$\boxed{A}$

COGNOME E NOME: ____________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	3	2	3	2	3	2	3
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		**Totale**
Punti	3	2	3	5	5		36
Punti ottenuti							

1. (3 punti) Sia $E \subseteq \mathbb{C}$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione $z^4|z|^2 = -1$.
   Stabilite per ciascuna delle seguenti tre affermazioni se è vera o falsa.
   (a) Gli elementi di E costituiscono i vertici di un quadrato centrato nell'origine del piano di Gauss. ◯ Vera ◯ Falsa
   (b) Esistono $z_1, z_2 \in E$ tali che $z_1 = \overline{z}_2$. ◯ Vera ◯ Falsa
   (c) Esistono $z_1, z_2 \in E$ tali che $\arg z_1 = \arg z_2 + \pi$. ◯ Vera ◯ Falsa
   (d) Se $w = \dfrac{2}{\sqrt{3}+i} + i$, allora $\min\limits_{z \in E}\{|w|, |z|\} =$ ______.

2. (2 punti) Calcolate
$$L_1 = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4^{\log n}}{n}\right)^{-n}; \qquad L_2 = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5^{\log n}}{n^2}\right)^{n}.$$
   Allora $L_1 =$ ______ e $L_2 =$ ______.

3. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{|x|} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
   Stabilite per ciascuna delle seguenti tre affermazioni se è vera o falsa.
   (a) La funzione f è decrescente sull'intervallo $]-\infty, 1]$. ◯ Vera ◯ Falsa
   (b) La funzione f è suriettiva. ◯ Vera ◯ Falsa
   (c) La funzione f ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. ◯ Vera ◯ Falsa
   L'equazione $f(x) = k$ ha esattamente due soluzioni se e solo se $k =$ ______.

4. (2 punti) Sia
$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx.$$
   Allora $A = a\dfrac{\pi}{4} + b$, dove $a =$ ______ e $b =$ ______.

5. (3 punti) Determinate $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\alpha x - \dfrac{8\alpha}{3} & \text{se } x \leq \alpha \\ \\ \dfrac{2\log(1+\alpha^2-\alpha x)}{\sin(x-\alpha)} & \text{se } \alpha < x < \frac{1}{\alpha} + \alpha. \end{cases}$$

risulti continua in $x = \alpha$. Allora $\alpha =$ ______.

Per tale α determinate poi, usando la definizione, $f'_+(\alpha)$. Si ha $f'_+(\alpha) =$ ______. f risulta derivabile in $x = \alpha$? ◯ Sì ◯ No

6. (2 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Sia $\widehat{x} \in [a, b]$ tale che

$$f(\widehat{x}) \leq \; f(x) \qquad \forall x \in [a, b]\,.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.

(a) $\exists c \in [a, b]$ tale che $\dfrac{f(b) + f(\widehat{x})}{2} = f(c)$. ◯ Sì ◯ No

(b) $\exists c \in [a, b]$ tale che $\dfrac{f(a) - f(\widehat{x})}{2} = f(c)$. ◯ Sì ◯ No

(c) $f'(\widehat{x}) = 0$. ◯ Sì ◯ No

(d) $f'(\widehat{x}) \leq f'(x) \qquad \forall x \in [a, b]\,$. ◯ Sì ◯ No

7. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = x \sin |x^2 - 1|.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti tre affermazioni se è vera o falsa.

(a) La funzione f soddisfa nell'intervallo $[0, 2]$ le ipotesi del teorema di Weierstrass.
◯ Vera ◯ Falsa

(b) La funzione f soddisfa nell'intervallo $[-1, 1]$ le ipotesi del teorema di Rolle.
◯ Vera ◯ Falsa

(c) $x = 0$ è un punto di flesso per la funzione f.
◯ Vera ◯ Falsa

Per ogni $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sia $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx$. Dite se è vera o falsa la seguente affermazione: La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente.

◯ Vera ◯ Falsa

8. (3 punti) Sia

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{6\sin^2\sqrt{x} - \log(1+4x) - 2\arctan x}{\cosh x - \cos x}.$$

Allora $L =$ ______.

9. (2 punti) Sia $x \in \mathbb{R}$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{4}{\pi} \arctan \frac{x}{2}\right)^n}{n+2}.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) L'insieme di convergenza della serie è $E = \left]-2, 2\right]$. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) L'insieme di convergenza della serie è $E = [-2, 2]$. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) La serie converge assolutamente per $x \in \left]-2, 2\right[$. ◯ Vera ◯ Falsa

(d) L'insieme di convergenza della serie è $E = \{2\}$. ◯ Vera ◯ Falsa

10. (3 punti) Sia

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t(1+\sqrt{t})} dt.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti due affermazioni se è vera o falsa.

(a) $\lim_{x \to 0^+} F(x) = +\infty$. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) F è strettamente crescente nell'intervallo $]0, +\infty[$. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) La funzione F ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ di equazione $y = L$. Allora $e^L =$ ______.

Per i seguenti DUE esercizi è richiesto UN ACCURATO SVOLGIMENTO.

11. (5 punti) (a) Provate che esistono costanti $c > 0$ tali che

$$(*) \qquad 4e^x \geq cx^2 \qquad \forall x \in [0, +\infty[.$$

(b) Determinate la più grande costante c per cui (*) è verificata.

12. (5 punti) (a) Determinate la soluzione $\widehat{y}(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2 - y}{x - 1} \\ y(2) = 3\,. \end{cases}$$

(b) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di $\widehat{y}(x)$ nel punto di coordinata $x = 2$.

(c) Verificate se l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\widehat{y}(x)}\,dx$ risulta convergente.