 A

COGNOME E NOME: ______________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	3	2	2	3	3	2	3
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		**Totale**
Punti	4	4	3	4	3		36
Punti ottenuti							

1. (3 punti) Sia $E \subseteq \mathbb{C}$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione $z^4|z|^2 = -1$.
   Stabilite per ciascuna delle seguenti tre affermazioni se è vera o falsa.
   (a) Gli elementi di E costituiscono i vertici di un quadrato centrato nell'origine del piano di Gauss. ◯ Vera ◯ Falsa
   (b) Esistono $z_1, z_2 \in E$ tali che $z_1 = \overline{z}_2$. ◯ Vera ◯ Falsa
   (c) Esistono $z_1, z_2 \in E$ tali che $\arg z_1 = \arg z_2 + \pi$. ◯ Vera ◯ Falsa
   (d) Se $w = \dfrac{2}{\sqrt{3}+i} + i$, allora $\min\limits_{z\in E}\{|w|, |z|\} =$ ______.

2. (2 punti) Sia
$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos x}{1+\cos x}dx.$$
   Allora $A = a\dfrac{\pi}{4} + b$, dove $a =$ ______ e $b =$ ______.

3. (2 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Sia $\widehat{x} \in [a, b]$ tale che
$$f(\widehat{x}) \leq f(x) \qquad \forall x \in [a, b]\,.$$
   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.
   (a) $\exists c \in [a, b]$ tale che $\dfrac{f(b) + f(\widehat{x})}{2} = f(c)$. ◯ Sì ◯ No
   (b) $\exists c \in [a, b]$ tale che $\dfrac{f(a) - f(\widehat{x})}{2} = f(c)$. ◯ Sì ◯ No
   (c) $f'(\widehat{x}) = 0$. ◯ Sì ◯ No
   (d) $f'(\widehat{x}) \leq f'(x) \qquad \forall x \in [a, b]\,.$ ◯ Sì ◯ No

4. (3 punti) Sia
$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{6\sin^2\sqrt{x} - \log(1+4x) - 2\arctan x}{\cosh x - \cos x}.$$
   Allora $L =$ ______.

5. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = x \sin |x^2 - 1|.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti tre affermazioni se è vera o falsa.

(a) La funzione f soddisfa nell'intervallo $[0, 2]$ le ipotesi del teorema di Weierstrass.
◯ Vera ◯ Falsa

(b) La funzione f soddisfa nell'intervallo $[-1, 1]$ le ipotesi del teorema di Rolle.
◯ Vera ◯ Falsa

(c) $x = 0$ è un punto di flesso per la funzione f.
◯ Vera ◯ Falsa

Per ogni $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sia $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx$. Dite se è vera o falsa la seguente affermazione: La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente. ◯ Vera ◯ Falsa

6. (2 punti) Sia $x \in \mathbb{R}$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{4}{\pi} \arctan \frac{x}{2}\right)^n}{n+2}.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) L'insieme di convergenza della serie è $E =]-2, 2]$. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) L'insieme di convergenza della serie è $E = [-2, 2]$. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) La serie converge assolutamente per $x \in]-2, 2[$. ◯ Vera ◯ Falsa

(d) L'insieme di convergenza della serie è $E = \{2\}$. ◯ Vera ◯ Falsa

7. (3 punti) Sia

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t(1+\sqrt{t})} dt.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti due affermazioni se è vera o falsa.

(a) $\lim_{x \to 0^+} F(x) = +\infty$. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) F è strettamente crescente nell'intervallo $]0, +\infty[$. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) La funzione F ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ di equazione $y = L$. Allora $e^L =$ ______.

8. (4 punti) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. La funzione

$$f(x, y) = 2\alpha x^2 + y^2 - \alpha^2 xy$$

ha un punto critico in $P = (1, 2)$ per $\alpha =$ ______.

Per tale valore di α stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) P è un punto di minimo locale per f. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) P è un punto di minimo assoluto per f. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) La matrice hessiana di f nel punto P è definita positiva. ◯ Vera ◯ Falsa

(d) P è l'unico punto critico di f. ◯ Vera ◯ Falsa

Inoltre, per tale valore di α, indicate quali sono le curve di livello della funzione f:

◯ circonferenze ◯ ellissi ◯ iperboli ◯ rette

9. (4 punti) Verificate che l'equazione

$$x \sin x - y - \int_0^y e^{t^2}\, dt = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno di $x_0 = 0$ tale che $\varphi(0) = 0$. Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) La funzione φ ha un punto critico in $x_0 = 0$. ○ Vera ○ Falsa

(b) La funzione φ ha un minimo locale stretto in $x_0 = 0$. ○ Vera ○ Falsa

(c) Si ha $\varphi(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$. ○ Vera ○ Falsa

(d) L'equazione definisce implicitamente una funzione $x = \psi(y)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno di $y_0 = 0$ tale che $\psi(0) = 0$. ○ Vera ○ Falsa

10. (3 punti) Sia $\mathbf{r}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da

$$\mathbf{r}(t) = (\sqrt{5}t, 2\cos t, 2(1 + \sin t)).$$

Allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $\|\mathbf{r}'(t)\| =$ ______ e $\|\mathbf{r}''(t)\| =$ ______.

L'equazione parametrica della retta tangente alla curva $\mathbf{r}(t)$ nel punto $(0, 2, 2)$ è

$$\begin{cases} x = \sqrt{5}s \\ y = a + bs \\ z = c + ds \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R},$$

dove $a =$ ______, $b =$ ______, $c =$ ______ e $d =$ ______.

11. (4 punti) Sia $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ la funzione definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ e sia $\mathcal{C}$ la curva data dall'equazione

$$\log(1 + x^2) + y^2 = 1.$$

Dopo aver verificato che $f|_{\mathcal{C}}$ è ben definita, determinate il valore minimo m e il valore massimo M assunti da f su $\mathcal{C}$. Si ha $e^m =$ ______ e $e^M =$ ______.

12. (3 punti) Sia A l'insieme di definizione di

$$f(x, y) = \frac{\arcsin(2 - |x| - |y|)}{\sqrt[3]{1 - x^2}}.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) A è aperto. ○ Vera ○ Falsa

(b) $\partial B_1(\mathbf{0}) \subset A$ ○ Vera ○ Falsa

(c) A è connesso per poligonali. ○ Vera ○ Falsa

(d) $\overline{A}$ è compatto. ○ Vera ○ Falsa

(e) $\{(-1, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq 2\} \subset \partial A$ ○ Vera ○ Falsa