2020-12-15

1. **2021-15-12-01**

   Siano

   $$A = \int_{-1}^{3} ||x+1| - 2|\, dx\,; \qquad B = \int_{-1}^{1} (|\sqrt[3]{x} - 1| + \arctan x^3)\, dx.$$

   Allora $A = \boxed{4 \quad \checkmark}$ e $B = \boxed{2 \quad \checkmark}$.

2. **2021-15-12-02**

   Siano

   $$A = \int_{0}^{1} \frac{4x}{\sqrt{4-2x^2}}\, dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx\,; \qquad B = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{6}{\sqrt{2x-x^2}}\, dx.$$

   Allora $A = \boxed{2 \quad \checkmark}$ e $B = \boxed{1 \quad \checkmark}$.

3. **2021-15-12-03**

   Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona decrescente. Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.

   (a) Esiste $c \in [a, b]$ tale che $(b-a)f(c) = \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$

Sì
No ✓

   (b) La funzione $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ su $[a, b]$ è continua

Sì ✓
No

   (c) La funzione $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ su $[a, b]$ è monotona

Sì
No ✓

   (d) Si ha $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \le f(a)(b-a)$

Sì ✓
No

4. **2021-15-12-04**

   Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ una funzione pari. Sia

$$I = \int_{-2}^{2} (f(t))f'(t)\, dt.$$

   Allora $I = \boxed{0 \quad \checkmark}$

5. **2021-15-12-05**

   Sia

$$I = 2^3 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^3 e^{2x^2}\, dx.$$

   Allora I è uguale a $\boxed{1 \quad \checkmark}$.

6. **2021-15-12-06**

   Sia

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\, dx\,.$$

   Allora $A = \log(\sqrt{a}+1) - \log(\sqrt{b}-1)$, dove $a = \boxed{3 \quad \checkmark}$ e $b = \boxed{3 \quad \checkmark}$.

7. **2021-15-12-07**

   Sia μ la media integrale della funzione $f(x) = 2x\sin(2x)$ sull'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Allora $\mu = \boxed{1 \quad \checkmark}$.

8. **2021-15-12-08**

   Sia E la regione di piano contenuta nel primo e terzo quadrante e delimitata dal grafico della funzione $f(x) = \arctan x$ e dalla retta di equazione $y = \frac{\pi}{4}x$. Allora l'area di E è uguale a

(a) $\dfrac{\pi}{8} - \log\sqrt{2}$
(b) $\dfrac{\pi}{4} - \log 2$ ✓
(c) $\dfrac{\pi}{8} + \log\sqrt{2}$
(d) $\dfrac{\pi}{4} + \log 2$

9. **2021-15-12-09**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione parte intera definita da $f(t) = [t]$ e sia

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Quale delle seguenti affermazioni è falsa?
1. La funzione F è continua.
2. Si ha $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{F(n)}{n^2} = \frac{1}{2}$.
3. La funzione F è crescente su $\mathbb{R}$.
4. Si ha $F'(\pi) = 3$.

(a) La prima
(b) La seconda
(c) La terza ✓
(d) La quarta

10. **2021-15-12-10**

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se si ha

$$\int_0^6 f(2t)\,dt = 4,$$

allora

$$\int_0^{12} f(x)\,dx$$

è uguale a $\boxed{8 \quad \checkmark}$.

11. **2021-15-12-11**

    Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o se è falsa.

    (a) Se $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, allora f ammette una funzione primitiva.

Vera ✓
Falsa

    (b) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ammette una primitiva, allora f è continua in $[a,b]$.

Vera
Falsa ✓

    (c) Se $F_a : [a,b] \to \mathbb{R}$ è la funzione integrale di $f \in \mathcal{R}([a,b])$ relativa al punto a, allora F_a è una primitiva di f.

Vera
Falsa ✓

    (d) Se $f \in \mathcal{R}([a,b])$, allora esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tali che la funzione integrale $F_a(x)$ di f relativa al punto a soddisfa $m(x-a) \le F_a(x) \le M(x-a)$ per ogni $x \in [a,b]$.

Vera ✓
Falsa

12. **2021-15-12-12**

    Determinate, utilizzando la definizione, l'integale

    $$L = \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^2}\, dx.$$

    Allora $e^L =$ $\boxed{2 \quad ✓}$.

13. **2021-15-12-13**

    Siano date le funzioni

    $$F(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt[3]{1-t}}\, dt\,; \qquad G(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{|1-t^2|}}\, dt\,; \qquad H(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

    Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

    (a) Esiste finito il limite $\lim_{x\to 1^-} F(x)$.

Vera ✓
Falsa

    (b) $x = 1$ è asintoto verticale (da sinistra) per $G(x)$.

Vera
Falsa ✓

(c) $x = 0$ è un asintoto verticale (da destra) per $H(x)$.

Vera ✓
Falsa

(d) $H(x)$ ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

Vera ✓
Falsa

14. **2021-15-12-14**

Per ogni integrale generalizzato dato, sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ per cui esso risulta convergente. Allora

(i) per $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x^\alpha}{x(x+\pi)}\,dx$ si ha $\inf E_\alpha = \boxed{0 \ \checkmark}$.

(ii) per $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}(x^{\frac{\alpha}{2}}+\pi)}\,dx$ si ha $\inf E_\alpha = \boxed{1 \ \checkmark}$.

(iii) per $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{[\log(2x^2+e^x)]^\alpha}}\,dx$ si ha $\inf E_\alpha = \boxed{2 \ \checkmark}$.

15. **2021-15-12-15**

Sia

$$f(x) = \frac{x^2+x}{\sqrt[3]{(x+1)^4}\,\sqrt[7]{(x-2)^8}}.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o se è falsa.

(a) La funzione è (in senso improprio) integrabile su $]-1,0]$.

Vera ✓
Falsa

(b) La funzione è (in senso improprio) integrabile su $]2,3]$.

Vera
Falsa ✓

(c) La funzione è Riemann integrabile su $[0,1]$.

Vera ✓
Falsa

(d) La funzione è (in senso improprio) integrabile su $[4,+\infty[$.

Vera
Falsa ✓

16. **2021-15-12-16**

Dite se i seguenti integrali impropri sono convergenti.

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{x \log^2(x^2+x)}\, dx$

Sì ✓
No

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\log(2x+e^x)}}\, dx$

Sì ✓
No

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}(1-x^2)}\, dx$

Sì
No ✓

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(e^{-x+2}-1)\sin\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(2-x)^4}}\, dx$

Sì ✓
No

17. **2021-15-12-17**

Sia $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{|t+1|}{\sqrt[3]{t}}\, dt.$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o se è falsa.

(a) Il dominio di F è un intervallo chiuso e limitato.

Vera
Falsa ✓

(b) F ha un punto critico in $x = -1$.

Vera ✓
Falsa

(c) La funzione F ha un punto di minimo assoluto in $x = 0$.

Vera ✓
Falsa

(d) Il punto $(0, F(0))$ è un punto angoloso.

Vera
Falsa ✓