

(A)

1. Vedi A2-21-07-Mat, Es. 1.

2. " , Es. 2

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = 3x + e^{\arctan x},$$

g la funzione inversa di f (oss. che f è strett. crescente e continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$; quindi f ammette inversa ed essa è continua). Notiamo che

$$g(1) = f^{-1}(1) = x \Leftrightarrow f(x) = 1, \text{ ossia } x = 0.$$

Poiché f è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 3 + \frac{1}{1+x^2} e^{\arctan x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

da $f'(0) = 4$ segue che $(f^{-1})'(1)$ esiste ed è $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}$.

L'eq. della retta tangente al grafico di f^{-1} nel pt. di ascissa 1 è data

da $y = f^{-1}(1) + (f^{-1})'(1)(x-1)$, per cui $y = 0 + \frac{1}{4}(x-1)$, ossia

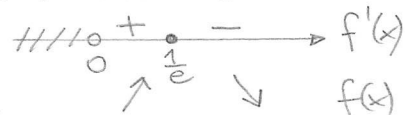
$$y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}, \text{ cioè } \underline{y = ax + b} \text{ con } \underline{a = \frac{1}{4}} \text{ e } \underline{b = -\frac{1}{4}}. \quad \blacksquare$$

4. Sia $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione data da $f(x) = \log_2 x - ex$. Sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. l'eq. $f(x) - \alpha = 0$, ossia $f(x) = \alpha$, ammette due soluzioni distinte.

Oss. che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Nota:
 $(\log(2x))' = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$

Inoltre, $\text{dom } f' = \text{dom } f$ e $f'(x) = \frac{1}{x} - e$. Risultava



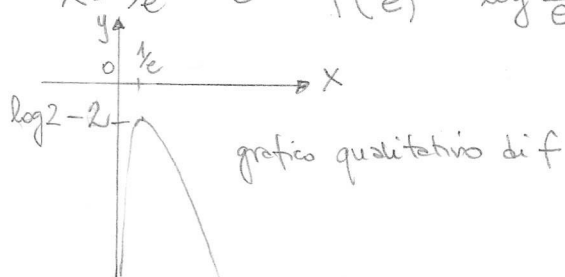
Allora f ammette massimo assoluto in

$$x = \frac{1}{e} \text{ e } f\left(\frac{1}{e}\right) = \log \frac{2}{e} - e \cdot \frac{1}{e} = \log 2 - 2 < 0; \text{ inoltre } f$$

è strett. crescente su $]0, \frac{1}{e}]$ e

strett. decrescente su $[\frac{1}{e}, +\infty[$.

$$\text{Risultava } \underline{E_\alpha =]-\infty, \log 2 - 2[}.$$



□

5. Vedi A2-21-07-Mat, Es. 3

6. " , Es. 5

$$7(2) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} dx^2 + 4x + \beta & \text{se } x \leq 2 \\ (x-2)^2 \log(x-2) & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Oss. f è continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; ora dobbiamo innanzitutto det.

di $\beta \in \mathbb{R}$ tale che f risulti continua in $x=2$: f risulta continua in $x=2$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2), \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \log(x-2) \stackrel{?}{=} 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (dx^2 + 4x + \beta) = 4d + 8 + \beta = f(2) \end{cases}$$

Nota:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \log t = 0 \quad [0 \cdot \infty]$$

che è equivalente a $\beta = -4d - 8$.

Allora

$$f(x) = \begin{cases} dx^2 + 4x - 4d - 8 & \text{se } x \leq 2 \\ (x-2)^2 \log(x-2) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}$ e in particolare in $x=2$. Questa funzione risulta agli intervalli $]-\infty, 2[$ e $]2, +\infty[$ è derivabile, poiché è ottenuta come somma, composizione e prodotto di funzioni derivabili. Oss. che la derivata prima f' di f per $x \neq 2$ è data da

$$f'(x) = \begin{cases} 2dx + 4 & \text{se } x < 2 \\ 2(x-2) \log(x-2) + (x-2) & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Poiché f è continua in $x=2$ e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, dal condizio del teorema di Lagrange (o di de l'Hôpital) otteniamo

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2dx + 4) = 4d + 4$$

e

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [2(x-2) \log(x-2) + (x-2)] = 0.$$

Perciò f è derivabile in $x=2$ se e solo se vale l'uguaglianza $4d + 4 = 0$, ossia $d = -1$. Segue $\beta = 4 - 8 = -4$ e $f'(2) = 0$. $\square$

(b) L'eq. della retta tangente al grafico di f nel pt. di ascissa $x=2$

ha eq. $y = f(2) + f'(2)(x-2)$, ossia $y = 0$.

Dunque $ax + by + c = 0$ con $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$. □

(c) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$? (Sì). $f'(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{se } x \leq 2 \\ 2(x-2)\log(x-2) + (x-2) & \text{se } x > 2 \end{cases}$

è continua su tutto $\mathbb{R}$ (in $x=2$ vedi (a)) ■

$$8. L_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(en)^n - n^{2n}}{(n-1)^{2n} + \log n^{n^2}} = \left[\frac{\infty - \infty}{\infty} \right]$$

Oss. che

$$\frac{(en)^n - n^{2n}}{(n-1)^{2n} + \log n^{n^2}} = \frac{n^{2n} \left(\frac{e^n}{n} - 1 \right)}{n^{2n} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} + \frac{n^2 \log n}{n^{2n}} \right]}$$

Ora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} = 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \log n}{n^{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n^{2n-2}} = 0$ (gerarchia degli infiniti); infine

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \stackrel{[1^\infty]}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2n \log(1 - \frac{1}{n})} = e^{-2}.$$

Quindi

$$\underline{L_2} = \frac{-1}{e^{-2}} = \underline{-e^2}.$$
 ■

9. Vedi A2-21-07-Mat, Es. 4.

10. " , Es. 6

11. (b) $y' + \frac{1}{x}y = \sin 2x$ su $]0, +\infty[$ (nota: consid. l'eq. diff. su $]0, +\infty[$ poiché abbiamo il dato iniziale per $x = \frac{\pi}{2}$)

↕

$y' = \underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{=a(x)} y + \underbrace{(\sin 2x)}_{=b(x)} \text{ su }]0, +\infty[$

La formula risolutiva per un'eq. diff. lineare del 1° ordine ci dà

$$y(x) = e^{-\log x} \left(c + \int (\sin 2x) e^{\log x} dx \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(c + \int x \sin 2x dx \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(c + \frac{\sin 2x}{4} - \frac{x \cos 2x}{2} \right).$$

integrando per parti

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{\sin 2x}_{g} dx &= -\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ &= -\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} (+ c') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-\log x} &= e^{\log \frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Imponendo $0 = y(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi} (C + \frac{\pi}{4})$ si ottiene $C = -\frac{\pi}{4}$

e la soluzione $\hat{y}(x)$ del pbm. di Cauchy dato è

$$\hat{y}(x) = -\frac{\pi}{4x} + \frac{\sin 2x}{4x} - \frac{\cos 2x}{2} \quad \text{su }]0, +\infty[.$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\hat{y}(x) + \frac{\pi}{4x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin 2x}{4x} - \frac{\cos 2x}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$

(c) Abbiamo che $\hat{y}(\frac{\pi}{2}) = 0$; inoltre dall'eq. diff. data segue subito

$$\hat{y}'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{\pi} \hat{y}(\frac{\pi}{2}) + \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \text{ovvero } \hat{y}'(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Oss. che $\hat{y} \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$; poiché $\hat{y}' = -\frac{1}{x} \hat{y} + \sin 2x$ su $]0, +\infty[$

si ha che $\hat{y} \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[)$ e quindi derivando l'eq. diff. rispetto a x si ha

$$\hat{y}''(x) = \frac{1}{x^2} \hat{y}(x) - \frac{1}{x} \hat{y}'(x) + 2 \cos 2x \quad \forall x \in]0, +\infty[.$$

Risulta, in particolare,

$$\begin{aligned} \hat{y}''(\frac{\pi}{2}) &= \frac{4}{\pi^2} \hat{y}(\frac{\pi}{2}) - \frac{2}{\pi} \hat{y}'(\frac{\pi}{2}) + 2 \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= -2. \end{aligned}$$

Il polinomio di Taylor di $\hat{y}(x)$ di ordine 2 centrato in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ risulta dunque $-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$.

12. (a) $f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{|x-4|-1}$

• $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : |x-4|-1 \geq 0\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} : x-4 \leq -1 \text{ o } x-4 \geq 1\}$
 $= \underline{\underline{]-\infty, 3] \cup [5, +\infty[}}.$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \sqrt{3-x} & \text{se } x \leq 3 \\ \frac{x}{2} \sqrt{x-5} & \text{se } x \geq 5. \end{cases}$$

• segno di f

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Nono asintoti orizzontali, obliqui, verticali per f .

• $\text{dom } f' = \text{dom } f \setminus \{3, 5\}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{3-x} - \frac{x}{4\sqrt{3-x}} & \text{se } x < 3 \\ \frac{1}{2} \sqrt{x-5} + \frac{x}{4\sqrt{x-5}} & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

• $f(x) \sim \frac{3}{2} \sqrt{3-x}$ per $x \rightarrow 3^-$
 $f(x) \sim \frac{5}{2} \sqrt{x-5}$ per $x \rightarrow 5^+$
 $x=3, x=5$ pt. di non-deriv.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2(3-x) - x}{4\sqrt{3-x}} & \text{se } x < 3 \\ \frac{2(x-5) + x}{4\sqrt{x-5}} & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{6-3x}{4\sqrt{3-x}} & \text{se } x < 3 \\ \frac{3x-10}{4\sqrt{x-5}} & \text{se } x > 5. \end{cases}$$

Dunque, per $x < 3$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ pt. critico per f

per $x > 5$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{10}{3} < 5$ non accettabile

Risulta che $x=2$ pt. di max loc. stretto perf

$$\underline{f(2) = 1.}$$

Abbiamo

$$\left. \begin{aligned} f'_-(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{6-3x}{4\sqrt{3-x}} = -\infty \\ f'_+(5) &= \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{3x-10}{4\sqrt{x-5}} = +\infty \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{ovvio! poich\u00e9} \\ &f(x) \sim \frac{3}{2}\sqrt{3-x} \text{ per } x \rightarrow 3^- \\ &f(x) \sim \frac{5}{2}\sqrt{x-5} \text{ per } x \rightarrow 5^+. \end{aligned}$$

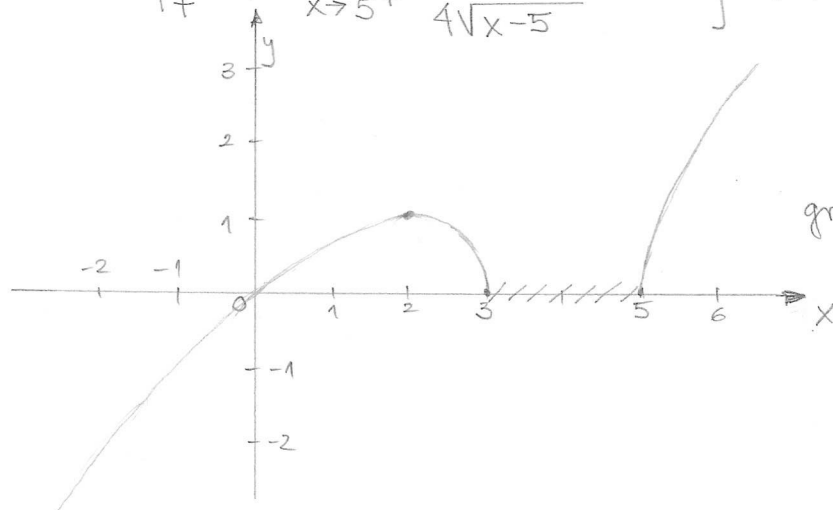


grafico qualitativo di f

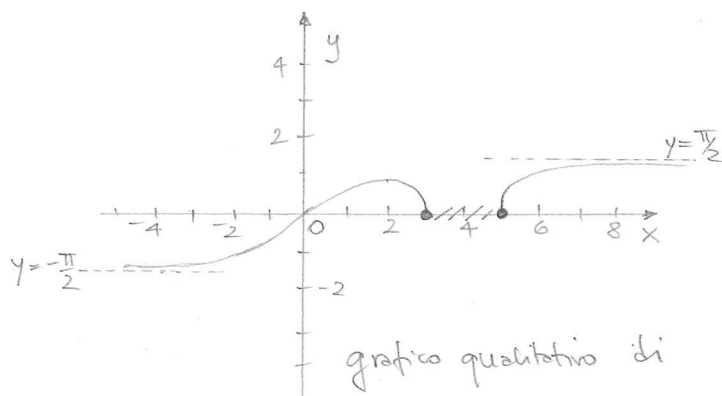


grafico qualitativo di
 $g(x) = \arctg(f(x))$

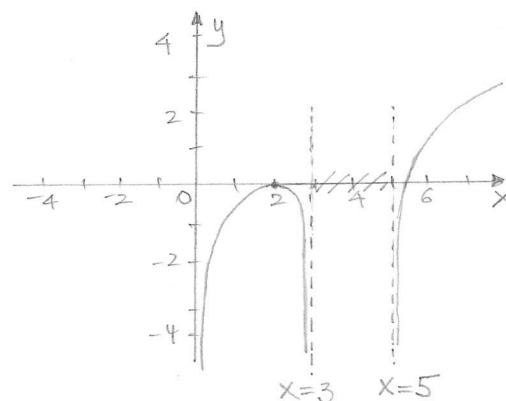


grafico qualitativo di
 $h(x) = \log(f(x))$

