

(A)

1. Dobbiamo risolvere in $\mathbb{C}$ l'eq. $z^4 + z^2 - 2 = 0$ che ci scade equivalentemente $(z^2 - 1)(z^2 + 2) = 0$. Le soluzioni sono dunque $z = \pm 1$, $z = \pm \sqrt{2}i$.

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \pi + \arctan(x+1) & \text{se } x \leq -1 \\ -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} & \text{se } x \in]-1, 1[\\ \arctan(x-1) & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

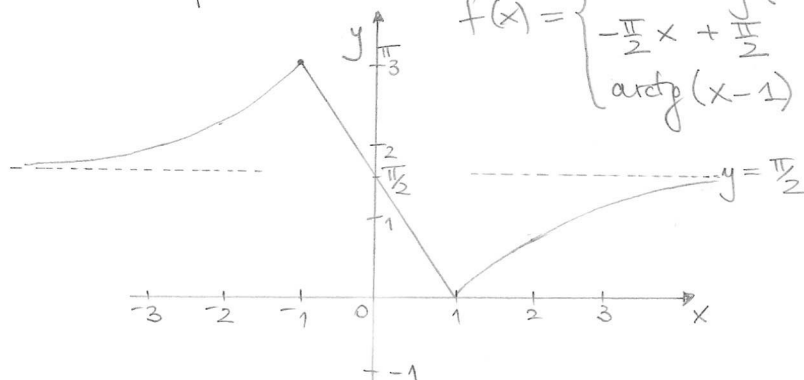


grafico qualitativo di f

- (a) $f(\mathbb{R}) = [0, \pi]$ è un intervallo chiuso e limitato Vera. ☐

- (b) Vera: $f|_{]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}$ è iniettiva. ☐

- (c) Falsa: $f|_{]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}$ non è una funzione crescente.

infatti, $\forall x_1, x_2 \in]-\infty, -1]$ mi ha che

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f|_{]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}(x_1) < f|_{]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}(x_2)$$

mentre $\forall x_1 \in]-\infty, -1]$, $x_2 \in [1, +\infty[$ mi ha

$$x_1 < x_2 \text{ e } f|_{]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}(x_1) > f|_{]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}(x_2)$$

- (d) Falsa: $x = -1$ è un pt. di massimo locale che è anche pt. di massimo globale;

$x = 1$ è un pt. di minimo locale che è anche pt. di minimo globale.

3. $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\arctan x} (\log(1+3x) - \ln 3x + x^2)}{1 - \cos \sqrt{x^3}} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$

Utilizzando gli sviluppi di Taylor per $t \rightarrow 0$ delle funzioni $\log(1+t)$,

int e sost otteniamo

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\arctan x} (3x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{3}x^3 + o(x^3))}{1 - 1 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \frac{27x^3}{\frac{x^3}{2}} = 54.$$

Allora L esiste finito $\Leftrightarrow \alpha = \frac{9}{2}$ e per tale α si ha $L = \frac{27}{\frac{1}{2}} = 54$. ■

4. $A = \{x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{e^k} ; n \in \mathbb{N}_{\geq 0}\}$

Oss. che $(x_n)_n$ è una successione crescente; abbiamo

$$\inf A = x_0 = \frac{1}{e^0} = 1, \quad \sup A = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^k} = \frac{1}{1 - (\frac{1}{e})} = \frac{e}{e-1}.$$

serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{e}$

$\inf A = \min A$, mentre $\sup A$ non è massimo. ■

5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Vera: f è derivabile in ogni $x \neq 0$ essendo rapporto di funz. deriv. (e il denominatore non si annulla) e somma di funz. derivabili, inoltre,

$$\forall x \neq 0, f'(x) = 1 + \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \quad \text{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2} = 1.$$

(b) Falsa: vedi (a). □

(c) Vera: Oss. che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x + \frac{\sin x}{x} \right] = 1 \neq f(0)$.

Quindi f non è continua in $x=0$. Dunque f non è derivabile in $x=0$, poiché f non è continua in $x=0$. □

(d) Vera: Posto $g(x) = \begin{cases} x + \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, si ha che $g \in \mathcal{C}^0([-a, a])$

e quindi Riemann integrabile su $[-a, a]$. Poiché $f(x) = g(x)$

$\forall x \neq 0$, possiamo concludere che f è Riemann integrabile su $[-a, a]$. ■

6. Sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \arccos \frac{1}{n^2}}{n^\alpha \log(1+n^n)}$$

risulta convergente. Poniamo $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2} \arccos \frac{1}{n^2}}{n^\alpha \log(1+n^n)}$, $\forall n \geq 2$.

Oss. che $a_n > 0 \quad \forall n \geq 2$

$$a_n \sim \frac{n^{2/3} \cdot \frac{\pi}{2}}{n^\alpha \log n^n} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \arccos \frac{1}{n^2} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+n^n)}{\log n^n} = 1$$

ossia $a_n \sim \frac{n^{2/3} \frac{\pi}{2}}{n^\alpha \cdot n \log n} = \frac{\frac{\pi}{2}}{n^{\alpha+1/3} \log n} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$

Ricordando che $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\beta \log n}$ è convergente $\Leftrightarrow \beta > 1$, per il criterio del confronto asintotico per serie a termini positivi segue che la serie data è convergente $\Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{3} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{2}{3}$.

Dunque $E_\alpha =]\frac{2}{3}, +\infty[$. Allora

(a) $\inf E_\alpha = \frac{2}{3}$, $\sup E_\alpha = +\infty$. □

(b) Falsa: L'insieme E_α non è limitato superiormente e quindi non è limitato. ■

7. Sia $g(x) = \int_{2x}^{3x} e^{-t^2} dt$. Grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale e al teorema di derivazione di funzioni composte segue che $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e quindi, in particolare $\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$. Inoltre,

$$g(0) = 0;$$

$$g'(x) = e^{-(3x)^2} (3x)' - e^{-(2x)^2} (2x)' = 3e^{-(3x)^2} - 2e^{-(2x)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

in particolare $g'(0) = 1$;

$$g''(x) = -2(3x) \cdot 3e^{-(3x)^2} + 2(2x) \cdot 4e^{-(2x)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

in particolare $g''(0) = 0$;

$$g'''(x) = -54e^{-(3x)^2} + 4(3x)^2 27e^{-(3x)^2} + 16e^{-(2x)^2} - 4(2x)^2 8e^{-(2x)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

in particolare $g'''(0) = -38$.

Pertanto, il polinomio di Taylor di g di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$

è dato da

$$P_{3,0}(x) = a + bx + c \frac{x^2}{2} + d \frac{x^3}{3!}$$

con $a = g(0) = 0$, $b = g'(0) = 1$, $c = g''(0) = 0$ e $d = g'''(0) = -38$. ■

8. (a) Discutete qui sotto la convergenza del seguente integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx.$$

Oss. che la funzione integranda è continua e positiva sull'intervallo di integrazione $[0, +\infty[$. Perciò la funzione è integrabile su ogni intervallo limitato della forma $[0, a]$ con $a > 0$. Inoltre per confronto abbiamo

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx < \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty$$

e quindi l'integrale dato è convergente. □

(b) Per def. dell'integrale improprio su un intervallo illimitato abbiamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx.$$

Usando il metodo di integrazione per funzioni razionali otteniamo

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{1}{(x+2)(x+3)} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\log(x+2) - \log(x+3) \right]_0^M = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\log\left(\frac{x+2}{x+3}\right) \right]_0^M \\ &= -\log\left(\frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{\log\left(\frac{3}{2}\right)}}. \end{aligned} \quad \text{■}$$

9. $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ funzione derivabile due volte in $]-1, 1[$.

Stabilite quali delle seg. affermazioni sono vere e quali sono false (fornendo eventualm. un controesempio).

(a) Se $f'' > 0$ su $]-1, 1[$, allora $\forall x, y \in]-1, 1[$ mi ha

$$\underline{[(x < y) \Rightarrow (f'(x) < f'(y))]} \quad \underline{\text{Vera:}}$$

Infatti, $f'' > 0$ su $]-1, 1[\Rightarrow f'$ funzione strett. crescente su $]-1, 1[$ e quindi $\forall x, y \in]-1, 1[$ mi ha $[(x < y) \Rightarrow (f'(x) < f'(y))]$. □

(b) Se $f''(x_0)=0$ per qualche $x_0 \in]-1,1[$, allora x_0 è un pt. di flesso. Falsa:

Basta considerare la funzione $f(x)=x^4$ su $]-1,1[$. Abbiamo $f''(x)=12x^2$ su $]-1,1[$ e $f''(0)=0$, ma $x=0$ non è un pt. di flesso. $\square$

(c) Se $\exists$ uno $x_1, x_2 \in]-1,1[$, $x_1 \neq x_2$ t.c. $f'(x_1)=f'(x_2)$, allora f' deve annullarsi in un pt. di $]-1,1[$. Vera:

dal
oppure dirett.
teor. di Rolle applicato
a $g(x)=f'(x)$.

Infatti, basta applicare il teorema di Lagrange alla funzione $g(x)=f'(x)$ sull'intervallo $[x_1, x_2]$. Ne segue che $\exists \xi_{x_1, x_2} \in]x_1, x_2[\subset]-1,1[$ tale che $\frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1} = f''(\xi_{x_1, x_2})$; poiché per ipotesi il membro destro di tale ugual. è zero, risulta $f''(\xi_{x_1, x_2})=0$. $\square$

(d) Se $\exists x_0 \in]-1,1[$ tale che $f'(x_0)=0$ e $f''(x) \geq 0 \forall x \in]-1,1[$,

allora x_0 è un pt. di minimo globale per f su $]-1,1[$. Vera:

Per ipotesi abbiamo che f è convessa su $]-1,1[$ e quindi $\forall x_1 \in]-1,1[$ si ha:

$$(*) \quad f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) \quad \forall x \in]-1,1[.$$

Consid. $x_1 = x_0$ dato sopra, da $(*)$ segue allora

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in]-1,1[$$

provando che x_0 è un pt. di minimo globale per f su $]-1,1[$. $\square$

$$10. \text{ Sia } f(x) = |x| \sin x = \begin{cases} x \sin x & \text{se } x \geq 0 \\ -x \sin x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Stabilite quali delle seg. affermazioni sono vere e quali sono false.

(a) f ha nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ un unicopt. di minimo e un unicopt. di massimo. Vera:

f ha un pt. di minimo e un pt. di massimo su $[0, \frac{\pi}{2}]$, poiché f è continua su $[0, \frac{\pi}{2}]$, intervallo chiuso e limitato (teor. di Weierstrass). Essi sono unici, poiché $f(x) = x \sin x$ è

strett. crescente su $[0, \frac{\pi}{2}]$. $\square$

(b) f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle su $[-\pi, \pi]$. Vera:

- f è continua su $[-\pi, \pi]$, poiché prodotto di due funzioni continue su $[-\pi, \pi]$;
- f è derivabile su $]-\pi, \pi[$: questo fatto è ovvio $\forall x \neq 0$, poiché allora f è prodotto di due funz. derivabili.

Per $x=0$ abbiamo facilmente $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| \sinh h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \cdot \sinh h = 0$ e quindi f è deriv. anche in $x=0$ e $f'(0)=0$.

- $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. $\square$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = -4$: Falsa: basta oss. che $f(x) = |x| \sin x$ è una funzione dispari su $[-\pi, \pi]$ e quindi $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$.

Ricordiamo che per ogni funz. dispari su $[-a, a]$, $a > 0$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_a^0 f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = 0. \end{aligned}$$

$\uparrow$
 f dispari

$\square$

(d) $f(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0^+$: Falsa:

$$\begin{aligned} \text{Infatti, per } x \rightarrow 0^+ \quad |x| \sin x &= x \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3!} + o(x^4) \end{aligned}$$

e quindi, per $x \rightarrow 0^+$, $f(x)$ è un infinitesimo di ordine 2 e non un infinitesimo di ordine superiore a 2. $\blacksquare$

11. (a) Determinate la soluzione $\hat{y}(x)$ del p.b.m. di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = 4 \cos 2x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

Oss. che si tratta di un'eq. diff. lineare del secondo ordine a coeff. costanti non omogenea, dove la parte non omogenea è data dalla funzione trigonometrica $4 \cos 2x$.

Ricordiamo che, data una qualsiasi soluzione particolare $\bar{y}$ dell'eq. differenziale $y'' + 4y = 4 \cos 2x$, l'insieme delle soluzioni dell'eq. diff. $y'' + 4y = 4 \cos 2x$ si ottiene dall'insieme delle soluzioni dell'eq. diff. omogenea associata $y'' + 4y = 0$ sommando $\bar{y}$ a ciascuna delle soluzioni dell'omogenea.

Risolviamo l'eq. omogenea $y'' + 4y = 0$. L'eq. caratteristica associata è $\lambda^2 + 4 = 0$, che ha soluzioni $-2i$ e $2i$. Perciò l'integrale generale dell'eq. diff. omogenea è dato da

$$y_h(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Per trovare una soluzione particolare dell'eq. diff. non omogenea usiamo il metodo di similarità. Poiché $2i$ è soluzione dell'eq. caratteristica cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. completa $y'' + 4y = 4 \cos 2x$ della forma

$$\bar{y}(x) = a x \cos 2x + b x \sin 2x \quad \text{con}$$

$a, b \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo che $\bar{y}$ sia soluzione dell'eq. diff. completa. Abbiamo

$$\bar{y}'(x) = a \cos 2x - 2ax \sin 2x + b \sin 2x + 2bx \cos 2x$$

e

$$\bar{y}''(x) = -4a \sin 2x - 4ax \cos 2x + 4b \cos 2x - 4bx \sin 2x.$$

Perciò otteniamo

$$\bar{y}'' + 4\bar{y} = 4 \cos 2x \iff -4a \sin 2x + 4b \cos 2x = 4 \cos 2x$$

$$\iff a=0, \quad b=1.$$

Quindi $\bar{y}(x) = x \sin 2x$ è una soluzione particolare dell'eq. diff. non omogenea. In conclusione, l'integrale generale dell'eq. diff. data è

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + x \sin 2x, \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Affinchè siano soddisfatte le condizioni iniziali $y(0)=1$ e $y'(0)=4$,

si deve avere

$$\begin{cases} 1 = c_1 \\ 4 = 2c_2, \end{cases}$$

cioè $c_1=1$ e $c_2=2$. La soluzione del pbm. di Cauchy è dunque la funzione su $\mathbb{R}$

$$\hat{y}(x) = \cos 2x + 2 \sin 2x + x \sin 2x. \quad \square$$

(b) Basta oss. che $\hat{y}(0)=1$ e $\hat{y}'(0)=4$, per cui l'eq. della retta tg al grafico di $\hat{y}$ nel pt. di ascissa $x_0=0$ data da $y = \hat{y}(0) + \hat{y}'(0)x$ risulta

$$\underline{y = 4x + 1.} \quad \square$$

(c) Abbiamo che $\hat{y}(0)=1$ e $\hat{y}'(0)=4$; inoltre dall'eq. diff. data segue subito

$$\hat{y}''(0) = -4\hat{y}(0) + 4 \cos 0, \quad \text{ossia } \hat{y}''(0) = 0.$$

Oss. che $\hat{y} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$; poichè $\hat{y}'' = -4\hat{y} + 4 \cos 2x$ su $\mathbb{R}$ si ha che $\hat{y} \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$ (anzi poi risulta $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) e quindi derivando l'eq. diff. rispetto a x si ha

$$\hat{y}''' = -4\hat{y}' - 8 \sin 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Risulta, in particolare,

$$\hat{y}'''(0) = -4\hat{y}'(0) = -16.$$

Il polinomio di Taylor di $\hat{y}$ di ordine 3 centrato in $x_0=0$ risulta

$$\underline{1 + 4x - \frac{8}{3}x^3.} \quad \blacksquare$$

12. (a) Oss. che la diseq. proposta

$$(*) \quad \operatorname{Im} \left(\frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-i} \right) \geq 1$$

ha senso, poiché $\operatorname{Im} \left(\frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-i} \right) \in \mathbb{R}$ per definizione. Impostiamo innanzitutto la condizione di esistenza $\bar{z} \neq i$, ossia $z \neq -i$.

Ponendo $z = x + iy$, dove x e y sono la parte reale e la parte immaginaria di z , rispettivamente, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-i} &= \frac{x-iy+1}{x-iy-i} = \frac{(x+1)-iy}{x-i(y+1)} = \\ &= \frac{(x+1)-iy}{x-i(y+1)} \cdot \frac{x+i(y+1)}{x+i(y+1)} = \frac{[(x+1)-iy] \cdot [x+i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{x(x+1)+y(y+1)+i[(x+1)(y+1)-xy]}{x^2+(y+1)^2}. \end{aligned}$$

$\forall w \in \mathbb{C}$,
ricordate che
 $w \cdot \bar{w} = |w|^2 \in \mathbb{R}$

Allora (*) possiamo riscriverla nella forma

$$\frac{(x+1)(y+1)-xy}{x^2+(y+1)^2} \geq 1,$$

ossia
$$\frac{x+y+1}{x^2+(y+1)^2} \geq 1.$$

Risulta allora $x+y+1 \geq x^2+(y+1)^2$

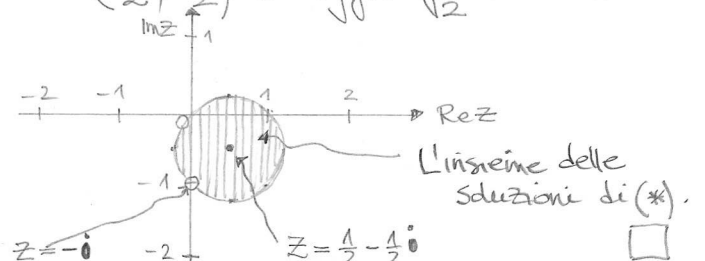
ossia $x^2+y^2+2y+1 \leq x+y+1$

da cui $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}.$

In definitiva, le soluzioni di (*) in forma algebrica $z = x+iy$, soddisfanno

$$\begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \\ (x, y) \neq (0, -1) \end{cases} \quad \leftarrow \text{corrisponde a } z \neq -i.$$

La rappresentazione grafica delle soluzioni nel piano complesso è quindi il cerchio chiuso di centro $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$ tolto il punto sul bordo $(0, -1)$.



(b) Sono delle soluzioni di (*) puramente immaginarie? (Si):

Infatti lo sono tutti gli $z = bi$ con $-1 < b < 0$. $\square$

(c) Sono delle soluzioni di (*) che hanno parte immaginaria nulla? (Si):

Infatti lo sono tutti gli $z = a$ con $0 \leq a \leq 1$. $\square$

(d) $z=0$ è soluzione di (*)? (Si).

Si può anche verificare che $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{-\dot{0}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\dot{0}}{1}\right) = 1$ e quindi

(*) è verificata da $z=0$. $\blacksquare$