

(A)

1. $f: [-4, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \log(x^3 + 4x^2 - 3x + 2)$.

Oss. che f è una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato.

Per il teorema di Weierstrass essa assume massimo e minimo (assoluti) in $[-4, 0]$. Essi possono essere assunti in un pt.

critico interno all'intervallo $[-4, 0]$ oppure negli estremi dell'intervallo visto che f è derivabile in $] -4, 0[$. Inoltre,

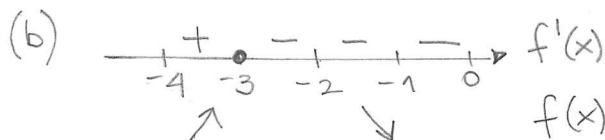
$$f([-4, 0]) = [\min_{[-4, 0]} f, \max_{[-4, 0]} f].$$

Allora

(a) f ha un pt. critico in $x = -3$:

$$\text{infatti } f'(x) = 0 \text{ in }] -4, 0[\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 8x - 3 = 0 \\ x \in] -4, 0[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 36}}{6} = \begin{cases} \frac{-8 + 10}{6} = \frac{1}{3} \\ -\frac{18}{6} = -3 \end{cases} \\ x_{1/2} \in] -4, 0[\end{cases} \Rightarrow x = -3. \quad \square$$



Poiché $f(-4) = \log(-64 + 4 \cdot 16 + 12 + 2) = \log 14$,

$$f(0) = \log 2,$$

possiamo concludere che f ha un pt. di massimo assoluto in $x = -3$

e un pt. di minimo assoluto in $x = 0$. $\square$

(c) $f([-4, 0]) = [\log 2, \log 20]$ ($a=2, b=20$). $\square$

(d) la funzione $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ è crescente su $[-4, 0]$ Vera
Poiché f è continua su $[-4, 0]$, dal TFC segue $F'(x) = f(x)$ su $[-4, 0]$. Poiché $f(x) > 0$ su $[-4, 0]$, mi ha $F'(x) > 0$

sull'intervallo $[-4, 0]$ e quindi $F(x)$ è strettamente crescente su $[-4, 0]$. ■

2. Sia $y: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la soluzione del pbm. di Cauchy

$$y' = y^2 - 2 \cos x \quad \text{su } I$$

$$y(0) = 1.$$

Dall'eq. diff. segue $y'(0) = y^2(0) - 2 \cos 0$, ossia $y'(0) = 1 - 2 = -1$.

Inoltre risulta $y \in \mathcal{C}^k(I) \quad \forall k \geq 1$. Infatti, essendo $f(x, y) = y^2 - 2 \cos x$ continua su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il teorema di Cauchy garantisce l'esistenza e l'unicità di $y(x) \in \mathcal{C}^1(I)$, I intervallo contenente 0. Dall'eq.

$y' = y^2 - 2 \cos x$ risulta allora che $y' \in \mathcal{C}^1(I)$, poiché $y^2(x) - 2 \cos x \in \mathcal{C}^1(I)$, dunque $y \in \mathcal{C}^2(I)$. Ripetendo questo ragionamento segue $y \in \mathcal{C}^k(I) \quad \forall k \geq 1$. Allora possiamo derivare in I l'eq.

$y' = y^2 - 2 \cos x$ k -volte, $k \in \mathbb{N}$ arbitrario. In particolare, si ha

$$(*) \quad y'' = 2yy' + 2 \sin x \quad x \in I$$

da cui $y''(0) = 2y(0)y'(0) + 2 \sin 0$, ossia $y''(0) = 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -2$.

Derivando ulteriormente $(*)$ si ottiene

$$y''' = 2y'^2 + 2yy'' + 2 \cos x \quad x \in I$$

e quindi $y'''(0) = 2(y'(0))^2 + 2y(0)y''(0) + 2 \cos 0$; ne segue

$$y'''(0) = 2(-1)^2 + 2 \cdot 1 \cdot (-2) + 2 = 0.$$

Allora

$$\begin{aligned} \underline{\underline{P_{3,0}(x)}} &= \sum_{k=0}^3 \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 \\ &= 1 - x - \frac{2}{2}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 = 1 - x - x^2, \end{aligned}$$

ossia $\underline{\underline{P_{3,0}(x) = a + bx + c \frac{x^2}{2} + d \frac{x^3}{3!}}}$ con $\underline{\underline{a=1, b=-1, c=-2, d=0}}$.

3. Dobbiamo calcolare $A = \int_e^{e^2} \frac{\log(\log x)}{x} dx$.

$$\begin{aligned} \text{Abbiamo } \int_e^{e^2} \frac{\log(\log x)}{x} dx &= \int_1^{e^2} \frac{\log t}{t} \cdot \frac{e^t}{e^t} dt = \int_1^{e^2} \log t \, dt = \\ &\quad \begin{matrix} \uparrow \\ t = \log x \\ x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt \end{matrix} \end{aligned}$$

$$= \int_1^{e^2} 1 \cdot \log t \, dt = \left[t \log t - t \right]_1^{e^2} = e^2 \log e^2 - e^2 + 1 = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1.$$

↑
integrando per parti

Allora $A = ae^b + c$ con $a=1, b=2, c=1.$ ■

$$4. L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin 2x} (e^{t^2} - 1) dt}{\left(\operatorname{arctg} \frac{x^3}{3} \right)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{\left[e^{(\sin 2x)^2} - 1 \right] \cdot 2 \cos 2x}{\frac{1}{1 + \left(\frac{x^3}{3} \right)^2} \cdot \cancel{3} \frac{x^2}{\cancel{3}}} = \\ &= \frac{e^{(\sin 2x)^2} - 1}{(\sin 2x)^2} \cdot \frac{(\sin 2x)^2}{4x^2} \cdot \frac{8 \cos 2x}{1 + \left(\frac{x^3}{3} \right)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{8}{1} = 8 \end{aligned}$$

TFC generalizzato

quindi dal teorema di de L'Hôpital segue che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 8, \quad \text{ossia } \underline{\underline{L = 8.}} \quad \text{■}$$

5. $g(x) = \frac{\arctan x}{x}$ per ogni $x \neq 0$. Abbiamo che $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è la sua estensione continua a tutto $\mathbb{R}$.

Oss. che f è continua, è una funzione pari e ha segno positivo su $\mathbb{R}$.

Inoltre $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\arctan x}{x^2}$. Posto $h(x) = \frac{x}{1+x^2} - \arctan x$ su $\mathbb{R}$, notiamo che $h(0) = 0$ e $h'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1-x^2-(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2} < 0$; quindi h è strett. decrescente che implica $h(x) > 0$ se $x < 0$, $h(x) < 0$ se $x > 0$. Quindi $g'(x) < 0 \forall x > 0$, ossia $g(x)$ strett. decrescente su $]0, +\infty[$. Infine $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
Possiamo tracciare un grafico qualitativo di f

Sia $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ per $x \in \mathbb{R}$.

- (a) F è decrescente su $]-\infty, 1]$ e crescente su $[1, +\infty[$ **Falsa**

Dal TFC si ha $F'(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$. Poiché $f(x) > 0$ su $\mathbb{R}$ risulta $F'(x) > 0$ su $\mathbb{R}$ e quindi F è strett. crescente su $\mathbb{R}$. $\square$

- (b) F ammette un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ **Falsa**

Notiamo che $f \in \mathcal{R}([1, \omega]) \forall \omega > 1$, essendo f continua su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre $f(x) > 0$ su $[1, +\infty[$. Poiché

$f(x) \sim \frac{\pi}{2x}$ per $x \rightarrow +\infty$
e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico risulta che anche $\int_1^{+\infty} f(t) dt = +\infty$, ossia $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} f(t) dt = +\infty$. $\square$

- (c) F è derivabile 2 volte in $x_0 = 0$ e $F''(0) = 0$ **Vera**

Abbiamo oss. in (a) che F è deriv. su tutto $\mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, ossia

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Dobbiamo verificare la derivabilità di $F'(x)$ in $x_0=0$ e provare che $F''(0)=0$. Lo facciamo usando la definizione di derivabilità. Abbiamo $\forall h \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{F'(0+h)-F'(0)}{h} &= \frac{F'(h)-F'(0)}{h} = \frac{f(h)-1}{h} = \frac{\frac{\operatorname{arctg} h}{h} - 1}{h} \\ &= \frac{\operatorname{arctg} h - h}{h^2} = \frac{h - \frac{h^3}{3} + o(h^3) - h}{h^2} \end{aligned}$$

Quindi $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F'(0+h)-F'(0)}{h}$ finito (equindi F' è deriv. in $x_0=0$, ossia F è derivabile due volte in $x_0=0$) e vale 0, ossia $F''(0)=0$. □

(d) $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ Vera

Abbiamo

$$\begin{aligned} F''(x) &= \begin{cases} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)' & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{x - (1+x^2)\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dobbiamo ora controllare solo la continuità di F'' in $x_0=0$

Abbiamo

$$\begin{aligned} F''(x) &= \frac{x - (1+x^2)(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3))}{x^2(1+x^2)} = \frac{x - x + \frac{x^3}{3} - x^3 + o(x^3)}{x^2(1+x^2)} \\ &= \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^2(1+x^2)} \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ne segue che $\lim_{x \rightarrow 0} F''(x) = 0 = F''(0)$. Come già osservato sopra, in tutti gli altri pt. la funzione $F''(x)$ è continua essendo prodotto, somma, rapporto di funzioni continue (con denominatore che non si annulla). Quindi $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. □

(e) F è dispari. Falsa

Basta oss. che $F(1)=0$, mentre $F(-1) = \int_1^{-1} f(t) dt = -\int_{-1}^1 f(t) dt \neq 0$. ■

6. Per ogni integrale improprio dato, sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ per cui esso risulta convergente. Allora,

(a) per $\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{2+e^{-x^\alpha}}{x^{\alpha-1}(x+2\pi)}}_{f(x)} dx$ si ha $E_\alpha =]1, 2[\Rightarrow \underline{\inf E_\alpha = 1}$.

$f:]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ continua:

per $x \rightarrow 0^+$: $f(x) \sim \frac{3}{x^{\alpha-1}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha-1 < 1 \\ \Leftrightarrow \alpha < 2 \end{cases}$

per $x \rightarrow +\infty$: $f(x) \sim \frac{2}{x^\alpha} \Rightarrow \alpha > 1$

□

(b) per $\int_0^1 \underbrace{\frac{\log(2-x)^\alpha}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2} \operatorname{arctg}(x^{\frac{\alpha}{2}})}}_{f(x)} dx$ si ha $E_\alpha =]0, 1[\Rightarrow \underline{\sup E_\alpha = 1}$.

$f:]0, 1[\rightarrow]0, +\infty[$ continua:

per $x \rightarrow 0^+$: $f(x) \sim \frac{\alpha \log 2}{x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} < 1 \\ \Leftrightarrow \alpha < 1 \end{cases}$

Oss. che per $x \rightarrow 1^-$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha \log(1+(1-x))}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}\sqrt{1+x} \operatorname{arctg} x^{\frac{\alpha}{2}}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha [(1-x) + o(1-x)]}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}\sqrt{1+x} \operatorname{arctg} x^{\frac{\alpha}{2}}} = 0$

e quindi f può essere estesa con continuità in $x=1$,
 e come tale risulta integrabile su $[\omega, 1] \forall \omega > 0$.

(non si tratta di un integrale improprio in $[\omega, 1] \forall \omega > 0$).
 □

(c) per $\int_4^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{1}{\log^{\frac{\alpha}{4}} x}\right) \right)^2}_{f(x)} dx$ si ha $E_\alpha =]2, +\infty[\Rightarrow \underline{\inf E_\alpha = 2}$.

$f: [4, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ continua

per $x \rightarrow +\infty$: $f(x) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2(\log^{\frac{\alpha}{4}} x)} \right)^2 = \frac{1}{4x \log^{\frac{\alpha}{2}} x} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} > 1 \\ \Leftrightarrow \alpha > 2 \end{cases}$

■

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Ricordiamo che $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ per $n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = 0$.

Possiamo allora assicurare che $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

ossia
$$0 < \frac{a_n}{\frac{1}{n}} < 1 \quad \forall n \geq \bar{n},$$

$$(*) \quad 0 < a_n < \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{=b_n} \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. (Si) Segue da (*) per il criterio del confronto.

(b) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente. (No)

Basta prendere $a_n = \frac{1}{n \log n} \quad \forall n \geq 2$. $\square$

(c) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a_n^2)$ è convergente. (Si)

Infatti, da (*) segue $0 < a_n^2 < \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq \bar{n}$

(la funzione $t \mapsto t^2$ è strett. crescente su $[0, +\infty[$)

Inoltre da $0 < \sin x < x \quad \forall x > 0$ segue allora

$$0 < \sin(a_n^2) < a_n^2 < \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, dal criterio del confronto segue

che $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(a_n^2)$ è anch'essa convergente. $\square$

(d) la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ è convergente. (Si)

Infatti, da (*) segue $0 < \frac{a_n}{\sqrt{n}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad \forall n \geq \bar{n}$.

Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$, dal criterio del confronto

segue che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ è anch'essa convergente. $\blacksquare$

$$8. \bullet L_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\log(\sin x + 1))}{\log(\operatorname{arctg} 2x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Abbiamo

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{\log(\sin x + 1)} \cdot \frac{\cos x}{\sin x + 1}}{\frac{1}{\operatorname{arctg} 2x} \cdot \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2} = \frac{\cos x}{\log(1+\sin x)} \cdot \frac{\operatorname{arctg} 2x}{2} \cdot \frac{(1+4x^2)}{(\sin x + 1)}$$

$\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1;$

quindi per il teorema di de l'Hôpital segue $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\log(\sin x + 1))}{\log(\operatorname{arctg} 2x)} = 1$,
ossia $L_1 = 1$. □

$$\bullet L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^4}\right)^{-1}}{\log(x+2)} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^4}\right)}{\log(x+2)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Abbiamo

$$\frac{\log\left(\frac{1}{x^2} \left(3 - \frac{4}{x^2}\right)\right)}{\log\left(x \left(1 + \frac{2}{x}\right)\right)} = \frac{\log \frac{1}{x^2} + \log\left(3 - \frac{4}{x^2}\right)}{\log x + \log\left(1 + \frac{2}{x}\right)}$$

$$= \frac{-2 \log x + \log\left(3 - \frac{4}{x^2}\right)}{\log x + \log\left(1 + \frac{2}{x}\right)}$$

Quindi

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^4}\right)}{\log(x+2)} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x) \left[-2 + \frac{\log\left(3 - \frac{4}{x^2}\right)}{\log x} \right]}{(\log x) \left[1 + \frac{\log\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\log x} \right]}$$

ossia $L_2 = 2$. ■

9. Sia I_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ per cui risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + \log n^3}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}} \arcsin\left(\frac{1}{n^3 + \alpha n^\alpha}\right),$$

$= a_n$

Oss. che $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Notiamo che
$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}} = \frac{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}}{n^2+n - n^2-1} = \frac{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}}{n-1}$$
$$= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1-\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2.$$

Allora, se $\alpha < 3$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2 \quad (\arcsin x = x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0)$$

e se $\alpha = 3$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

Quindi la serie data è divergente poiché è una serie a termine positivi per la quale si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$.

Oss. che se $\alpha > 3$, allora

$$a_n \sim 2n^3 \cdot \frac{1}{\alpha n^\alpha} = \frac{2}{\alpha n^{\alpha-3}} \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-3}} < +\infty \Leftrightarrow \alpha-3 > 1$, ossia $\alpha > 4$, per il criterio del confronto asintotico la serie data è convergente $\Leftrightarrow \alpha > 4$. Dunque $I_\alpha =]4, +\infty[$.

Allora

(a) L'insieme I_α è un insieme limitato. Falsa

(b) L'insieme I_α ammette minimo. Falsa

(c) L'insieme I_α ammette un solo pt. di accumulazione Falsa.

Inoltre

(d) $\inf I_\alpha = 4$.



10. Sia $f(x) = 2 \log(1+3x) - e^{3x} + e^{-3x} + 9x^2$.

Oss. che

$$f(x) = 2 \left(3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + o(x^3) \right) - \left(1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3) \right) + (1 - 3x + \frac{(3x)^2}{2} - \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3)) + 9x^2$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \cancel{6x} - \cancel{9x^2} + 2 \cdot 9x^3 + o(x^3) - \cancel{1} - \cancel{3x} - \cancel{\frac{9x^2}{2}} - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) \\
 &\quad + \cancel{1} - \cancel{3x} + \cancel{\frac{9x^2}{2}} - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) + \cancel{9x^2} \\
 &= 9x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Allora

(a) $\exists r > 0$ tale che la funzione $f(x) < 0$ in $]-r, 0[$ (Vera).

(b) $\exists r > 0$ tale che la funzione $g(x) = \operatorname{arctg}(f(x))$ ha segno costante in $]-r, r[$ (Falsa)

Infatti, $f(x) < 0$ in $]-r, 0[$, $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ su $]0, r[$ per $r > 0$ opportuno.

L'arcotangente preserva il segno di $f(x)$ e quindi $g(x) < 0$ in $]-r, 0[$, $g(0) = 0$, $g(x) > 0$ su $]0, r[$.

(c) $g(x) = o(\sin^2 x)$ per $x \rightarrow 0$ (Vera) □

Infatti

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(f(x))}{\sin^2 x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^3 + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)} = 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ è convergente. (Vera).

Infatti $0 < f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim 9\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3$ per $n \rightarrow +\infty$

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$, dal criterio del confronto asintotico segue che $\sum_{n=1}^{+\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ è convergente. ■

$$11. \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx$$

$$(a) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$\forall n \neq 0 \quad a_n = \frac{1}{\pi} \left[x \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

bastera osservare
che la funzione
integranda
 $x \cos(nx)$ è una
funzione dispari
su $[-\pi, \pi]$!!

□

$$(b) \quad b_0 = 0;$$

$$\forall n \neq 0 \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-2\pi \cos(n\pi)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. La serie data

converge per il criterio di Leibniz. Abbiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \underline{\underline{2 \log 2 = \log 4.}}$$

□

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}$ non è convergente, quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$
non è assolutamente convergente. ■

12. • Dobbiamo trovare l'integrale generale dell'eq. differenziale

$$(*) \quad y'' - 4y' + 3y = 3x^2.$$

Troviamo innanzitutto l'integrale generale dell'eq. diff. omogenea
associata: $y'' - 4y' + 3y = 0$.

$$\leadsto z^2 - 4z + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = 1, z_2 = 3.$$

L'integrale generale dell'eq. diff. omogenea è dunque $c_1 e^x + c_2 e^{3x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
 Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'eq. diff. completa
 usando il metodo di similitudine: poniamo $\bar{y}(x) = \bar{a}x^2 + \bar{b}x + \bar{c}$.
 Oss. che $\bar{y}'(x) = 2\bar{a}x + \bar{b}$, $\bar{y}''(x) = 2\bar{a}$ si ha che $\bar{y}$ è soluzione
 particolare dell'eq. diff. data se e solo se

$$2\bar{a} - 8\bar{a}x - 4\bar{b} + 3\bar{a}x^2 + 3\bar{b}x + 3\bar{c} = 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3\bar{a} = 3 \\ -8\bar{a} + 3\bar{b} = 0 \\ 2\bar{a} - 4\bar{b} + 3\bar{c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \bar{a} = 1 \quad \bar{b} = \frac{8}{3} \quad \bar{c} = \frac{26}{9}.$$

Quindi l'integrale generale dell'eq. diff. in $\circledast$ è

$$\underline{y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{26}{9}}, \quad \begin{matrix} c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R}. \end{matrix}$$

Notiamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x)e^{-x} = 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(c_1 e^x + 3c_2 e^{3x} + x + \frac{8}{3}) e^{-x} \right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[c_1 + 3c_2 e^{2x} + (x + \frac{8}{3}) e^{-x} \right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \underline{c_1 = 1, \quad c_2 = 0.}$$

Allora

$$(a) \quad y(x) = e^x + x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \quad \text{e quindi } \underline{y(0) = 1 + \frac{26}{9} = \frac{35}{9}}.$$

□

$$(b) \quad y(x) = e^x + x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} = e^x + \left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} + \frac{26}{9} =$$

$$\Rightarrow y(x) = e^x + \left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{10}{9} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$; non esistono asintoti orizz. o obliqui.

$$\bullet \quad y'(x) = e^x + 2x + \frac{8}{3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y'(x) = -\infty.$$

(basta anche solo — Proviamo che $y'(x)$ è strett. crescente: infatti
 Oss. che è
 somma di 2
 funz. strett. crescenti) $y''(x) = e^x + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (y è strett. convessa).

Quindi $\exists! x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $y'(x_0) = 0$. Notiamo infine che

$$y'(-2) = e^{-2} - 4 + \frac{8}{3} = \frac{1}{e^2} - \frac{4}{3} < 0$$

$$y'(-1) = e^{-2} - 2 + \frac{8}{3} = \frac{1}{e^2} + \frac{2}{3} > 0$$

Essendo y' continua, l'unico pt. x_0 per cui $y'(x_0) = 0$ viene a trovarsi nell'intervallo $]-2, -1[$.

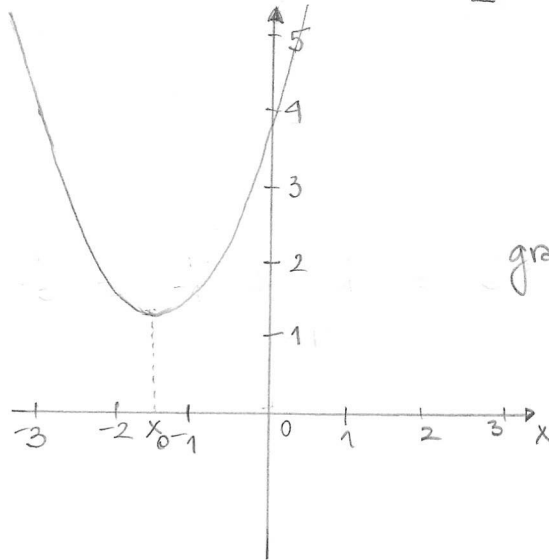


grafico qualitativo di $y(x)$.

(B) 12. • Integrale generale dell'eq. diff. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2$ è

$$\underline{y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2}} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x)e^{-x} = 1 \Leftrightarrow \underline{c_1 = 1, c_2 = 0}.$

Allora

(a) $y(x) = e^x + x^2 + 3x + \frac{7}{2}$ e quindi $\underline{y(0) = 1 + \frac{7}{2} = \frac{9}{2}}$. $\square$

(b) $y(x) = e^x + \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{7}{2} \Rightarrow y(x) = e^x + \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Lo studio di $y(x)$ procede come in Fil. A, Es. 12 (b) e il grafico qualitativo di $y(x)$ è analogo (oss. $y(0) = \frac{9}{2} > \frac{35}{9}$). $\blacksquare$