

(A)

1.(a) Dobbiamo risolvere l'eq. diff. $y'' + y' - 2y = e^{-x}$.

Dato che le soluzioni dell'eq. caratteristica $z^2 + z - 2 = 0$ sono $z = -2$ e $z_1 = 1$, la soluzione generale dell'eq. diff. omogenea associata all'eq. diff. data

$$y'' + y' - 2y = 0$$

è $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$, al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Poiché e^{-x} non è soluzione dell'eq. diff. omogenea associata, cerchiamo una soluzione particolare della forma $\bar{y}(x) = a e^{-x}$ con $a \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo che $\bar{y}$ sia soluzione dell'eq. diff. completa data. Poiché $\bar{y}'(x) = -a e^{-x}$ e $\bar{y}''(x) = a e^{-x}$ avremo che $\bar{y}(x)$ è soluzione dell'eq. $y'' + y' - 2y = e^{-x}$ se

$$a e^{-x} - a e^{-x} - 2a e^{-x} = e^{-x},$$

ossia, se $a = -\frac{1}{2}$. Risulta $\bar{y}(x) = -\frac{1}{2} e^{-x}$.

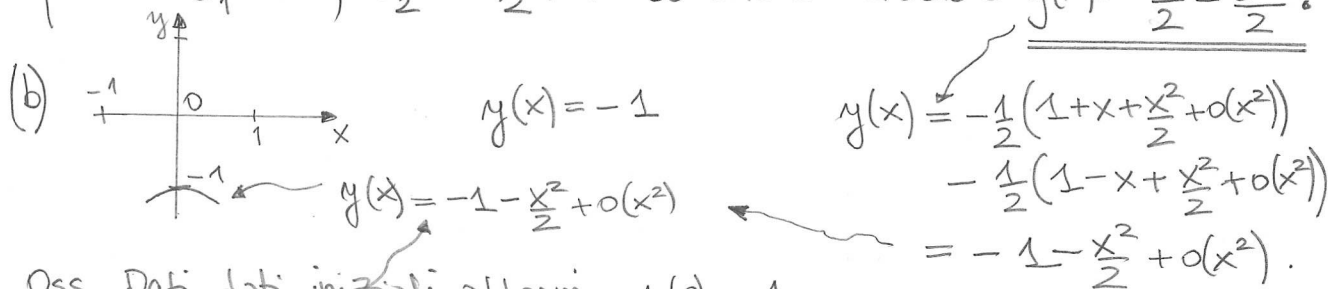
L'integrale generale dell'eq. diff. data è quindi

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x - \frac{1}{2} e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Poiché $y'(x) = -2c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + \frac{1}{2} e^{-x}$, le condizioni iniziali danno

$$\begin{cases} -1 = c_1 + c_2 - \frac{1}{2} \\ 0 = -2c_1 + c_2 + \frac{1}{2} \end{cases},$$

quindi $c_1 = 0$, $c_2 = -\frac{1}{2}$. La soluzione cercata è $y(x) = -\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$.



Oss. Dati dati iniziali abbiamo $y(0) = -1$ e $y'(0) = 0$; dall'eq. si ottiene subito $y''(0) + 2 = 1$, ossia $y''(0) = -1$ e quindi lo sviluppo di Taylor di y di ordine 2 centrato in 0 senza risolvere il probl. di Cauchy!!

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arcsin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \infty \cdot 0$$

Modo 1: ricordiamo che $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0$. Dunque

$$x \arcsin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = x \arcsin\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right) = x \cdot \frac{1}{x} + o(1) \text{ per } x \rightarrow +\infty;$$

$$\operatorname{arctg} t = t + o(t) \text{ per } t \rightarrow 0$$

$$\arcsin s = s + o(s) \text{ per } s \rightarrow 0$$

Nota: $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$

quindi $\underline{\underline{L_1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arcsin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \underline{\underline{1}}$.

Modo 2: Calcoliamo il limite utilizzando il teorema di de l'Hôpital.

Scriviamo

$$x \arcsin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \frac{\arcsin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Osserviamo che $\forall x \neq 0$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}};$$

ora $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^2}} \cdot \frac{x^2}{1+x^2} = 1,$

e quindi per il teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arcsin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = 1. \quad \square$$

Infine, dal teorema ponte (o limite di funzioni composte) mi ha

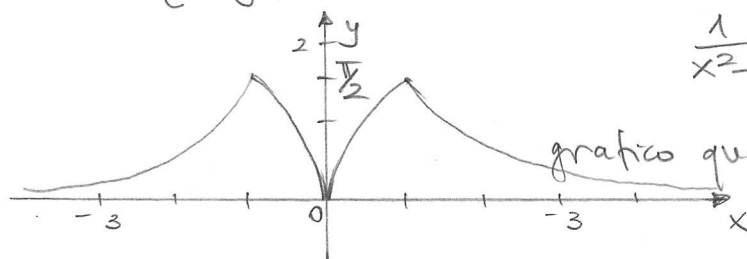
$$\underline{\underline{L_2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4n!}{n^n} + 3 \right) \underbrace{n^n \arcsin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n^n\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} = \underline{\underline{3}}.$$

(poiché $n! \ll n^n$ (gerarchia degli infiniti) per $n \rightarrow +\infty$)

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sqrt{|x|} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2-1} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{funzione pari!}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{1}{x^2-1} \searrow \text{ su }]1, +\infty[\quad \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2-1} \searrow \text{ su }]1, +\infty[$$



Allora $f(\mathbb{R}) = [0, \frac{\pi}{2}]$.

(a) f è continua su tutto $\mathbb{R}$. (V)

f è continua in tutti i pt. $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ poiché composizione di funzioni continue. Inoltre $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pi}{2} = f(-1)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pi}{2} = f(1)$. $\square$

(b) f ammette massimo e minimo. (V)

$$\min_{\mathbb{R}} f = f(0) = 0, \quad \max_{\mathbb{R}} f = f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

(c) $f|_{[-1,1]}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. (F)

f è continua su $[-1,1]$, $f(-1) = f(1)$, ma f non è derivabile in $x=0$! $f'_-(0) = -\infty$, $f'_+(0) = +\infty$: $(0,0)$ è una cuspide per f . $\square$

(d) $\exists x_0 \in]0,1[$ tale che $f'(x_0) = \frac{\pi}{2}$. (V)

Segue dal teorema di Lagrange per $f|_{[0,1]}$. Infatti $f|_{[0,1]}$ è continua, derivabile in $]0,1[$. Allora $\exists x_0 \in]0,1[$ tale che $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(x_0)$,
ovvero $\frac{\frac{\pi}{2} - 0}{1} = f'(x_0)$, da cui quanto si vuole. $\square$

4. Sia $A = \int_0^1 (x-1)^2 \arctan x \, dx$. Sia $h(x) = (x-1)^2 \arctan x$. Determiniamo una funzione primitiva di h integrando per parti:

$$\int \underbrace{(x-1)^2}_{f'(x)} \underbrace{\arctan x}_{g(x)} \, dx = \frac{(x-1)^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int (x-1)^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

Ora $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; poiché

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 : x^2 + 1 = x - 3 \\ \underline{+ x^3 + x} \\ -3x^2 + 2x - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3x^2 + 2x - 1 \\ \underline{+ 3x^2 + 3} \\ 2x + 2 \end{array}$$

$$\text{e quindi } \frac{(x-1)^3}{1+x^2} = x - 3 + \frac{2x+2}{x^2+1}$$

risulta

$$\begin{aligned}\int (x-1)^2 \arctan x &= \frac{(x-1)^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int \left[(x-3) + \frac{2x+2}{x^2+1} \right] dx \\ &= \frac{(x-1)^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} - 3x + \log(x^2+1) + 2 \arctan x \right].\end{aligned}$$

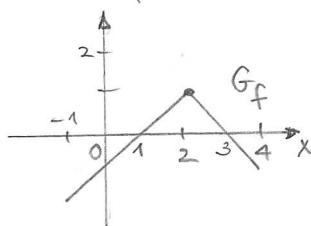
Allora, grazie al teorema di Tomicelli-Barrow concludiamo

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 (x-1)^2 \arctan x \, dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} \arctan x \right]_0^1 - \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} - 3x + \log(x^2+1) + 2 \arctan x \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} - 3 + \log 2 + 2 \arctan 1 \right] \\ &= \frac{1}{6} [5 - \pi - 2 \log 2] = \frac{1}{6} (a + b\pi + c \log 2)\end{aligned}$$

con $a=5$, $b=-1$, $c=-2$. ■

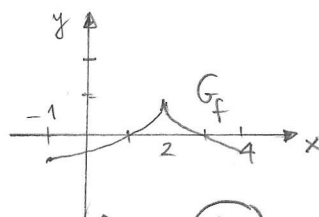
5. Sia $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $f' > 0$ su $] -1, 2[$ e $f' < 0$ su $] 2, 4[$. Stabilite quali delle seguenti affermazioni seguono dalle ipotesi.

(a) $f'(2) = 0$. (No)



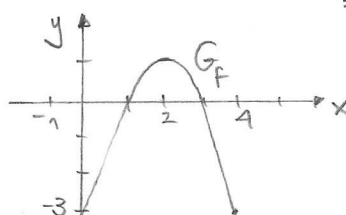
$f(x) = -|x-2| + 1$. □

(b) Se $\exists \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x)$, allora tale limite è finito. (No)



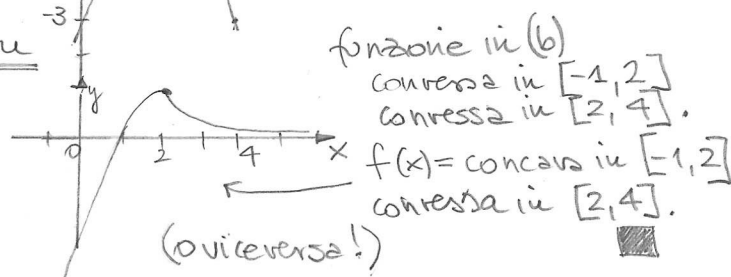
$f(x) = -\sqrt[3]{|x-2|} + 1$. □

(c) $x=2$ è un pt. angoloso per f . (No)



$f(x) = -(x-2)^2 + 1$. □

(d) f è convessa (o concava) su $[-1, 4]$ (No)



6. $(a_n)_n, (b_n)_n$ successioni di numeri reali positivi tali che

$$a_n = o(b_n) \quad n \rightarrow +\infty,$$

$$\text{ossia } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Stabilire per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.

(a) $a_n^2 = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ (No) :

$$a_n = n \quad b_n = n^2 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0, \text{ ma}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^2}{b_n} = 1. \quad \square$$

(b) $\sin a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$ (Si) : infatti

$$0 \leq \left| \frac{\sin a_n}{b_n} \right| \leq \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \sin a_n = o(b_n) \quad n \rightarrow +\infty$$

$$|\sin t| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad \square$$

(c) $\sin^2\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = o\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ per $n \rightarrow +\infty$ (Si) : infatti $\sin^2 x = o(x)$ per $x \rightarrow 0$;

$$\text{e da } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \text{ segue}$$

$$\sin^2\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = o\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ per } n \rightarrow +\infty \quad \square$$

(d) $(a_n)_n$ è limitata superiormente (No) : vedi (a) ! ■

7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sin|x| + e^{-|x|}$

(a) Possiamo oss. che $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ e in particolare in

$$x=0. \text{ Inoltre } f(x) = \begin{cases} \sin x + e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ \sin x + e^x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Poiché } f'(x) = \begin{cases} \cos x - e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ -\cos x + e^x & \text{se } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0) = 0$$

abbiamo

La funzione f è derivabile in $x=0$ (V).

(b) la funzione $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ (V) : ovviamente l'unico pt. da controllare è $x=0$; ma il fatto che f sia derivabile in $x=0$ e abbia derivata continua in $x=0$ segue da quanto provato già in (a).

(c) f non è derivabile due volte in $x=0$. (F).

Si ha $f'(x) = \begin{cases} \cos x - e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -\cos x + e^x & \text{se } x < 0. \end{cases}$ (visto in (2).

f' continua in $x=0$. Poiché $f''(x) = \begin{cases} -\sin x + e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ \sin x + e^x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

ed $\left. \begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = 1 &\Rightarrow f''_+(0) = 1 \\ \exists \lim_{x \rightarrow 0^-} f''(x) = 1 &\Rightarrow f''_-(0) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f''(0) = 1, \text{ cioè } f \text{ è deriv. 2 volte in } x=0$
(e inoltre f'' è continua in $x=0$)
coll. de l'Hôpital

8. $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\sin x} + \log\left(\frac{1-x}{e}\right)}{x^2 \sinh x} \right) 3^{\cosh x}$.

Oss. subito che $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3^{\cosh x} = 3^0 = 1$.

Inoltre $x^2 \sinh x = x^2 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = x^2 \cdot (x + o(x)) = x^3 + o(x^3)$ per

$x \rightarrow 0$. Allora usiamo al numeratore gli sviluppi di Taylor

fino all'ordine 3. Abbiamo

$$\left. \begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3!} + o(\sin^3 x), \\ \log(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned} \right\} \text{ per } x \rightarrow 0.$$

D'altra parte

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$

e quindi

$$\begin{aligned} e^{\sin x} + \log\left(\frac{1-x}{e}\right) &= \\ &= \left[\cancel{1} + \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^3 \right. \\ &\quad \left. + o(\sin^3 x) = o(x^3) \right] + \\ &\quad \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right] - \cancel{1} \\ &= \left[\cancel{x} - \frac{\cancel{x^3}}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{\cancel{x^3}}{6} + o(x^3) \right] + \left[\cancel{x} - \frac{\cancel{x^2}}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right] \\ &= -\frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Possiamo allora concludere che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\sin x} + \log\left(\frac{1-x}{e}\right)}{x^2 \sinh x} \right) 3^{\cosh x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{3} x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} \cdot 3^{\cosh x} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 3 = \underline{\underline{-1}}. \end{aligned}$$

9(a) Abbiamo la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\log(1+|x|) - 1)^n}{n \log^{\frac{3}{2}} n}.$$

Poniamo $t = \log(1+|x|) - 1$ e studiamo la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n}{n \log^{\frac{3}{2}} n}.$$

Perché abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \log^{\frac{3}{2}} n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n \log^{\frac{3}{2}} n}} = 1,$$

per il criterio della radice n -esima la serie di potenze in t ha raggio di convergenza $r=1$ e converge $\forall t \in]-1, 1[$. Poiché $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^{\frac{3}{2}} n}$ è convergente, la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n}{n \log^{\frac{3}{2}} n}$ converge anche per $t = -1$ (convergenza assoluta $\Rightarrow$ convergenza) e per $t = 1$. Perciò la serie in t converge $\Leftrightarrow$ si ha $t \in [-1, 1]$. Ricordando $t = \log(1+|x|) - 1$, la serie data è convergente se e solo se

$$0 \leq \log(1+|x|) \leq 2, \quad \text{sempre verificato!}$$

$$\text{ossia } 1 \leq 1+|x| \leq e^2, \text{ da cui } 0 \leq |x| \leq e^2 - 1.$$

Ricordiamo che l'insieme di convergenza è $E_x = [-e^2 + 1, e^2 - 1]$.

(b) E_x è limitato (V). □

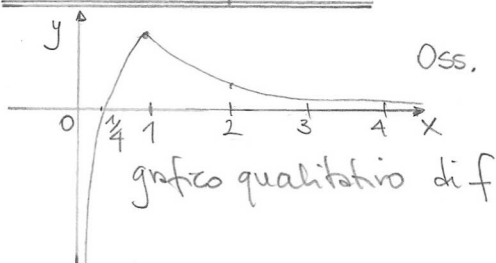
(c) E_x è un intervallo (V). ■

10. $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{x}} + 2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{1+x^2} & \text{se } x > 1. \end{cases}$

$F(x) = \int_1^x f(t) dt.$

(a) Determinate il pt. di minimo $x_0 \in]0, +\infty[$ di F . Si ha $x_0 = \frac{1}{4}$

Inoltre $F(x_0) = -\frac{1}{2}$.



Oss. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

$f \searrow \nearrow \begin{matrix} 0 & \frac{1}{4} & 1 & 2 & 3 & \dots \end{matrix} \rightarrow f$

f è continua su $]0, +\infty[$.

- (a) Dal teorema fond. del calcolo integrale si ottiene $F'(x) = f(x)$; quindi


 $x_0 = \frac{1}{4}$ pt. di minimo (assoluto) per F . Risultato

$$\begin{aligned} \underline{F\left(\frac{1}{4}\right)} &= \int_1^{\frac{1}{4}} f(t) dt = \\ &= - \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(-\frac{1}{\sqrt{t}} + 2\right) dt = \left[2t^{\frac{1}{2}} - 2t\right]_{\frac{1}{4}}^1 = \\ &= (2 - 2) - \left(2\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot \frac{1}{4}\right) = -1 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

- (b) Notiamo che $|f(x)| \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \rightarrow 0^+$. Quindi f è integrabile in senso improprio in un intorno destro di $x=0$. Segue che $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ esiste finito. Abbiamo

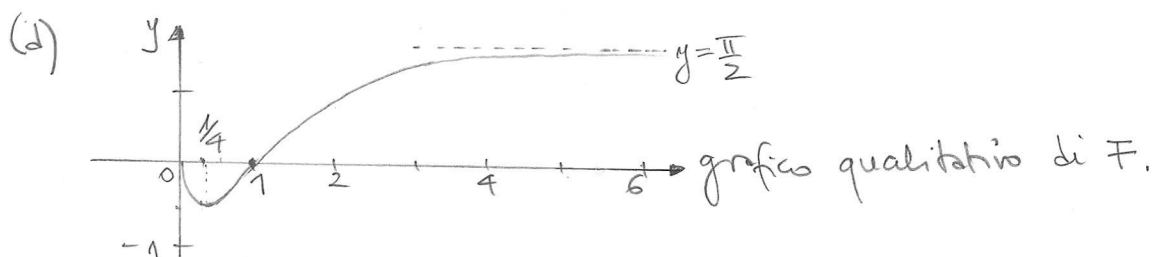
$$\begin{aligned} \underline{\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_1^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[- \int_x^1 \left(-\frac{1}{\sqrt{t}} + 2\right) dt \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[2t^{\frac{1}{2}} - 2t \right]_x^1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\sqrt{x} - 2x) = \underline{\underline{0}}. \end{aligned}$$

In particolare, F può essere estesa con continuità in $x=0$ (Si) ponendo $F(0) = 0$. □

- (c) Oss. che $f(x) \sim \frac{2}{x^2}$ per $x \rightarrow +\infty$; quindi f è integrabile in senso improprio su $[1, +\infty[$. Risultato

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{2}{1+t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 \arctan t \right]_1^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 \arctan x - 2 \arctan 1 \right] = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}. \end{aligned}$$

Ne segue che $\underline{y = \frac{\pi}{2}}$ è asintoto orizzontale per F , per $x \rightarrow +\infty$. □



11. (a) Abbiamo il sistema di eq.

$$(*) \quad \begin{cases} (\bar{z} + i) w^2 + (1 + 2i) w = 0 \\ w(w + \bar{z}) = -2i - 3. \end{cases}$$

Dalla 2^a eq. otteniamo subito che $w=0$ non dà soluzioni del sistema; questo ci permette di dividere la 1^a eq. per w ottenendo quindi

$$(\bar{z} + i) w + (1 + 2i) = 0,$$

da cui

$$(**) \quad \bar{z} w = -i w - 1 - 2i.$$

Sostituendo quest'espressione nella 2^a eq. di (*) si ottiene

$$w^2 - i w - 1 - 2i = -2i - 3,$$

ossia $w^2 - i w + 2 = 0.$

Questa è un'eq. di secondo grado a coefficienti complessi, le cui soluzioni sono

$$w_{1/2} = \frac{i \pm \sqrt{-1-8}}{2} = \frac{i \pm 3i}{2},$$

cioè $w_1 = -i$ e $w_2 = 2i$. Dalla (**) si ha

- per $w_1 = -i$ $\bar{z}_1(-i) = i^2 - 1 - 2i$

$$\bar{z}_1 = i^3 - i + 2 = 2 - 2i$$

e quindi $z_1 = 2 + 2i$.

- per $w_2 = 2i$ $\bar{z}_2(2i) = -i(2i) - 1 - 2i$

$$\bar{z}_2(2i) = 1 - 2i$$

$$\bar{z}_2 = -1 - \frac{i}{2}$$

e quindi $z_2 = -1 + \frac{i}{2}$.

In definitiva, il sistema (*) ha due soluzioni

$$(\hat{z}_1, \hat{w}_1) = (2 + 2i, -i) \quad \text{e} \quad (\hat{z}_2, \hat{w}_2) = (-1 + \frac{i}{2}, 2i). \quad \square$$

(b) $E = \{z \in \mathbb{C} : (z + \bar{z})(z^4 + 64) = 0\}$. Oss. che

$$z + \bar{z} = 0 \iff 2\operatorname{Re} z = 0 \iff 0 \iff \operatorname{Re} z = 0.$$

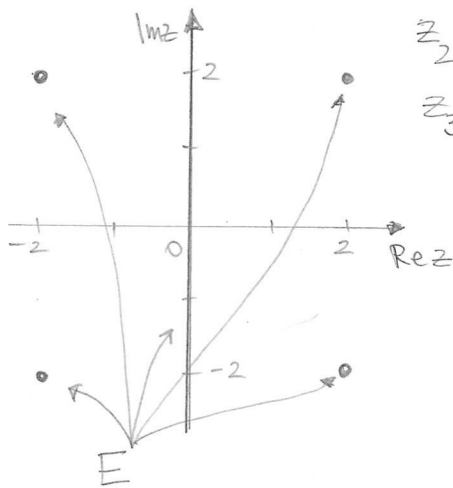
- $z^4 = -64 = 64e^{i\pi}$: le 4 radici complesse di -64 sono $z_k = \sqrt[4]{64} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4})} \quad k=0,1,2,3$
 $= \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})}$

$$\Rightarrow z_0 = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 + 2i$$

$$z_1 = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2 + 2i$$

$$z_2 = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2 - 2i$$

$$z_3 = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 - 2i$$



$$E = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\} \cup \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$

- (c) Notiamo che per $(\hat{z}_1, \hat{w}_1)$ soluzioni di (*) si ha che $\hat{z}_1 \in E$ e $\hat{w}_1 \in E$.

12. (a) $f(x) = \left| \log \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} \right) \right|$

- $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} > 0\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, 2x^2 + 2x + 1 > 0\}$
 $= \underline{\underline{\mathbb{R} \setminus \{0\}}}$.

- Oss. che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} f$.

Studiamo la funzione $h(x) = \log \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} \right)$ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

e otteniamo il grafico di f alla fine considerando

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : h(x) \geq 0 \\ -h(x) & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : h(x) < 0. \end{cases}$$

Abbiamo allora $h(x) = \log \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} \right)$.

$$= \log \left(\frac{2x^2 + 2x + 1}{2x^2} \right)$$

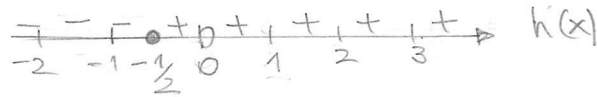
Notiamo che $\forall x \neq 0, \frac{2x^2 + 2x + 1}{2x^2} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 = 2x^2$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Quindi, conoscendo il segno della funzione logaritmica, possiamo

Concludere



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \log 1 = 0 \Rightarrow \underline{y=0 \text{ asintoto orizz, per } h,}$
per $x \rightarrow \pm \infty$.

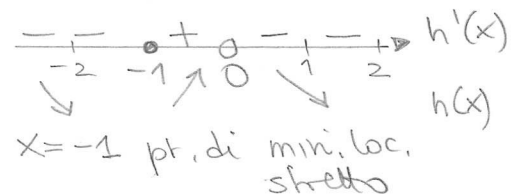
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \log\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \log\left(1 + \frac{1}{2x^2}(1+2x)\right) = +\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow \underline{x=0 \text{ asintoto verticale}}$
da destra (da sinistra) di h .

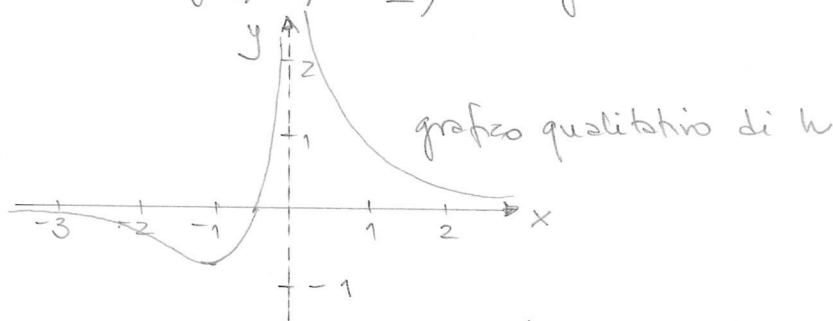
• $\text{dom } h' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{2x^3}\right) = \frac{-1}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) \\ &= \frac{-1}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}} \left(\frac{x+1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

Unico pt. critico per h $x=-1$



$$h(-1) = \log\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\right) = -\log 2 > -1.$$



* Studiamo ora $f(x) = |h(x)|$: notiamo che f ha in $x = -\frac{1}{2}$

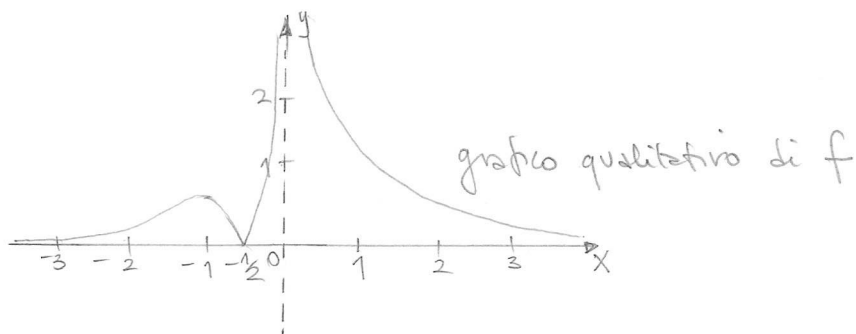
un pt. di minimo assoluto; $\min_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} f = 0$.

$x = -\frac{1}{2}$ è un pt. di non-differenziabilità per f

$$f'_+\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$$

$$f'_-\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

$x = -1$ è pt. di massimo loc. stretto per f , $\max_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} f = |\log 2|$.



□

(b) Sia $\alpha > 0$, $f|_{[1, +\infty[}(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right)$ continua > 0

Per $x \rightarrow +\infty$, $f(x^\alpha) \sim \frac{1}{x^\alpha}$.

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha > 1$, per il criterio del confronto asintotico possiamo concludere che

$$\int_1^{+\infty} f(x^\alpha) dx < +\infty \iff \alpha > 1.$$

□

(c) Abbiamo per $x > 0$, $f'(x) = -\frac{2x^2}{2x^2 + 2x + 1} \cdot \left(\frac{x+1}{x^3}\right)$

e quindi $f'(n) = -\frac{2n^2}{2n^2 + 2n + 1} \cdot \left(\frac{n+1}{n^3}\right) \quad \forall n \geq 1$.

Oss. che $|f'(n^\alpha)| \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$ per $n \rightarrow +\infty$.

Poiché la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} < +\infty \iff$

$2\alpha > 1$, ossia $\alpha > \frac{1}{2}$, per il criterio del confronto asintotico

(per le serie a termini positivi) possiamo concludere che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f'(n^\alpha) \text{ converge} \iff \alpha > \frac{1}{2}.$$

(se $\alpha \leq \frac{1}{2}$ la serie diverge negativ.)

■