A

COGNOME E NOME: ______________________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Punti	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Punti ottenuti										

Esercizio	11	12	13	14	15	16	17	18	19	**Totale**
Punti	2	2	2	2	2	2	2	4	4	42
Punti ottenuti										

1. (2 punti) Sia $\mathcal{Q}(x,y,z)$ il predicato
$$x^2 \geq y+z.$$
Stabilite per ciascuna delle seguenti proposizioni se è vera o falsa.
(a) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{Q}(x,y,z)$ ◯ Vera ◯ Falsa
(b) $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z} : \quad \mathcal{Q}(x,y,z)$ ◯ Vera ◯ Falsa
(c) $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z} : \quad \mathcal{Q}(x,y,z)$ ◯ Vera ◯ Falsa
(d) $\forall y, z \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z} : \quad \mathcal{Q}(x,y,z)$ ◯ Vera ◯ Falsa

2. (2 punti) Sia $\widehat{w}$ il numero complesso soluzione del sistema $\begin{cases} w^3 = i \\ \mathrm{Re} w > 0. \end{cases}$
Sia $\widehat{z}$ il numero complesso soluzione del sistema $\begin{cases} z^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i \\ \mathrm{Re} z < 0. \end{cases}$
Allora $\mathrm{Im}(\widehat{w} - \widehat{z})$= ______.

3. (2 punti) Siano z_1 e z_2 le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione
$$z^2 - 4z + 4 + i = 0.$$
Allora
◯ $|z_1 - 2| \neq |z_2 - 2|$ ◯ $|z_1 - 2| = |z_2 - 2| < 1$ ◯ $|z_1 - 2| = |z_2 - 2| > 1$ ◯ $|z_1 - 2| = |z_2 - 2| = 1$

4. (2 punti) Il limite
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+\log_2 n} + n\cos(n!)}{\pi 2^{n-1} + n^2 \arctan n} \tan\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$
è uguale a ______.

5. (2 punti) Sia $(a_n)_n$ la successione di numeri reali definita da
$$a_n = \left(1 - \sin\frac{1}{n+1}\right)^{2n^3 \log(\cos\frac{1}{n})}.$$
Allora $\lim_{n\to+\infty} \log a_n =$ ______.

6. (2 punti) Siano
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4+2x^2}} = l_1\,; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x} + \log(1+6x) - 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}{\arcsin 2x} = l_2\,;$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos x}{2x - \pi} = l_3\,.$$
Allora si ha
◯ $l_1 < l_2$ e $l_2 = l_3$ ◯ $l_3 < l_2 < l_1$ ◯ $l_3 < l_1 < l_2$ ◯ nessuna delle relazioni indicate

7. (2 punti) Sia

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{\pi} \arccos(\frac{1}{n} - 1) : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\}.$$

Stabilite per ciascuna delle tre affermazioni se è vera o falsa.

(a) L'insieme A è limitato. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) L'unico punto di accumulazione per A è 1. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) L'insieme A è costituito solo da punti isolati. ◯ Vera ◯ Falsa

(d) Si ha $\inf A =$ ______. Esso è minimo? ◯ Sì ◯ No

(e) Si ha $\sup A =$ ______. Esso è massimo? ◯ Sì ◯ No

8. (2 punti) Sia $f : [-2, 0] \to \mathbb{R}$ una qualunque funzione continua con $f(-2) = 4$ e $f(0) = 1$. Allora la funzione $g(x) = \alpha x^2 + \beta$ interseca necessariamente il grafico di f nell'intervallo $]-2, 0[$ per

◯ $\alpha = \frac{3}{4}\,, \quad \beta = \frac{3}{2}$ ◯ $\alpha = 1\,, \quad \beta = 1$ ◯ $\alpha > \frac{7}{8}\,, \quad \beta = \frac{1}{2}$ ◯ $\alpha = -\frac{3}{4}\,, \quad \beta < 1$

9. (2 punti) Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) $\sin x = o(x \log x)$ per $x \to 0^+$. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) $\log^2(1 + x) = x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) $e^{\sin x} - 1 = \sin x + o(\sin x)$ per $x \to 0$. ◯ Vera ◯ Falsa

(d) $x = o(\sin \sqrt{x})$ per $x \to 0^+$. ◯ Vera ◯ Falsa

(e) $\tan x = o(x\sqrt{x})$ per $x \to 0^+$. ◯ Vera ◯ Falsa

10. (2 punti) Sia

$$f(x) = \frac{x}{1 + x}.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti espressioni se è corretta sì o no.

(a) $f(x) = x - x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. ◯ Sì ◯ No

(b) $x - f(x) \sim x^2$ per $x \to 0$. ◯ Sì ◯ No

(c) $x - f(x) \sim x^2$ per $x \to +\infty$. ◯ Sì ◯ No

(d) $f(x) - 1 \sim -\frac{1}{x}$ per $x \to -\infty$. ◯ Sì ◯ No

(e) $f(x) - 1 = o(1)$ per $x \to 0$. ◯ Sì ◯ No

11. (2 punti) Siano α e β i due numeri reali positivi per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\alpha x) + 1 & \text{se } x < 0 \\ \alpha^2 \log(1 + x) + \beta e^{-2x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

è derivabile in $x = 0$. Allora $\alpha =$ ______ e $\beta =$ ______.

12. (2 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ e^{-|x|+1} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti quattro affermazioni se è vera o falsa.

(a) $x = 0$ è un punto di continuità e di massimo locale per f. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) $x = 1$ è un punto di massimo locale per f, ma non di massimo assoluto. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) L'immagine di f è un intervallo. ◯ Vera ◯ Falsa

(d) Si ha $f'_-(1) =$ ______ e $f'_+(1) =$ ______.

(e) $(1, 1)$ è un punto angoloso per f. ◯ Vera ◯ Falsa

13. (2 punti) Sia $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x+e}\right).$$

per ciascuna delle seguenti quattro affermazioni se è vera o falsa.

(a) f è strettamente crescente su $]-1, +\infty[$. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) $y = 0$ è un asintoto orizzontale per f, per $x \to +\infty$. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) $\inf_{]-1,+\infty[} f = \lim_{x \to -1^+} f(x)$. ◯ Vera ◯ Falsa

(d) f è suriettiva. ◯ Vera ◯ Falsa

14. (2 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x|x| + 1 & \text{se } x < 0 \\ |x^3 - 1| & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti quattro affermazioni se è vera o falsa.

(a) La funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle su $[-1, 1]$. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) La funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass su $[0, 2]$. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) La funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange su $[0, 2]$. ◯ Vera ◯ Falsa

(d) f è $\mathcal{C}^1(]-1, 1[)$. ◯ Vera ◯ Falsa

15. (2 punti) Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.

(a) f può essere estesa ad una funzione continua su tutto $[a, b]$. ◯ Sì ◯ No

(b) Per ogni $x_0 \in]a, b[$ vale $\lim_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$. ◯ Sì ◯ No

(c) Se $|f'(x)| = -f'(x)$ per ogni $x \in]a, b[$, allora f è strettamente decrescente su $]a, b[$. ◯ Sì ◯ No

(d) Per ogni intervallo $[c, d] \subset]a, b[$ esiste $x_0 \in [c, d]$ tale che $f'(x_0) = 0$. ◯ Sì ◯ No

16. (2 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x) = e^{1+x} + 3x^3.$$

Sia f^{-1} la funzione inversa di f. Allora

(a) $\lim_{x \to +\infty} f^{-1}\left(\frac{ex + 1}{x + e^{-x}}\right) =$ ______.

(b) Sia $x + by + c = 0$ l'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto di ascissa e. Allora si ha $b =$ ______ e $c =$ ______.

17. (2 punti) Sia $f : [0, 1] \to [1, 2]$ una funzione derivabile tale che $f(0) = 1$ e $f(1) = 2$. Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.

(a) La funzione f ammette funzione inversa continua. ◯ Sì ◯ No

(b) La funzione f ha un punto critico in $[0, 1]$. ◯ Sì ◯ No

(c) $\exists x \in]0, 1[$ tale che $f'(x) = 1$. ◯ Sì ◯ No

(d) Sia $g(x) = f(x) - x$. Allora $\exists x \in]0, 1[$ tale $g'(x) = 0$. ◯ Sì ◯ No

Per i seguenti DUE esercizi è richiesto UN ACCURATO SVOLGIMENTO.

18. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione pari e crescente. Allora f è costante.

19. (4 punti) Sia $(a_n)_n$ la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} \quad n \geq 0. \end{cases}$$

(a) Provate, usando il principio di induzione, che $1 \leq a_n < 4$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(b) Provate che $(a_n)_n$ è strettamente crescente.

(c) Motivate l'esistenza del limite finito, per $n \to +\infty$, della successione $(a_n)_n$ e determinatelo.