}{t(1+\sqrt{t})} dt & \stackrel{\substack{\sqrt{t}=s \\ t=s^2=\varphi(s) \\ dt=2s ds}}{=} \int \frac{1}{s^2(1+s)} \cdot 2s ds = 2 \int \frac{1}{s(1+s)} ds \\ & = 2 \int \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{1+s} \right) ds \\ & = 2 (\log s - \log(1+s)) = 2 \log \left(\frac{s}{1+s} \right) \\ & \stackrel{\substack{s=\varphi^{-1}(t) \\ \uparrow}}{=} 2 \log \left(\frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} \right). \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 \log \left(\frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} \right) \right]_{-1}^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \log \left(\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right) - 2 \log \left(\frac{1}{2} \right) \right) \\ &= 2 \log 2 = \log 4. \end{aligned}$$

$\downarrow x \rightarrow +\infty$
0

Quindi F ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ di eq. $y = \log 4 (=L)$.

Allora $e^L = e^{\log 4} = 4$. ■

11. (a) Provate che esistono costanti $c > 0$ tali che

$$(*) \quad 4e^x \geq cx^2 \quad \forall x \in [0, +\infty[.$$

(b) Determinate la più grande costante c per cui $(*)$ è verificata.

(a) Oss. che per $x=0$, $4 \geq c \cdot 0$ è sempre verificata $\forall c$.

Basta quindi studiare (*) per $x > 0$. Oss. che una costante $c > 0$

verifica (*) $\forall x > 0$ se e solo se $\frac{4e^x}{x^2} \geq c \quad \forall x \in]0, +\infty[$.

La più grande costante c sarà $\inf \left\{ \frac{4e^x}{x^2} : x \in]0, +\infty[\right\}$.

Studiamo allora $f(x) = \frac{4e^x}{x^2}$ su $]0, +\infty[$. Abbiamo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

inoltre f è continua su $]0, +\infty[$; quindi per il teorema di

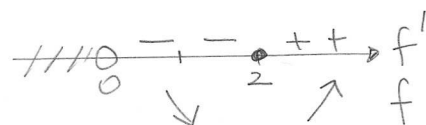
Weierstrass generalizzato su $]0, +\infty[$ (analog. Es. Paradigma 6.12.

Foglio Es-6-18-22-10) esiste il minimo di f su $]0, +\infty[$ e

il valore minimo sarà il più grande c per cui è verificato (*).

(b) f è derivabile su $]0, +\infty[$ e

$$f'(x) = \frac{4e^x \cdot x^2 - 4e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{4e^x(x-2)}{x^3}$$



Inoltre

$$f''(x) = 4 \frac{(e^x(x-2) + e^x)x^2 - e^x(x-2)3x^2}{x^4}$$

$$= \frac{4e^x[(x-1)x - (x-2)3]}{x^4} = \frac{4e^x(x^2 - 4x + 6)}{x^4} > 0$$

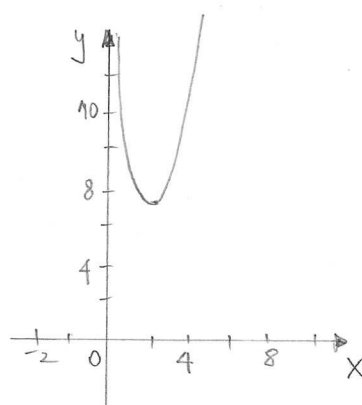
su $]0, +\infty[$

$\Rightarrow f$ è strett. convessa su $]0, +\infty[$.

Dunque $c = \min_{x \in]0, +\infty[} f(x) = f(2) = \frac{4e^2}{4} = \underline{\underline{e^2}}$

grafico qualitativo di $f(x) = \frac{4e^x}{x^2}$

su $]0, +\infty[$



questo studio
non è
necessario
per la
determina-
zione di c



12. (a) Determinate la soluzione $\hat{y}(x)$ del pbm. di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{x^2 - y}{x-1} \\ y(2) = 3. \end{cases}$$

(b) Determinate l'eq. della retta tg al grafico di $\hat{y}(x)$ nel pt. di coordinata $x=2$.

(c) Verificate se l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\hat{y}(x)} dx$ risulta convergente.

(a) L'eq. diff. proposta è lineare del primo ordine della forma $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$, dove $a(x) = -\frac{1}{x-1}$ e $b(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Dovendo risolvere il pbm. di Cauchy con $x_0 = 2$, consideriamo le funzioni $a(x)$ e $b(x)$ sull'intervallo $]1, +\infty[$.

Ricordando la formula risolutiva, tutte le soluzioni dell'eq. diff. sull'intervallo $]1, +\infty[$ sono della forma

$$y(x) = e^{A(x)} \left(C + \int b(x) \cdot e^{-A(x)} dx \right),$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ e $C \in \mathbb{R}$ arbitrario. Poiché abbiamo

$$A(x) = \int a(x) dx = - \int \frac{1}{x-1} dx = -\log(x-1)$$

otteniamo

$$y(x) = e^{-\log(x-1)} \left(C + \int \frac{x^2}{x-1} e^{\log(x-1)} dx \right)$$

$$= \frac{1}{x-1} \left(C + \frac{x^3}{3} \right).$$

Oss. che $y(2) = 3 \Leftrightarrow 3 = C + \frac{8}{3} \Leftrightarrow C = \frac{1}{3}.$

In definitiva, la soluzione del pbm. di Cauchy dato è

$$\hat{y}(x) = \frac{x^3 + 1}{3(x-1)} \quad \text{su }]1, +\infty[.$$

□

(b) Possiamo ottenere subito dall'eq. $\hat{y}'(2) = \frac{4 - \hat{y}(2)}{2-1} = 4 - 3 = 1$

e quindi l'eq. della retta tg. al grafico

di $\hat{y}(x)$ nel pt. di coord. $x=2$ senza risolvere il pbm. di Cauchy!!

L'eq. della retta tg è $y = \hat{y}(2) + \hat{y}'(2)(x-2)$
 $= 3 + 1 \cdot (x-2)$

Ossia $y = x + 1$.

□

(c) Basta oss. che $0 < \frac{1}{\hat{y}(x)} \sim \frac{3}{x^2}$ per $x \rightarrow +\infty$. Quindi $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\hat{y}(x)} dx$ è convergente.

■