A

COGNOME E NOME: ______________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	3	3	2	2	2	2	3
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		**Totale**
Punti	3	3	3	5	5		36
Punti ottenuti							

1. (3 punti) Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali.
   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.
   (a) $(a_n)_n$ è infinitesima per $n \to +\infty$ se e solo se $(\sin a_n)_n$ è infinitesima per $n \to +\infty$.
   ◯ Vera ◯ Falsa
   (b) $(a_n)_n$ è convergente se e solo se $(|a_n|)_n$ è convergente. ◯ Vera ◯ Falsa
   (c) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, allora $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |a|$. ◯ Vera ◯ Falsa
   (d) Se $(a_n)_n$ è strettamente monotona e $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(a-a_n)$ è convergente.
   ◯ Vera ◯ Falsa

2. (3 punti) Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
   $$g(x) = e^{-2x} - x^3.$$
   Per ciascuna delle seguenti due affermazioni dite se è vera o falsa.
   (a) La funzione g ha un punto critico. ◯ Vera ◯ Falsa
   (b) La funzione g ha un punto di flesso nell'intervallo $[0, 1]$. ◯ Vera ◯ Falsa
   Sia $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione inversa di g. Sia
   $$x + ay + b = 0$$
   l'equazione della retta tangente al grafico di g^{-1} nel punto di ascissa 1. Allora $a =$ ______ e $b =$ ______.

3. (2 punti) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
   $$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{se } x \in [-1, 0] \\ 1 - x\log x & \text{se } x \in \,]0, 1]\,. \end{cases}$$
   La funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri sull'intervallo $[-1, 1]$
   ◯ per b qualsiasi e $a > -1$ ◯ per $b < 1$ e $a \geq -1$ ◯ per $b = 1$ e $a > 1$ ◯ $b = 1$ e $a < -1$.
   Per tali valori dei parametri a e b, la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange su $[-1, 1]$?
   ◯ Vera ◯ Falsa

4. (2 punti) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$f(x) = 6\sin x + 3(x^2 - 1)\log\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) - \alpha x \arctan x^2.$$

Allora $f(x) = o(x^3)$ per $x \to 0$ se $\alpha =$ ______.

5. (2 punti) Sia

$$L = \lim_{x\to 0^+} x \int_x^1 \frac{e^{2t} - 1}{t^3} dt.$$

Allora $L =$ ______.

6. (2 punti) Per ogni serie data, sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ per cui essa risulta convergente. Allora

(a) per $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(\sqrt[3]{n}+1) - \log(\sqrt[3]{n})}{\sqrt[3]{n^\alpha + 4\alpha}}$ si ha $\inf E_\alpha =$ ______.

(b) per $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{3}\cos\frac{1}{n} + \frac{3}{n^\alpha}\Big)^n$ si ha $\inf E_\alpha =$ ______.

7. (3 punti) Calcolate, usando la definizione, l'integrale improprio

$$B = \frac{2}{\pi}\int_0^{\log 2} \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx$$

dopo aver verificato che esso risulta convergente. Si ha $B =$ ______.

8. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e positiva. Sia

$$G(x) = \int_0^{x|x|} f(t)dt.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.

(a) $G(x)$ è derivabile in $\mathbb{R}$. ◯ Sì ◯ No

(b) G è strettamente crescente in $\mathbb{R}$. ◯ Sì ◯ No

(c) $x = 0$ è un punto con tangente orizzontale per G. ◯ Sì ◯ No

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$. ◯ Sì ◯ No

9. (3 punti) Per ogni $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sia

$$f_n(x) = x^n e^{-nx} \qquad \text{su } [0, +\infty[\,.$$

(a) Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ la funzione f_n ha il valore minimo assoluto in $x =$ ______ e il valore massimo assoluto in $x =$ ______.

(b) Se M_n denota il valore massimo assunto da f_n su $[0, +\infty[$, determinate la somma

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} M_n.$$

Si ha $S = a^{-1}$ con $a =$ ______.

10. (3 punti) Sia $\widehat{y}(x)$ l'unica funzione a valori reali definita su $]0, +\infty[$ che risolve l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{x} + x^2 \sin x$$

e tale che $\widehat{y}(x) = o(x)$ per $x \to 0^+$.
Allora $\widehat{y}(\pi) =$ ______. Inoltre, il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3\widehat{y}(x)}{x^\alpha}$$

esiste finito ed è diverso da 0 se $\alpha =$ ______. Per tale valore di α il limite vale ______.

Per i seguenti DUE esercizi è richiesto UN ACCURATO SVOLGIMENTO.

11. (5 punti) (a) Trovate le soluzioni $(\widehat{z}, \widehat{w}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{w}{z} - i\overline{w} = 0 \\ -w\overline{z} + 1 = \overline{w}i. \end{cases}$$

(b) Individuate l'insieme $E = \{z \in \mathbb{C} : |z - \widehat{z}| > |z - \widehat{w}|\}$ e rappresentatelo nel piano di Gauss.

(c) Sia $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da $h(z) = ze^{i\frac{\pi}{2}}$. Rappresentate graficamente nel piano di Gauss l'insieme immagine $h(E)$.

12. (5 punti) (a) Studiate la funzione

$$f(x) = \arctan(\frac{|x-1|}{x^3})$$

(dominio, segno, limiti agli estremi del dominio, asintoti, punti di derivabilità/non derivabilità, monotonia e punti estremi) e tracciatene un grafico qualitativo.

(b) Discutete poi la convergenza dell'integrale improprio e della serie

$$\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)\,.$$

(c) Determinate, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{\sin x^2}$$