

(A)

1) Sia $Q(x, y, z) = "x^2 \geq y+z"$.• $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}, Q(x, y, z)$ Falsa

Infatti, la sua negazione è una proposizione vera:

$$\text{non}[\forall x \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}, Q(x, y, z)] \Leftrightarrow$$

$$\exists x \in \mathbb{Z} : \forall z \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : \underbrace{\text{non } Q(x, y, z)}_{= [x^2 < y+z]}$$

basta prendere $x=0$, e preso $z \in \mathbb{Z}$ qualsiasi con $y = -z+1$

$$\text{si ha } 0 < (-z+1) + z = 1. \quad \square$$

• $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z} : Q(x, y, z)$ VeraInfatti, $\forall x \in \mathbb{Z}$ si ha $x^2 \geq 0$; quindi $\forall y \in \mathbb{Z}$ basta prendere $z = -y$ e si ha $x^2 \geq y+z$. $\square$ • $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z} : Q(x, y, z)$ VeraInfatti, basta prendere $x=0$, e preso $y \in \mathbb{Z}$ qualsiasi con $z = -y-1$ si ha $x^2 \geq z+y$. (basta anche solo $z = -y$). $\square$ • $\forall y, z \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z} : Q(x, y, z)$ VeraInfatti se $y+z \leq 0$ basta prendere un $x \in \mathbb{Z}$ qualsiasi e si ha $x^2 \geq 0 \geq y+z$.se $0 < y+z \leq 1$, basta prendere $x=1$;se $y+z > 1$, " $x=y+z$,e si ha $x^2 \geq y+z$. $\blacksquare$

$$2) \begin{cases} w^3 = i \\ \text{Re } w > 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} \text{le radici cubiche complesse di } i \\ w_k = \cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right) \quad k=0, 1, 2. \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\hat{w} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}}$$

$$\begin{cases} z^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \text{Re } z < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = e^{i\pi/3} \\ \text{Re } z < 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} \text{le radici quadrate complesse di } e^{i\pi/3} \\ z_k = \cos\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) \quad k=0, 1. \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\hat{z} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}} \quad \underline{\underline{\text{Im}(\hat{w} - \hat{z}) = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1}}$$

radici quadrate complesse di $-i$

$$3) z^2 - 4z + 4 + i = 0 \quad z_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(4+i)}}{2} = 2 \pm \sqrt{-i}$$

$$z_1 = 2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2}\right), \quad z_2 = 2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$$

$$\Rightarrow |z_1 - 2| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \quad |z_2 - 2| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.$$

Risposta corretta: $|z_1 - 2| = |z_2 - 2| = 1$. ■

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+\log_2 n} + n \cos(n!)}{\pi 2^{n-1} + n^2 \arctan n} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\frac{n 2^n + n \cos(n!)}{2^n \left(\frac{\pi}{2}\right) + n^2 \arctan n} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{2^n \left(1 + \frac{\cos(n!)}{2^n}\right)}{2^n \left(\frac{\pi}{2} + \frac{n^2 \arctan n}{2^n}\right)} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{1 + \frac{\cos(n!)}{2^n}}{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n^2 \arctan n}{2^n}\right)}\right) \cdot \left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}\right) \cdot 2\pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4.$$

$\begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow 1 \end{matrix}$

■

$$5) a_n = \left(1 - \sin \frac{1}{n+1}\right)^{2n^3 \log(\cos \frac{1}{n})}$$

Allora $2n^3 \log(\cos \frac{1}{n}) \log(1 - \sin \frac{1}{n+1})$

$$a_n = e$$

$$= e^{\frac{2n^3 \log(1 + (\cos \frac{1}{n} - 1))}{(\cos \frac{1}{n} - 1)} \cdot (\cos \frac{1}{n} - 1) \log(1 - \sin \frac{1}{n+1}) \cdot \left(-\sin \frac{1}{n+1}\right)}$$

$$= e^{\frac{2 \log(1 + (\cos \frac{1}{n} - 1))}{(\cos \frac{1}{n} - 1)} \cdot \frac{(\cos \frac{1}{n} - 1)}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{\log(1 - \sin \frac{1}{n+1})}{-\sin \frac{1}{n+1}} \cdot \left(\frac{-\sin \frac{1}{n+1}}{-\frac{1}{n+1}}\right) \cdot \left(\frac{-n}{n+1}\right)}$$

$\begin{matrix} \searrow 1 \\ \searrow -\frac{1}{2} \\ \searrow 1 \\ \searrow 1 \end{matrix}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{2 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-1)} = e. \text{ Dalla continuità della funzione}$$

$\log x$ segue infine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \log e = 1.$$
■

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4+2x^2}} = l_1$$

$$\frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4+2x^2}} \cdot \frac{\sqrt{\cos x} + 1}{\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4+2x^2}} \cdot \frac{\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4+2x^2}}{\sqrt{\cos x} + 1}$$

$$= \frac{\cos x - 1}{\cancel{4+x^2} - \cancel{4} - 2x^2} \cdot \frac{\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4+2x^2}}{\sqrt{\cos x} + 1} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \left(\right).$$

Quindi $\underline{l_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{4+4}}{1+1} = \underline{1}.$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x} + \log(1+6x) - 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}{\arcsin 2x} = l_2$
 $\left[\frac{0}{0} \right]$

$\frac{2\sqrt{x}(1-e^{\sqrt{x}}) + \log(1+6x)}{\arcsin 2x} = \frac{2x}{\arcsin 2x} \cdot \frac{(1-e^{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}} + \frac{\log(1+6x)}{6x} \cdot \frac{6x}{\arcsin 2x}$
 (L'Hôpital's rule annotations: $\frac{2x}{\arcsin 2x} \rightarrow 1$, $\frac{(1-e^{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}} \rightarrow -1$, $\frac{\log(1+6x)}{6x} \rightarrow 1$, $\frac{6x}{\arcsin 2x} \rightarrow 3$)

Quindi $\underline{l_2} = -1 + 3 = \underline{2}.$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4 \cos x}{2x - \pi} = l_3$
 $\left[\frac{0}{0} \right]$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4 \cos x}{2x - \pi} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{4 \cos(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{2})}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{4 \left[\cos \frac{y}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{y}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right]}{y}$
 $y = 2x - \pi \Rightarrow x = \frac{y}{2} + \frac{\pi}{2}$
 $= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} = -2.$
 (L'Hôpital's rule annotation: $\frac{-2 \sin \frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} \rightarrow -1$)

Quindi $\underline{l_3} = -2.$

Allora risulta $\underline{l_3} < l_1 < l_2.$

7) $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{n} - 1\right) : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\}.$

Oss. che $\frac{1}{n} - 1 \searrow -1$, $\arccos\left(\frac{1}{n} - 1\right) \nearrow \arccos(-1) = \pi$

Ne segue che

$\frac{(-1)^{2n}}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{2n} - 1\right) \nearrow \frac{\pi}{\pi} = 1$

$\frac{(-1)^{2n+1}}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{2n+1} - 1\right) \searrow -\frac{\pi}{\pi} = -1.$

(a) Vera: $A \subset [-1, 1].$

(b) Falsa: pt. di accumulazione di A sono -1 e 1.

(c) Vera

(d) $\inf A = -1$. Esso è minimo? No

(e) $\sup A = 1$. Esso è massimo? No.

8) $f: [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua con $f(-2) = 4$ e $f(0) = 1$.

$$g(x) = \alpha x^2 + \beta.$$

Consid. $f(x) - g(x) : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua. Oss. che

$$f(0) - g(0) = 1 - \beta \quad f(-2) - g(-2) = 4 - 4\alpha - \beta$$

- i) • Se $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{3}{2}$ $f(0) - g(0) = -\frac{1}{2}$ $f(-2) - g(-2) = 4 - \frac{3}{4} \cdot 4 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$
- ii) • Se $\alpha = 1$, $\beta = 1$ $f(0) - g(0) = 0$ $f(-2) - g(-2) = -1$
- Se $\alpha > \frac{7}{8}$, $\beta = \frac{1}{2}$ $f(0) - g(0) = \frac{1}{2} > 0$ $f(-2) - g(-2) = \frac{7}{2} - 4\alpha < 0$

Quindi, per il teorema di Jensen degli zeri $\exists x_0 \in]-2, 0[$ se $\alpha > \frac{7}{8}$

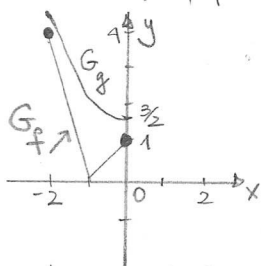
t.c. $f(x_0) - g(x_0) = 0$, ossia $\exists x_0 \in]-2, 0[$ t.c. $f(x_0) = g(x_0)$,

ossia $g(x) = \alpha x^2 + \frac{1}{2}$, $\alpha > \frac{7}{8}$ interseca necessariamente il grafico di f nell'intervallo $] -2, 0[$.

- iii) • Se $\alpha = -\frac{3}{4}$, $\beta < 1$

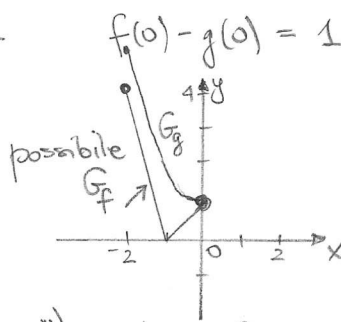
Graficamente

possibile



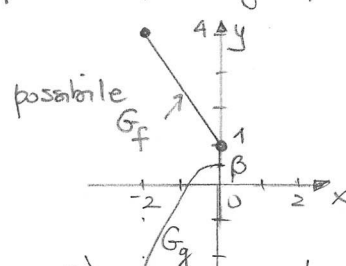
i) $\alpha = \frac{3}{4}$ $\beta = \frac{3}{2}$

Nessuna intersezione in $] -2, 0[$



ii) $\alpha = 1$, $\beta = 1$

Nessuna intersezione in $] -2, 0[$



iii) $\alpha = -\frac{3}{4}$ $\beta < 1$

Nessuna intersezione in $] -2, 0[$

9) (a) $\sin x = o(x \log x)$ per $x \rightarrow 0^+$. Vera:

$$\frac{\sin x}{x \log x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

(b) $\log^2(1+x) = x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$. Vera:

$$\frac{\log^2(1+x) - x^2}{x^2} = \left(\frac{\log(1+x)}{x} \right)^2 - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

(c) $e^{\sin x} - 1 = \sin x + o(\sin x)$ per $x \rightarrow 0$. Vera:

$$\frac{e^{\sin x} - 1 - \sin x}{\sin x} = \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

(d) $x = o(\sin \sqrt{x})$ per $x \rightarrow 0^+$ (Vera):

$$\frac{x}{\sin \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} \sqrt{x}}{\sin \sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

(e) $\tan x = o(x\sqrt{x})$ per $x \rightarrow 0^+$ (Falsa):

$$\frac{\tan x}{x\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

10) Sia $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

(a) $f(x) = x - x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$ (Sì):

infatti $\frac{x}{1+x} - x + x^2 = \frac{x - x + x^2 + x^3}{1+x} = \frac{x^3}{1+x} = o(x^2)$ poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{(1+x)x^2} = 0.$$

(b) $x - f(x) \sim x^2$ per $x \rightarrow 0$ (Sì):

infatti $x - \frac{x}{1+x} = \frac{x + x^2 - x}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \sim x^2$ per $x \rightarrow 0$

poiché $\frac{x^2}{(1+x)x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$

(c) $x - f(x) \sim x^2$ per $x \rightarrow +\infty$ (No):

infatti $x - \frac{x}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$. Ora $\frac{x^2}{(1+x)x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 (\neq 1).$

(d) $f(x) - 1 \sim -\frac{1}{x}$ per $x \rightarrow -\infty$ (Sì):

infatti $\frac{x}{1+x} - 1 = \frac{x - 1 - x}{1+x} = \frac{-1}{1+x} \sim -\frac{1}{x}$ per $x \rightarrow -\infty$

poiché $\frac{-1}{1+x} \cdot \frac{-x}{-x} = \frac{x}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1.$

(e) $f(x) - 1 = o(1)$ per $x \rightarrow 0$ (No):

infatti $\frac{x}{1+x} - 1 = \frac{x - 1 - x}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1 (\neq 0).$

11) $f(x) = \begin{cases} \arctg(\alpha x) + 1 & \text{se } x < 0 \\ \alpha^2 \log(1+x) + \beta e^{-2x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Dobbiamo innanzitutto det. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ tale che f è continua in $x=0$: f è continua in $x=0 \iff \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$,
 $\iff \lim_{x \rightarrow 0^-} [\arctg(\alpha x) + 1] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\alpha^2 \log(1+x) + \beta e^{-2x}] = \beta$

$$1 = \beta.$$

Allora $f(x) = \begin{cases} \arctg(\alpha x) + 1 & \text{se } x < 0 \\ \alpha^2 \log(1+x) + e^{-2x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è continua in $x=0$.

f risulta derivabile in $x=0$ se sono finiti i due limiti

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} \quad \text{e sono uguali.}$$

Ora

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\arctg(\alpha h) + 1 - 1}{h} = \alpha$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\alpha^2 \log(1+h) + e^{-2h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\alpha^2 \frac{\log(1+h)}{h} + \frac{e^{-2h} - 1}{h} \right] = \alpha^2 - 2.$$

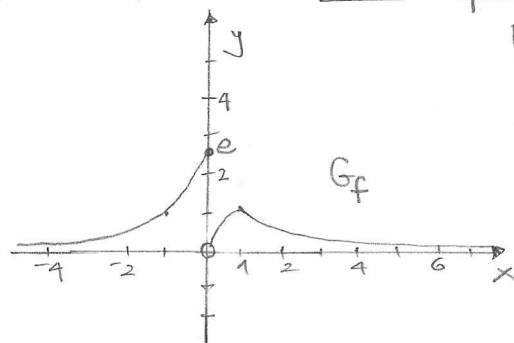
Quindi f è derivabile in $x=0 \iff \alpha^2 - 2 = \alpha \iff \alpha^2 - \alpha - 2 = 0$

$\iff \alpha = -1$ o $\alpha = 2$. Quindi la risposta al quesito è $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

12) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ e^{-|x|} + 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{x+1} & \text{se } x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ e^{-x+1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$



Oss. $-x^2 + 2x = -(x^2 - 2x) = -(x-1)^2 + 1$.

(a) $x=0$ è un pt. di continuità e di massimo locale per f **Falsa**:

$x=0$ non è un pt. di continuità! $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + 2x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{x+1} = e$.

(b) $x=1$ è un pt. di massimo locale per f , ma non è di massimo assoluto

(c) L'immagine di f è un intervallo **Vera**: $\text{im } f =]0, e]$. **Vera**. (leggere dal grafico)

(d) $x=1$ pt. di continuità per f . Poiché $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x + 2) = 0$

dal collaudo di Lagrange segue $\underline{\underline{f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 0}}$.

Poichè $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -e^{-x+1} = -1$, dal collaudo di Lagrange segue

$$\underline{\underline{f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -1}}$$

(e) $(1,1)$ è un pt. angoloso per f Vera:

f è continua in $x=1$; Sono finiti $f'_-(1)$, $f'_+(1)$ e $f'_-(1) \neq f'_+(1)$.

13) $f:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x+e}\right)$.

(a) f è derivabile su $] -1, +\infty[$. Abbiamo $f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x+e}} \cdot \frac{(x+e) - (x+1)}{(x+e)^2}$
ossia $f'(x) = \frac{e-1}{(x+1)(x+e)} > 0$ su $] -1, +\infty[$.

$\Rightarrow$ f è strettamente crescente su $] -1, +\infty[$ Vera.

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log\left(\frac{x+1}{x+e}\right) = \log 1 = 0$.

$\Rightarrow$ $y=0$ è un asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$ Vera.

(c) $\inf_{]-1, +\infty[} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ Vera:

f è una funzione crescente su $] -1, +\infty[$, e quanto asserito

in (c) segue dal teorema di Feura del limite per funzioni monotone.

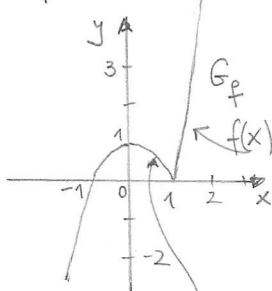
(d) f è suriettiva Falsa:

f strett. crescente con $\inf f = \lim_{x \rightarrow -1^+} \log\left(\frac{x+1}{x+e}\right) = -\infty$.

$\sup f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log\left(\frac{x+1}{x+e}\right) = \log 1 = 0$.

$\Rightarrow \text{im} f =] -\infty, 0[\neq \mathbb{R}$.

14) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



$$f(x) = \begin{cases} x|x| + 1 & \text{se } x < 0 \\ |x^3 - 1| & \text{se } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } x < 0 \\ |x^3 - 1| & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$f(x) = x^3 - 1$ su $[1, +\infty[$

(a) f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle su $[-1, 1]$

Vera:

$f(x) = -x^3 + 1$ su $[0, 1]$

f continua su $[-1,1]$, derivabile su $] -1,1[$ ($f'_-(0)=f'_+(0)=0$ e quindi derivabile anche in $x=0$), $f(-1)=f(1)=0$. $\square$

(b) f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass su $[0,2]$ (Vera):
 f è continua su $[0,2]$.

(c) f soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange su $[0,2]$ (Falsa):
 f non è derivabile in $x_0=1 \in]0,2[$.

(d) $f \in \mathcal{C}^1(]-1,1[)$ (Vera):
 f è continua su $] -1,1[$; $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 0 \\ -3x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
 f' è continua su $] -1,1[$. Risulta che $f \in \mathcal{C}^1(]-1,1[)$. $\blacksquare$

15) $f:]a,b[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile.

(a) f può essere estesa ad una funzione continua su tutto $[a,b]$ (No)
Es. $f:]0,1[\rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$ derivabile. Non può essere estesa con continuità su $[0,1]$.

(b) $\forall x_0 \in]a,b[$ vale $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$ (No)
Es. $f:]-1,1[\rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
 Allora f è derivabile su $] -1,1[$, $f'(0)=0$ ma $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.
 $(f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \leftarrow \text{si prova usando la def. di derivata.})$.

(c) Se $|f'(x)| = -f'(x) \forall x \in]a,b[$, allora f è strett. decrescente su $]a,b[$ (No)

Da $|f'(x)| = -f'(x) \Rightarrow f'(x) \leq 0$ su $]a,b[$; quindi f è sicuramente decrescente su $]a,b[$, ma non è detto che sia strett. decrescente (può avere tratti "piatti" con $f'(x)=0$).

(d) $\forall$ intervallo $[c,d] \subset]a,b[\exists x_0 \in [c,d]$ t.c. $f'(x_0)=0$ (No)
Es. $f(x) = x$ su $]0,1[$; abbiamo $f'(x) = 1 \forall x \in]a,b[$

e $\forall [c, d] \subset]0, 1[$ si ha $f'(x) = 1 \quad \forall x \in [c, d]$. ■

16) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = e^{1+x} + 3x^3$ f continua e strett. crescente
 f ammette inversa e essa è continua. Allora

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(\frac{ex+1}{x+e^{-x}}\right) = f^{-1}(e) = 0$ (poiché $f(0) = e$)

(b) $f'(x) = e^{1+x} + 9x^2$; risulta $f'(0) = e \neq 0$. Allora

$$(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e}.$$

L'eq. della retta tg al grafico di f^{-1} nel pt. di ascissa e è data da

$$y = f^{-1}(e) + (f^{-1})'(e)(x - e), \text{ per cui}$$

$$y = 0 + \frac{1}{e}(x - e) \text{ e quindi } ye = x - e, \text{ ossia } x - ye - e = 0.$$

La risposta al quesito dato è quindi $b = -e$ e $c = -e$. ■

17) $f: [0, 1] \rightarrow [1, 2]$ derivabile t.c. $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

(a) La funzione f ammette funzione inversa continua (No)

Non è detto che f sia biettiva, e quindi non è detto che $\exists$ inversa.

(b) La funzione f ha un pt. critico in $[0, 1]$ (No)

Basta prendere $f(x) = x + 1$ su $[0, 1]$ $f'(x) = 1 \neq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$.

(c) $\exists x \in]0, 1[$ tale che $f'(x) = 1$ (Si)

Segue dal teorema di Lagrange: $\exists x \in]0, 1[$ t.c.

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(x)$$

$$\underbrace{\quad}_{=1}$$

→ sono soddisfatte tutte le ipotesi del teor. di Lagrange
 $(f \text{ deriv. su } [0, 1] \Rightarrow f \text{ continua su } [0, 1])$

(d) $g(x) = f(x) - x$. Allora $\exists x \in]0, 1[$ t.c. $g'(x) = 0$ (Si)

g è continua su $[0, 1]$, derivabile su $[0, 1]$, $g(0) = 1$ $g(1) = 1$

$\Rightarrow$ per il teorema di Rolle $\exists x \in]0, 1[$ t.c. $g'(x) = 0$. ■

18) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione pari e crescente. Allora f è costante.

Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. Poiché f è crescente segue $f(x_1) \leq f(x_2)$

D'altra parte $-x_1 > -x_2$. Dalla crescenza segue $f(-x_2) \leq f(-x_1)$.

Poiché f è pari, $f(-x_2) = f(x_2)$ e $f(-x_1) = f(x_1)$ quindi si ha

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) \leq f(x_1).$$

Dunque $f(x_1) = f(x_2)$.

Dall'arbitrarietà di $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ segue che f è costante. ■

19)
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} \end{cases} \quad n \geq 0.$$

(a) Provate, usando il principio di induzione che $\underbrace{1 \leq a_n < 4}_{P(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

i) $1 \leq a_0 < 4$ $P(0)$ vera ✓

ii) Preso un $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi, e supposto vero $P(n)$ proviamo che è

vero $P(n+1)$: Abbiamo $1 \leq a_n < 4 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{a_n} < 2$ ($\sqrt{x}$ strett. crescente)
(ipotesi induttiva) $\Rightarrow 2 \leq 2\sqrt{a_n} < 4$

$$\Rightarrow 1 \leq 2 \leq a_{n+1} < 4.$$

$\Rightarrow$

Dal principio di induzione segue che $1 \leq a_n < 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Provate che (a_n) è strett. crescente, ossia $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Notiamo che $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_n < 2\sqrt{a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow a_n^2 < 4a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (x^2 \text{ strett. crescente su } [0, +\infty[)$$

$$\Leftrightarrow a_n(a_n - 4) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e questo è vero per (a).

(c) Essendo $(a_n)_n$ una successione crescente e limitata superiormente, per il teorema di Jensen del limite per funzioni monotone segue che $(a_n)_n$ ammette limite finito $l > 0$. Passando al limite nell'eq. $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} \quad n \geq 0$ segue $l = 2\sqrt{l}$, ossia

$l^2 - 4l = 0$; poiché $l > 0$, concludiamo che $l = 4$, ossia
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 4$. 

(B) 18) Lo svolgimento è analogo a quello in 18). (A).

19) (a) (b) si svolge analog. all' Es. 19 (a) (b) in (A).

(c) Determiniamo il limite $l > 0$. Passando al limite nell'eq.

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad n \geq 0 \quad \text{segue} \quad l = \sqrt{2 + l} , \text{ ossia}$$

$l^2 = 2 + l$ ossia $l^2 - l - 2 = 0$; poiché $l > 0$, concludiamo
 che $l = 2$, ossia $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$. 