

1) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| < 1\}$
 $=]-\sqrt{2}, 0[\cup]0, \sqrt{2}[$

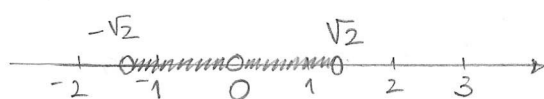
$$|x^2 - 1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x^2 - 1 < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < x^2 < 2$$

$$\Rightarrow x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\setminus \{0\}.$$

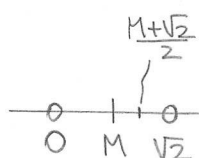
(a) " $\exists M \in A : \forall x \in A, x \leq M$ " (F). Proviamo che la sua negazione è vera:

infatti " $\forall M \in A \exists x \in A : x > M$ ":



• se $M \in]-\sqrt{2}, 0[$, qualunque $x \in]0, \sqrt{2}[$ soddisfa $x \in A$ e $x > M$;

• se $M \in]0, \sqrt{2}[$, basta prendere $x = \frac{M + \sqrt{2}}{2}$. Si ha $x \in A$ e $x > M$. $\square$



(b) " $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A : x \leq M$ " (F). Proviamo che la sua negazione è vera:

infatti, " $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, x > M$ ":

basta prendere $M \in]-\infty, -\sqrt{2}]$ e si ha $\forall x \in A, x > M$. $\square$

(c) " $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, M \leq x$ " (V):

basta prendere $M \in]-\infty, -\sqrt{2}]$. $\square$

(d) " $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A : x > M$ " (F). Proviamo che la sua neg. è vera:

infatti, " $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, x \leq M$ ":

basta prendere $M \in [\sqrt{2}, +\infty[$ e si ha $\forall x \in A, x \leq M$. $\blacksquare$

2) $Q(x, y, z) = "(x - y)^2 \geq z"$

• " $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}, Q(x, y, z)$ " (Vera)

Preso $x \in \mathbb{Z}$ qualsiasi, basta prendere $z = 0$ (oppure qualunque $z \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$) e si ha che $\forall y \in \mathbb{Z}, \underbrace{(x - y)^2}_{\geq 0} \geq z$. $\square$

• " $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : \forall z \in \mathbb{Z}, Q(x, y, z)$ " Falsa

infatti, " $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z} : (x-y)^2 < z$ " è vera:
basta prendere $x=0$; preso qualsiasi $y \in \mathbb{Z}$, basta prendere
 $z = y^2 + 1$ e si ha $(x-y)^2 = y^2 < z = y^2 + 1$. $\square$

• " $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z} : Q(x, y, z)$ " Vera

presi $x, y \in \mathbb{Z}$ qualsiasi, basta prendere $z=0$ e si ha
 $\underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0} \geq z$. $\square$

• " $\exists z \in \mathbb{Z} : \forall x, y \in \mathbb{Z}, Q(x, y, z)$ " Vera

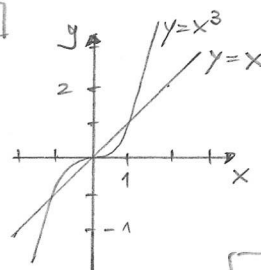
basta prendere $z=0$ e si ha che $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ vale $Q(x, y, z)$. $\blacksquare$

3) (a) $\{x \in \mathbb{R} : \log_2 |x| > 1\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 2\} =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

Non è limitato inferiormente. $\square$

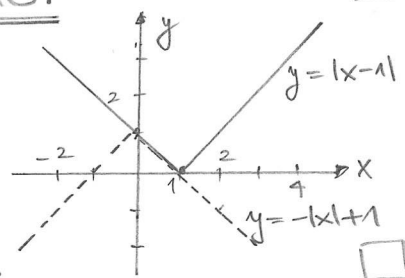
(b) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{x} \geq x\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq x^3\}$
 $=]-\infty, -1] \cup [0, 1]$

Non è limitato inferiormente.



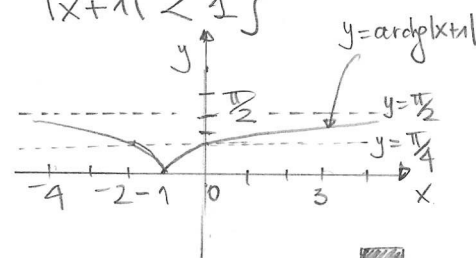
(c) $\{x \in \mathbb{R} : |x-1| \geq -|x|+1\}$
 $= \mathbb{R}$

Non è limitato inferiormente.



→ (d) $\{x \in \mathbb{R} : \arctan |x+1| < \frac{\pi}{4}\} = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| < 1\}$
 $=]-2, 0[$

È limitato inferiormente.



risposta
corretta

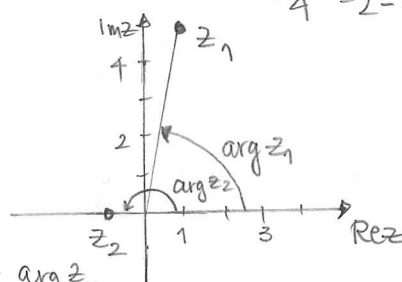
4) (a) $z_1 = 1+5i$

$z_2 = -1$

$\arg z_1 > \frac{\pi}{4}$

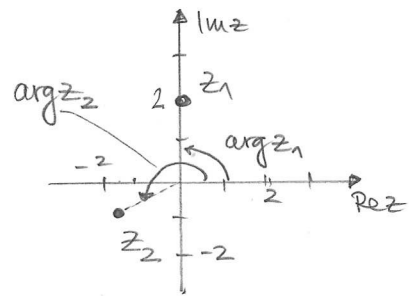
$\arg z_2 = \pi$

$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
 $> \pi$



$$(b) \quad z_1 = 2i \quad z_2 = -\sqrt{3} - i$$

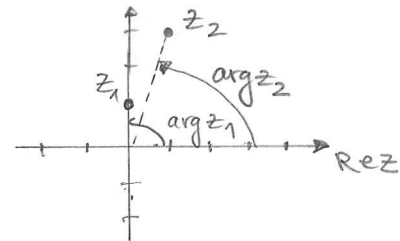
$$\left\{ \begin{array}{l} \arg z_1 = \frac{\pi}{2} \\ \arg z_2 > \pi \end{array} \right. \Rightarrow \arg(z_1 z_2) > \pi$$



□

$$(c) \quad z_1 = i \quad z_2 = 1 + 3i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \arg z_1 = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4} < \arg z_2 < \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$



$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{3\pi}{4} < \arg(z_1 z_2) < \pi.}}$$

□

$$(d) \quad z_1 = -1 + \sqrt{3}i \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \arg z_1 = \frac{2\pi}{3} \\ \arg z_2 = \frac{\pi}{3} \end{array} \right. \quad \arg(z_1 z_2) = \pi.$$

■

$$5) (a) \quad z^2 |z| = 1 \Rightarrow |z^2| |z| = 1 \Rightarrow |z|^3 = 1 \quad |z| = 1$$

: le soluzioni z di quest'eq. hanno tutti $|z| = 1$. □

$$(b) \quad (z+i)^2 = 0 \Leftrightarrow z = -i \Rightarrow |z| = 1; \quad \square$$

$$(c) \quad |z+i + \overline{(z+i)}| = 2 \Leftrightarrow$$

$$|x+i(y+1) + x-i(y+1)| = 2$$

$$\Leftrightarrow |2x| = 2 \Rightarrow |x| = 1, \text{ ma } y \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi.}$$

Quindi l'eq. $|z+i + \overline{(z+i)}| = 2$ ha soluzioni con $|z| \neq 1$. □

$$(d) \quad (z+1)(\bar{z}-1) = -2(\operatorname{Im} z)i \Leftrightarrow$$

$$|z|^2 - z + \bar{z} - 1 = -2(\operatorname{Im} z)i \quad z = x+iy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(\cancel{\operatorname{Im} z})i - 1 = -2(\cancel{\operatorname{Im} z})i$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1, \text{ ossia } |z| = 1.$$

$$6) \quad (1 - \sqrt{3}i)^{15} =$$

$$1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Dunque } (1 - \sqrt{3}i)^{15} = 2^{15} e^{-i15\frac{\pi}{3}} = 2^{15} e^{-i5\pi}$$

risposta
corretta

risposta
corretta

$$(1-\sqrt{3}i)^{15} = 2^{15} e^{-15\pi i} = \underline{\underline{-2^{15}}}$$

La risposta corretta è la b).

7) $|z-2i| \geq |z-3|$

Sono tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ la cui distanza da $2i$ è maggiore uguale alla distanza da 3.

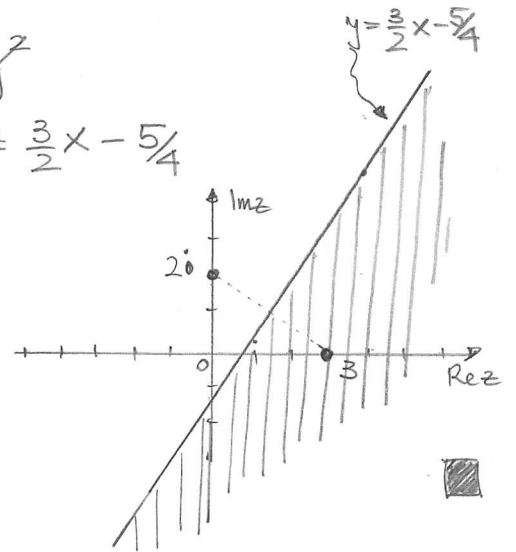
Si verifica anche facilmente che $z=x+iy$ risolve $|z-2i| \geq |z-3|$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 \geq (x-3)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 \geq x^2 - 6x + 9 + y^2$$

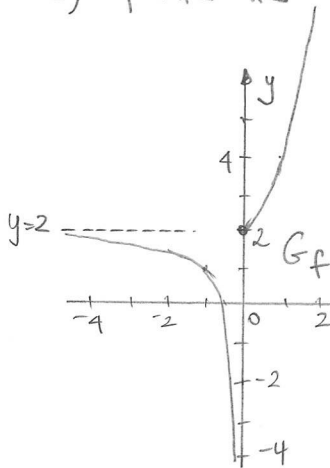
$$\Leftrightarrow 4y \leq 6x - 5 \quad \Leftrightarrow y \leq \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$$

Quindi la risposta corretta è la d).



8) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 2^{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 2 + \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 2^{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



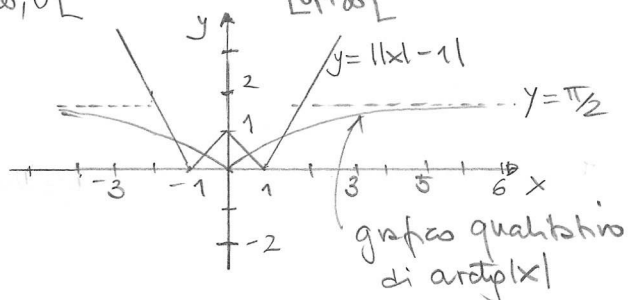
Dal grafico di f possiamo dedurre immed.

- f è suriettiva Vera
- f è iniettiva Vera
- f è limitata inferiormente Falsa
- f è strettamente monotona Falsa

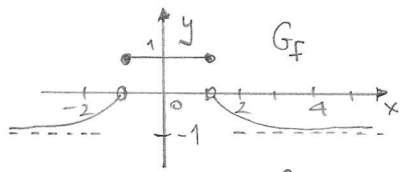
$(f|_{]-\infty, 0[} \downarrow \quad f|_{[0, +\infty[} \uparrow)$

9) $\operatorname{arctg}|x| = ||x|-1|$

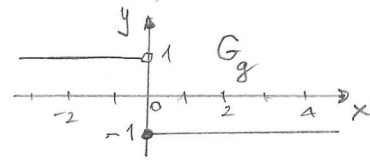
Il nr. delle soluzioni in $\mathbb{R}$ dell'eq. data è 4.



$$10) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-1, 1] \\ \frac{1}{|x|} - 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, 1] \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

oss. che $f(x) = 1 \quad \forall x \in [-1, 1]$
mentre $f(x) \in]-1, 0[$ altrimenti.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{poiché } g(\mathbb{R}) = \{-1, 1\} \text{ e } f(x) = 1 \text{ se } x \in [-1, 1]$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \begin{cases} g(1) & \text{se } x < 0 \\ g(-1) & \text{se } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{poiché } f(\mathbb{R}) =]-1, 0[\cup \{1\} \text{ e } f(x) = 1 \text{ se } x \in [-1, 1].$$

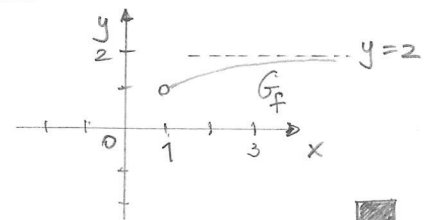
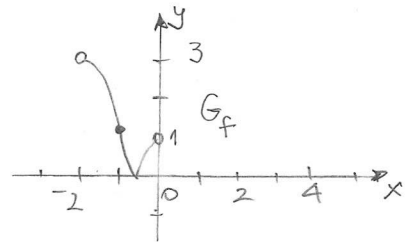
Quindi tutte le espressioni sono corrette tranne l'ultima, ossia
tranne $(f \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. ■

$$11) (a) \sup_{]-2, 0[} |1 - 2\sqrt[3]{x+1}| = \underline{\underline{3}}.$$

$$(b) \inf_{[-3, -1]} \log_{\frac{1}{3}} |x| = \log_{\frac{1}{3}} 3 = \underline{\underline{-1}}.$$

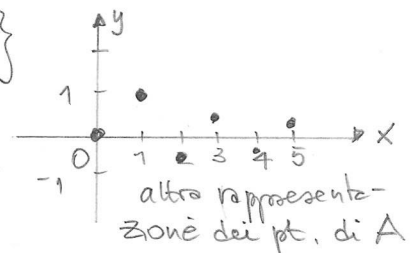
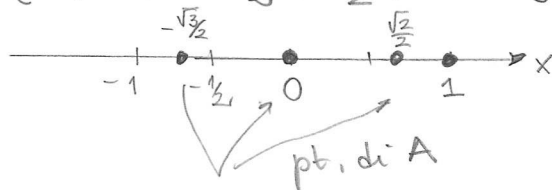
$$(c) \sup_{]0, 1[} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right) = \frac{2}{\pi} \arccos 0 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{1}}.$$

$$(d) \inf_{]1, +\infty[} \left(2 - \frac{1}{x^3} \right) = \underline{\underline{1}}$$



$$12) A = \left\{ (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= \left\{ 0, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sin \frac{\pi}{5}, \frac{1}{2}, \dots \right\}$$



• L'insieme A è costituito solo da pt. isolati Falsa

$0 \in A$ e 0 è pt. di accumulazione per A .

- L'unica pt. di accumulazione di A è 0 **Vera**.
- A è un insieme limitato **Vera** $A \subseteq [-1, 1]$
- A non ammette minimo **Falsa**

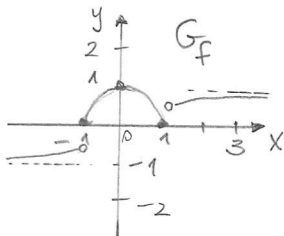
$$\min A = a_2 = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- A non ammette massimo **Falsa**.

$$\max A = a_1 = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

13) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{se } x \in [-1, 1] \\ \frac{2}{\pi} \arctan x & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



- $x=0$ è un pt. di max loc., ma non è un pt. di max. assoluto **Falsa**

$x=0$ è pt. di massimo assoluto!

- $x=1$ è un pt. di min. loc. per f , ma non è un pt. di min. assoluto **Vera**.

- $\inf f =]-1, 1]$ **Falsa** $\inf f =]-1, -\frac{1}{2}[\cup [0, 1]$.

- $f|_{[-1, +\infty[}$ ha in $x=-1$ un pt. di minimo globale. **Vera**.

14) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n-3} + n^n \sqrt[n]{n+4^n}}{4n! - n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^3} + \sqrt[n]{n+4^n}}{\frac{4n!}{n^n} - 1} = \frac{4}{-1} = -4.$

Annotations: $\frac{1}{n^3} \rightarrow 0$, $\sqrt[n]{n+4^n} \rightarrow 4$, $\frac{4n!}{n^n} \rightarrow 0$.

15) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2(x^2-1)}{x-1} = 4.$

$$\frac{\sin 2(x^2-1)}{x-1} \cdot \frac{2(x+1)}{2(x+1)} =$$

$$\underbrace{\frac{\sin 2(x^2-1)}{2(x^2-1)}}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 1 \\ 1}} \cdot 2(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 4.$$

16) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 0$) poniamo $P(n) = "2^{n^2} \geq n!"$

Vogliamo dimostrare che l'enunciato $P(n)$ è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia che la disuguaglianza data è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ usando il principio di induzione.

Per questo dobbiamo dimostrare due cose:

i) $P(0)$ è vero;

ii) per ogni $n \in \mathbb{N}$, da $P(n)$ vero segue anche $P(n+1)$ vero.

Verifichiamo subito che i) è vero: infatti, per $n=0$, abbiamo

$$2^{0^2} = 1 \text{ e anche } 0! = 1;$$

Ora proviamo ii).

Fissiamo un $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi e supponiamo che la disug. in $P(n)$ sia verificata per tale n (ipotesi induttiva). Dobbiamo provare che otteniamo allora anche vero $P(n+1)$, ossia vera la disuguaglianza per $n+1$.

Consideriamo inizialmente il membro sinistro della disuguaglianza che vogliamo verificare. Scriviamo $2^{(n+1)^2}$ in modo tale da poter usare l'ipotesi induttiva:

$$2^{(n+1)^2} = 2^{n^2+2n+1} = 2^{n^2} \cdot 2^{2n+1}.$$

Ora usando l'ipotesi induttiva stimiamo dal basso il membro destro dell'uguaglianza appena scritta l'addendo 2^{n^2} con $n!$ (ricordare che $2^{2n+1} \geq 0$). Otteniamo

$$(*) \quad 2^{(n+1)^2} \geq n! \cdot 2^{2n+1}.$$

Se $2^{2n+1} \geq n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, allora in (*) mi ha

$$2^{(n+1)^2} \geq n! (n+1) = (n+1)!$$

Questo concluderebbe la dim. del passo induttivo ii), poiché avremmo provato la disug. $2^{(n+1)^2} \geq (n+1)!$

Notiamo che la validità di $\overbrace{2^{2n+1}}^{P'(n)} \geq n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ si prova a sua volta facilmente usando il principio di induzione:

i) $P'(0)$ è vero $(2 \geq 1)$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P'(n) \Rightarrow P'(n+1)$: $2^{2(n+1)+1} = 2^{2n+1+2}$
 $= 2^{2n+1} \cdot 2^2 \geq (n+1) 2^{2*} \geq (n+1)+1$
↑
ipot. induttiva

$\circledast$ ora $4(n+1) \geq (n+1)+1$

$\Leftrightarrow 4n+4 \geq n+2 \Leftrightarrow 3n \geq -2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Quindi in conclusione abbiamo provato i) e ii). Quindi usando il principio di induzione abbiamo dimostrato che la disuguaglianza definita attraverso $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

17) $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ funzioni.

Allora $g \circ f$ iniettiva $\Rightarrow f$ iniettiva.

Supp. che f non è iniettiva. Proviamo che allora $g \circ f$ non è iniettiva.

$\rightarrow \exists x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \text{ e } f(x_1) = f(x_2).$

Da questo segue

$g(f(x_1)) = g(f(x_2)),$

ossia $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2);$

quindi $g \circ f$ non è iniettiva. ■

18) $\begin{cases} w z^3 + 8 w i = 0 \\ z = w |z|^2 \end{cases} \quad \begin{cases} w(z^3 + 8i) = 0 \\ z = w |z|^2 \end{cases}$

La prima eq. è soddisfatta se $w=0$ oppure $z^3 = -8i$.

Per $w=0$, dalla seconda eq. risulta $z=0$.

Per $z^3 = -8i$ segue $z_0 = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$ $z_1 = 2e^{-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}i}$

$= 8e^{-\frac{\pi}{2}i}$
 Oppure $= 8e^{\frac{3\pi}{2}i}$

$z_2 = 2e^{-\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}i}$

-9-

$$\text{ora } z_0 = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} - i$$

$$z_1 = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = 2i$$

$$z_2 = 2 \left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i.$$

Dalla seconda equazione risulta per tali z che deve essere $w = \frac{z}{|z|^2}$.

Quindi, in definitiva, abbiamo le coppie (z, w) date da

$$\underline{(0, 0)};$$

$$\underline{(\sqrt{3} - i, \frac{1}{4}(\sqrt{3} - i))}; \quad \underline{(2i, \frac{1}{2}i)}; \quad \underline{(-\sqrt{3} - i, \frac{1}{4}(-\sqrt{3} - i))}.$$

