A

COGNOME E NOME: ____________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	2	3	2	3	2	3	3
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		**Totale**
Punti	2	3	3	5	5		36
Punti ottenuti							

1. (2 punti) Risolvete in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(2z-1)^3 = 1. \qquad (*)$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o se è falsa.

(a) Esistono z_1, z_2 soluzioni di (*) tali che $z_1 = \overline{z_2}$. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) Esiste z soluzione di (*) tale che $\mathrm{Im}z = 0$. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) Tutte le soluzioni z di (*) soddisfano $|z| = \frac{1}{2}$. ◯ Vera ◯ Falsa

(d) Tutte le soluzioni z di (*) soddisfano $\mathrm{Re}z > 0$. ◯ Vera ◯ Falsa

2. (3 punti) Calcolate

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\Big(\cos\frac{1}{x}\Big)\log\Big(\int_1^x e^{3t}\arctan t\,dt\Big).$$

Allora $L_1 =$ ______.

3. (2 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x) = 3x + e^{\arctan x},$$

sia g la funzione inversa di f e sia $y = ax + b$ l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto di ascissa 1. Allora si ha

$a =$ ______, $\quad b =$ ______.

4. (3 punti) Sia $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione data da $f(x) = \log(2x) - ex$. Sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione

$$f(x) - \alpha = 0$$

ammette due soluzioni distinte. Allora $E_\alpha =$ __________.

5. (2 punti) Sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ per cui risulta convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x - \sin x)^{\frac{1}{5}}}{x^\alpha \sqrt{1 + x^\alpha}} dx.$$

Si ha $\inf E_\alpha =$______ e $\sup E_\alpha =$______.

6. (3 punti) Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di numeri reali positivi tali che

$$a_n = o(b_n) \qquad n \to +\infty.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi (fornendo eventualmente un controesempio).

(a) Se $(a_n)_n$ è infinitesima, allora anche $(b_n)_n$ lo è. ○ Sì ○ No

Perché? ______________________________

(b) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è convergente, allora anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ lo è. ○ Sì ○ No

Perché? ______________________________

(c) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, allora anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ lo è. ○ Sì ○ No

Perché? ______________________________

(d) Se $a_n b_{n+1} \geq a_{n+1} b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{b_n}$ è convergente. ○ Sì ○ No

Perché? ______________________________

7. (3 punti) Determinate $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + 4x + \beta & \text{se } x \leq 2 \\ (x-2)^2 \log(x-2) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

risulti continua e derivabile su $\mathbb{R}$. Allora

(a) $\alpha =$ ______ e $\beta =$ ______.

(b) l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 2$ ha equazione $ax+by+c = 0$, dove $a =$ ______, $b =$ ______ e $c =$ ______.

(c) La funzione $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$? Motivate la risposta.

____

8. (2 punti) Determinate

$$L_2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{(en)^n - n^{2n}}{(n-1)^{2n} + \log n^{n^2}}.$$

Allora $L_2 =$ ______.

9. (3 punti) Sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la serie

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \Big(\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) \log(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}) - 1 + e^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{n}} \Big)$$

è convergente. Allora

(a) l'insieme $E_\alpha =$ ________________________.

(b) E_α ammette massimo e minimo. ◯ Vero ◯ Falso

(c) E_α è un intervallo. ◯ Vero ◯ Falso

10. (3 punti) Sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e pari e $F_0 : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale definita da $F_0(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi (fornendo eventualmente un controesempio).

(a) f ammette un punto critico per il teorema di Rolle. ◯ Sì ◯ No

Perché? ____

(b) Il numero di punti di massimo di f è uguale al numero di punti di minimo di f. ◯ Si ◯ No

Perché? ____

(c) La funzione F_0 è una funzione dispari.
◯ Si ◯ No

Perché? ____

(d) La funzione F_0 è crescente su $[-1,1]$.
◯ Si ◯ No

Perché? ____

Per i seguenti DUE esercizi è richiesto UN ACCURATO SVOLGIMENTO sui fogli a quadretti.

11. (5 punti) (a) Determinate la soluzione $\widehat{y}(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{x} y = \sin 2x \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases}$$

(b) Calcolate il limite $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\widehat{y}(x) + \dfrac{\pi}{4x} \right)$.

(c) Determinate il polinomio di Taylor di $\widehat{y}(x)$ di ordine 2 centrato in $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

12. (5 punti) (a) Studiate la funzione

$$f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{|x-4| - 1}$$

(dominio, segno, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, punti di derivabilità/non derivabilità, monotonia e punti estremi) e tracciatene un grafico qualitativo.

(b) Tracciate poi un grafico qualitativo delle funzioni

$$g(x) = \arctan(f(x)) \qquad\qquad h(x) = \log(f(x)).$$