

2021-10-11 Test di autovalutazione con feedback

1. 2021-10-11-01

Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| < 1\}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) $\exists M \in A : \forall x \in A, x \leq M$
- (b) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A : x \leq M$
- (c) $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, M \leq x$
- (d) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A : x > M$

2. 2021-10-11-02

Sia $\mathcal{Q}(x, y, z)$ il predicato

$$“(x - y)^2 \geq z”.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti proposizioni se è vera o falsa.

$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}, \mathcal{Q}(x, y, z)$	<table border="1"><tr><td>Vera</td></tr><tr><td>Falsa</td></tr></table>	Vera	Falsa
Vera			
Falsa			

$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : \forall z \in \mathbb{Z}, \mathcal{Q}(x, y, z)$	<table border="1"><tr><td>Vera</td></tr><tr><td>Falsa</td></tr></table>	Vera	Falsa
Vera			
Falsa			

$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z} : \mathcal{Q}(x, y, z)$	<table border="1"><tr><td>Vera</td></tr><tr><td>Falsa</td></tr></table>	Vera	Falsa
Vera			
Falsa			

$\exists z \in \mathbb{Z} : \forall x, y \in \mathbb{Z}, \mathcal{Q}(x, y, z)$	<table border="1"><tr><td>Vera</td></tr><tr><td>Falsa</td></tr></table>	Vera	Falsa
Vera			
Falsa			

3. 2021-10-11-03

Quale dei seguenti insiemi è limitato inferiormente?

- (a) $\{x \in \mathbb{R} : \log_2 |x| > 1\}$
- (b) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{x} \geq x\}$
- (c) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \geq -|x| + 1\}$
- (d) $\{x \in \mathbb{R} : \arctan |x + 1| < \frac{\pi}{4}\}$

4. **2021-10-11-04**

Per quale delle seguenti coppie (z_1, z_2) di numeri complessi, il prodotto $z_1 \cdot z_2$ ha argomento principale in $\left] \frac{3\pi}{4}, \pi \right[$?

- (a) $z_1 = 1 + 5i$, $z_2 = -1$
- (b) $z_1 = 2i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$
- (c) $z_1 = i$, $z_2 = 1 + 3i$
- (d) $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

5. **2021-10-11-05**

Quale delle seguenti equazioni ha una soluzione $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \neq 1$?

- (a) $z^2|z| = 1$
- (b) $(z + i)^2 = 0$
- (c) $|z + i + \overline{(z + i)}| = 2$
- (d) $(z + 1)(\overline{z} - 1) = -2(\operatorname{Im} z)i$

6. **2021-10-11-06**

La forma algebrica del numero complesso $(1 - \sqrt{3}i)^{15}$ è

- (a) 2^{15}
- (b) -2^{15}
- (c) -1
- (d) $-2^{15}i$

7. **2021-10-11-07**

Nel piano complesso l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$|z - 2i| \geq |z - 3|$$

è

- (a) formato dai punti di una circonferenza
- (b) formato dai punti di una retta
- (c) formato dai vertici di un triangolo equilatero

(d) formato dai punti di un semipiano

8. **2021-10-11-08**

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 2^{x+1} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

f è suriettiva	<input type="checkbox"/> Vera
	<input type="checkbox"/> Falsa

f è iniettiva	<input type="checkbox"/> Vera
	<input type="checkbox"/> Falsa

f è limitata inferiormente	<input type="checkbox"/> Vera
	<input type="checkbox"/> Falsa

f è strettamente monotona	<input type="checkbox"/> Vera
	<input type="checkbox"/> Falsa

9. **2021-10-11-09**

Il numero delle soluzioni in \mathbb{R} dell'equazione

$$\arctan |x| = ||x| - 1|$$

è —.

10. **2021-10-11-10**

Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{|x|} - 1 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti espressioni se è corretta si o no.

$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$	<input type="checkbox"/> Sì
	<input type="checkbox"/> No

$$(f \circ g)(x) = 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

Sì
No

$$(g \circ g)(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Sì
No

$$(f \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

Sì
No

11. 2021-10-11-11

Si ha

(a) $\sup_{]-2,0[} |1 - 2\sqrt[3]{x+1}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(b) $\inf_{[-3,-1]} \log_{\frac{1}{3}} |x| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(c) $\sup_{]0,1[} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(d) $\inf_{]1,+\infty[} \left(2 - \frac{1}{x^3} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 2021-10-11-12

Sia $A = \{(-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$.

Stabilite per ciascuna delle seguenti quattro affermazioni se è vera o falsa.

L'insieme A è costituito solo da punti isolati.

Vera
Falsa

L'unico punto di accumulazione di A è 0.

Vera
Falsa

A è un insieme limitato.

Vera
Falsa

A non ammette minimo.

Vera
Falsa

A non ammette massimo.

Vera
Falsa

13. **2021-10-11-13**

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{se } x \in [-1, 1] \\ \frac{2}{\pi} \arctan x & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Stabilite per ciascuna delle seguenti quattro affermazioni se è vera o falsa.

$x = 0$ è un punto di massimo locale, ma non è un punto di massimo assoluto.

Vera
Falsa

$x = 1$ è un punto di minimo locale per f , ma non è un punto di minimo assoluto.

Vera
Falsa

$\text{im } f =] -1, 1]$.

Vera
Falsa

La funzione $f|_{[-1, +\infty[}$ ha in $x = -1$ un punto di minimo globale.

Vera
Falsa

14. **2021-10-11-14**

Sia $(a_n)_n$ la successione definita da

$$a_n = \frac{n^{n-3} + n^n \sqrt[n]{n+4^n}}{4n! - n^n}.$$

Sia $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Allora L è uguale a $\underline{\quad}$.

15. **2021-10-11-15**

Il limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2(x^2 - 1)}{x - 1}$ è uguale a $\underline{\quad}$.

Per i seguenti TRE esercizi è richiesto UN ACCURATO SVOLGIMENTO:

16. 2021-10-11-16

Provate che la diseguaglianza

$$2^{n^2} \geq n!$$

vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.

17. 2021-10-11-17

Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ due funzioni. Provate che se la funzione composta $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva.

18. 2021-10-11-18

Trovate le soluzioni $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} wz^3 + 8wi = 0 \\ z = w|z|^2. \end{cases}$$