$\boxed{A}$

COGNOME E NOME: ______________________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	3	2	3	2	2	2	3
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		**Totale**
Punti	3	3	3	5	5		36
Punti ottenuti							

1. (3 punti) (a) Determinate la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = e^{-x} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Si ha $y(x) =$ ______________________.

(b) Tracciate qui a fianco un grafico qualitativo di $y(x)$ nell'intorno di 0.

2. (2 punti) Calcolate

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} x \arcsin(\frac{\pi}{2} - \arctan x); \qquad L_2 = \lim_{n\to+\infty} (4n! + 3n^n) \arcsin(\frac{\pi}{2} - \arctan n^n)\,.$$

Allora $L_1 =$ ______ e $L_2 =$ ______.

3. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sqrt{|x|} & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ \arctan \dfrac{1}{x^2-1} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora $f(\mathbb{R}) =$ ______.

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) f è continua su tutto $\mathbb{R}$. ○ Vera ○ Falsa

(b) f ammette massimo e minimo. ○ Vera ○ Falsa

(c) $f|_{[-1,1]}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. ○ Vera ○ Falsa

Perché? ______________________________

(d) Esiste $x_0 \in]0, 1[$ tale che $f'(x_0) = \frac{\pi}{2}$. ○ Vera ○ Falsa

Perché? ______________________________

4. (2 punti) Sia

$$A = \int_0^1 (x-1)^2 \arctan x dx.$$

Allora $A = \frac{1}{6}(a + b\pi + c\log 2)$, dove $a =$ ______, $b =$ ______ e $c =$ ______.

5. (2 punti) Sia $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $f' > 0$ su $]-1, 2[$ e $f' < 0$ su $]2, 4[$. Stabilite quali delle seguenti affermazioni seguono dalle ipotesi (fornendo eventualmente un controesempio).
   (a) $f'(2) = 0$. ◯ Si ◯ No

   Perché? ______________________________

   (b) Se esiste $\lim_{x\to 2^-} f'(x)$, allora tale limite è finito. ◯ Si ◯ No

   Perché? ______________________________

   (c) $x = 2$ è un punto angoloso per f. ◯ Si ◯ No

   Perché? ______________________________

   (d) f è una funzione convessa (o concava) su $[-1, 4]$. ◯ Si ◯ No

   Perché? ______________________________

6. (2 punti) Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di numeri reali positivi tali che

$$a_n = o(b_n) \qquad n \to +\infty.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi (fornendo eventualmente un controesempio).
   (a) $a_n^2 = o(b_n)$ per $n \to +\infty$. ◯ Sì ◯ No

   Perché? ______________________________

   (b) $\sin a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$. ◯ Sì ◯ No

   Perché? ______________________________

   (c) $\sin^2(\frac{a_n}{b_n}) = o(\frac{a_n}{b_n})$ per $n \to +\infty$. ◯ Sì ◯ No

   Perché? ______________________________

   (d) $(a_n)_n$ è limitata superiormente. ◯ Sì ◯ No

   Perché? ______________________________

7. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \sin|x| + e^{-|x|}.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) La funzione f è derivabile in $x = 0$. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) La funzione $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) f non è derivabile due volte in $x = 0$.
◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____

8. (3 punti) Sia

$$L = \lim_{x \to 0^+} \Big(\frac{e^{\sin x} + \log(\frac{1-x}{e})}{x^2 \sinh x}\Big) 3^{\cosh x}.$$

Allora $L =$ ______.

9. (3 punti) Sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\big(\log(1+|\alpha|) - 1\big)^n}{n \log^{\frac{3}{2}} n}.$$

è convergente. Allora

(a) l'insieme $E_\alpha =$ ______________________.

(b) E_α è limitato. ◯ Vero ◯ Falso

(c) E_α è un intervallo. ◯ Vero ◯ Falso

10. (3 punti) Sia $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{x}} + 2 & \text{se } 0 < x \le 1 \\ \dfrac{2}{1+x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

e sia

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt.$$

(a) Determinate il punto di minimo $x_0 \in]0, +\infty[$ di F. Si ha $x_0 =$ ______. Inoltre $F(x_0) =$ ______.

(b) $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) =$ ______. F può essere estesa con continuità in $x = 0$? ◯ Si ◯ No

(c) La funzione F ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ di equazione $y =$ ______.

(d) Tracciate un grafico qualitativo di F qui a fianco.

Per i seguenti DUE esercizi è richiesto UN ACCURATO SVOLGIMENTO sui fogli a quadretti.

11. (5 punti) (a) Trovate le soluzioni $(\widehat{z}, \widehat{w}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ del seguente sistema di equazioni

$$(*) \qquad \begin{cases} (\overline{z} + \mathbf{i})w^2 + (1 + 2\mathbf{i})w = 0 \\ w(w + \overline{z}) = -2\mathbf{i} - 3. \end{cases}$$

(b) Individuate l'insieme $E = \{z \in \mathbb{C} : (z + \overline{z})(z^4 + 64) = 0\}$, e rappresentatelo nel piano di Gauss.

(c) Esiste una coppia $(\widehat{z}, \widehat{w})$ che sia soluzione di (*) e tale che $\widehat{z} \in E$ e $\widehat{w} \in E$?

12. (5 punti) (a) Studiate la funzione

$$f(x) = \left|\log(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2})\right|$$

(dominio, segno, limiti agli estremi del dominio, asintoti, punti di derivabilità/non derivabilità, monotonia e punti estremi) e tracciatene un grafico qualitativo.

(b) Discutete poi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, la convergenza dell'integrale improprio e della serie

$$\int_1^{+\infty} f(x^\alpha)dx\,; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} f'(n^\alpha).$$