

## 2021-10-11 Test di autovalutazione con feedback

### 1. 2021-10-11-01

Sia  $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| < 1\}$ . Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $\exists M \in A : \forall x \in A, x \leq M$
- (b)  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A : x \leq M$
- (c)  $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, M \leq x$
- (d)  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A : x > M$

### 2. 2021-10-11-02

Sia  $\mathcal{Q}(x, y, z)$  il predicato

$$“(x - y)^2 \geq z”.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti proposizioni se è vera o falsa.

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{Q}(x, y, z) \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{Vera} \\ \hline \text{Falsa} \\ \hline \end{array}$$

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : \forall z \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{Q}(x, y, z) \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{Vera} \\ \hline \text{Falsa} \\ \hline \end{array}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z} : \quad \mathcal{Q}(x, y, z) \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{Vera} \\ \hline \text{Falsa} \\ \hline \end{array}$$

$$\exists z \in \mathbb{Z} : \forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{Q}(x, y, z) \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{Vera} \\ \hline \text{Falsa} \\ \hline \end{array}$$

### 3. 2021-10-11-03

Quale dei seguenti insiemi è limitato inferiormente?

- (a)  $\{x \in \mathbb{R} : \log_2 |x| > 1\}$
- (b)  $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{x} \geq x\}$
- (c)  $\{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \geq -|x| + 1\}$
- (d)  $\{x \in \mathbb{R} : \arctan |x + 1| < \frac{\pi}{4}\}$

4. **2021-10-11-04**

Per quale delle seguenti coppie  $(z_1, z_2)$  di numeri complessi, il prodotto  $z_1 \cdot z_2$  ha argomento principale in  $] \frac{3\pi}{4}, \pi[$ ?

- (a)  $z_1 = 1 + 5i, \quad z_2 = -1$
- (b)  $z_1 = 2i, \quad z_2 = -\sqrt{3} - i$
- (c)  $z_1 = i, \quad z_2 = 1 + 3i$
- (d)  $z_1 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

5. **2021-10-11-05**

Quale delle seguenti equazioni ha una soluzione  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| \neq 1$ ?

- (a)  $z^2|z| = 1$
- (b)  $(z + i)^2 = 0$
- (c)  $|z + i + \overline{(z + i)}| = 2$
- (d)  $(z + 1)(\bar{z} - 1) = -2(\operatorname{Im} z)i$

6. **2021-10-11-06**

La forma algebrica del numero complesso  $(1 - \sqrt{3}i)^{15}$  è

- (a)  $2^{15}$
- (b)  $-2^{15}$
- (c)  $-1$
- (d)  $-2^{15}i$

7. **2021-10-11-07**

Nel piano complesso l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$|z - 2i| \geq |z - 3|$$

è

- (a) formato dai punti di una circonferenza
- (b) formato dai punti di una retta
- (c) formato dai vertici di un triangolo equilatero

(d) formato dai punti di un semipiano

8. **2021-10-11-08**

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 2^{x+1} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

$f$  è suriettiva 

Vera
Falsa

$f$  è iniettiva 

Vera
Falsa

$f$  è limitata inferiormente 

Vera
Falsa

$f$  è strettamente monotona 

Vera
Falsa

9. **2021-10-11-09**

Il numero delle soluzioni in  $\mathbb{R}$  dell'equazione

$$\arctan |x| = ||x| - 1|$$

è  $\overline{\quad}$ .

10. **2021-10-11-10**

Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{|x|} - 1 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti espressioni se è corretta sì o no.

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{Sì} \\ \hline \text{No} \\ \hline \end{array}$$

$$(f \circ g)(x) = 1 \quad x \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{Sì} \\ \hline \text{No} \\ \hline \end{array}$$

$$(g \circ g)(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{Sì} \\ \hline \text{No} \\ \hline \end{array}$$

$$(f \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x) \quad x \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{Sì} \\ \hline \text{No} \\ \hline \end{array}$$

11. **2021-10-11-11**

Si ha

$$(a) \sup_{]-2,0[} |1 - 2\sqrt[3]{x+1}| = \text{---}.$$

$$(b) \inf_{[-3,-1]} \log_{\frac{1}{3}} |x| = \text{---}.$$

$$(c) \sup_{]0,1[} \left( \frac{2}{\pi} \arccos x \right) = \text{---}.$$

$$(d) \inf_{]1,+\infty[} \left( 2 - \frac{1}{x^3} \right) = \text{---}.$$

12. **2021-10-11-12**

Sia  $A = \{(-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ .

Stabilite per ciascuna delle seguenti quattro affermazioni se è vera o falsa.

L'insieme  $A$  è costituito solo da punti isolati. 

Vera
Falsa

L'unico punto di accumulazione di  $A$  è 0. 

Vera
Falsa

$A$  è un insieme limitato. 

Vera
Falsa

$A$  non ammette minimo. 

Vera
Falsa

$A$  non ammette massimo. 

Vera
Falsa

**13. 2021-10-11-13**

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{se } x \in [-1, 1] \\ \frac{2}{\pi} \arctan x & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Stabilite per ciascuna delle seguenti quattro affermazioni se è vera o falsa.

$x = 0$  è un punto di massimo locale, ma non è un punto di massimo assoluto. 

Vera
Falsa

$x = 1$  è un punto di minimo locale per  $f$ , ma non è un punto di minimo assoluto. 

Vera
Falsa

$\text{im} f = ] - 1, 1]$ . 

Vera
Falsa

La funzione  $f|_{[-1, +\infty[}$  ha in  $x = -1$  un punto di minimo globale. 

Vera
Falsa

**14. 2021-10-11-14**

Sia  $(a_n)_n$  la successione definita da

$$a_n = \frac{n^{n-3} + n^n \sqrt[n]{n+4^n}}{4n! - n^n}.$$

Sia  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ . Allora  $L$  è uguale a  $\overline{\quad}$ .

**15. 2021-10-11-15**

Il limite  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2(x^2 - 1)}{x - 1}$  è uguale a  $\overline{\quad}$ .

Per i seguenti TRE esercizi è richiesto UN ACCURATO SVOLGIMENTO:

16. **2021-10-11-16**

Provate che la disuguaglianza

$$2^{n^2} \geq n!$$

vale per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

17. **2021-10-11-17**

Siano  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  due funzioni. Provate che se la funzione composta  $g \circ f$  è iniettiva, allora  $f$  è iniettiva.

18. **2021-10-11-18**

Trovate le soluzioni  $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} wz^3 + 8wi = 0 \\ z = w|z|^2. \end{cases}$$