$\boxed{A}$

COGNOME E NOME: ______________________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	2	3	3	2	3	3	3
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		**Totale**
Punti	3	3	3	4	4		36
Punti ottenuti							

1. (2 punti) Risolvete in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^4 + z^2 - 2 = 0.$$

Le soluzioni sono

____

2. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \pi + \arctan(x+1) & \text{se } x \leq -1 \\ -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} & \text{se } x \in \left]-1, 1\right[\\ \arctan(x-1) & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Tracciate qui accanto un grafico qualitativo di f.

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o se è falsa.

(a) L'immagine di f è un intervallo chiuso e limitato. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(b) La funzione $f|_{]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[}$ è una funzione iniettiva. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) La funzione $f|_{]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[}$ è una funzione crescente. ◯ Vera ◯ Falsa

(d) La funzione f ha punti di estremo locali che non sono punti di estremo globali. ◯ Vera ◯ Falsa

3. (3 punti) Determinate $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che esiste finito

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\arctan x}(\log(1+3x) - \sin 3x + \alpha x^2)}{1 - \cos\sqrt{x^3}}.$$

Allora $\alpha =$ ______ e per tale α si ha $L =$ ______.

4. (2 punti) Sia

$$A = \left\{ x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{e^k}; \quad n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \right\}.$$

Allora,

$\inf A =$ ______ e $\sup A =$ ______.

Perché? ______________________________

Essi sono minimo e massimo, rispettivamente?

Motivate la risposta: ______________________________

5. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) f è derivabile in ogni $x \neq 0$ ed esiste $\lim_{x \to 0} f'(x)$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(b) f non è derivabile in $x = 0$, poichè non esiste $\lim_{x \to 0} f'(x)$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(c) f non è derivabile in $x = 0$, poichè f non è continua in $x = 0$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(d) Per ogni $a \in \mathbb{R}_{>0}$ si ha che f è Riemann integrabile su $[-a, a]$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

6. (3 punti) Sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \arccos \frac{1}{n^2}}{n^\alpha \log(1 + n^n)}$$

risulta convergente. Allora

(a) $\inf E_\alpha =$ ______ e $\sup E_\alpha =$ ______

(b) L'insieme E_α è limitato. ◯ Vero ◯ Falso

7. (3 punti) Sia $g(x) = \displaystyle\int_{2x}^{3x} e^{-t^2}\, dt$.
Allora il polinomio di Taylor di g di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ è dato da
$$P_{3,0}(x) = a + bx + c\frac{x^2}{2} + d\frac{x^3}{3!}$$
con $a =$ ______, $b =$ ______, $c =$ ______ e $d =$ ______.

8. (3 punti) (a) Discutete qui sotto la convergenza del seguente integrale improprio
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+5x+6} dx.$$
____

(b) Usando la definizione determinate poi il suo valore. Si ha $I =$ ______.

9. (3 punti) Sia $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in $]-1,1[$. Stabilite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (fornendo eventualmente un controesempio).

(a) Se $f'' > 0$ su $]-1,1[$, allora $\forall x, y \in]-1,1[$ si ha $[(x < y) \Rightarrow (f'(x) < f'(y))]$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____

(b) Se $f''(x_0) = 0$ per qualche $x_0 \in]-1,1[$, allora x_0 è un punto di flesso. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____

(c) Se esistono due punti distinti $x_1, x_2 \in]-1,1[$ tali che $f'(x_1) = f'(x_2)$, allora f'' deve annullarsi in un punto di $]-1,1[$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____

(d) Se $\exists x_0 \in]-1,1[$ tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in]-1,1[$, allora x_0 è un punto di minimo globale per f su $]-1,1[$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____

10. (3 punti) Sia $f(x) = |x| \sin x$.
Stabilite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false.

(a) f ha nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ un unico punto di minimo e un unico punto di massimo.
◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____

(b) f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle su $[-\pi, \pi]$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = -4$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____

(d) $f(x) = o(x^2)$ per $x \to 0^+$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____

Per i seguenti DUE esercizi è richiesto UN ACCURATO SVOLGIMENTO sui fogli a quadretti.

11. (4 punti) (a) Determinate la soluzione $\widehat{y}(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = 4\cos 2x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

Si ha $\widehat{y}(x) =$ ______________________.

(b) L'equazione della retta tangente al grafico di $\widehat{y}$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$ risulta __________________

(c) Il polinomio di Taylor di $\widehat{y}$ di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ risulta __________________

12. (4 punti) (a) Determinate tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione

$$(*) \qquad \operatorname{Im}\left(\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-\mathbf{i}}\right) \geq 1.$$

Rappresentatele graficamente nel piano di Gauss.

(b) Esistono delle soluzioni di (*) puramente immaginarie? ◯ Si ◯ No

(c) Esistono delle soluzioni di (*) che hanno parte immaginaria nulla? ◯ Si ◯ No

(d) $z = 0$ è soluzione di (*)? ◯ Si ◯ No

Motivate tutte le risposte date in (b)-(d).