

(A)

1. Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile,  $\underline{r}: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva di classe  $\mathcal{C}^1$   
 $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \quad t \mapsto (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$

Allora  $\forall t \in ]-1, 1[$  mi ha che  $f \circ \underline{r}$  è derivabile in  $t$  e

$$(f \circ \underline{r})'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{r}(t)) r_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{r}(t)) r_2'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\underline{r}(t)) r_3'(t). \quad (*)$$

Consideriamo  $\underline{r}: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \underline{r}(t) = (t^2 + 1, \arccos t, \sin t + 2)$ .

$\underline{r}$  è derivabile (anche di classe  $\mathcal{C}^1$ ; osserviamo che tale regolarità però non è necessaria per la validità della formula in  $(*)$ ) e

$$\underline{r}'(t) = (2t, \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}, \cos t) \quad \forall t \in ]-1, 1[.$$

Risulta allora

$$\begin{aligned} (a) \quad (f \circ \underline{r})'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{r}(0)) r_1'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{r}(0)) r_2'(0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\underline{r}(0)) r_3'(0) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial y}(1, \frac{\pi}{2}, 2) + \frac{\partial f}{\partial z}(1, \frac{\pi}{2}, 2). \quad \square \end{aligned}$$

- (b) Oss. che  $\underline{r}'(0) = (0, -1, 1) \neq \underline{0}$ . L'eq. parametrica della retta tangente alla curva nel pt.  $\underline{r}(0) = (1, \frac{\pi}{2}, 2)$  è quindi

$$\underline{x} = \underline{r}(0) + \underline{r}'(0) s \quad s \in \mathbb{R},$$

$$\text{ossia} \quad \begin{cases} x = 1 + 0 \cdot s \\ y = \frac{\pi}{2} - 1 \cdot s \\ z = 2 + 1 \cdot s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{e quindi da} \quad \begin{cases} x = a + bs \\ y = c + ds \\ z = 2 + s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R},$$

$$\text{dove} \quad \underline{a} = 1, \quad b = 0, \quad c = \frac{\pi}{2}, \quad d = -1. \quad \blacksquare$$

2.  $\mathcal{C} : \rho = e^{\theta/\sqrt{3}} \quad \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

- (a) La curva può essere descritta dalla funzione  $\underline{r}(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = e^{\theta/\sqrt{3}} \cos \theta \\ y(\theta) = e^{\theta/\sqrt{3}} \sin \theta \end{cases}$   
 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ( $\underline{r}$  è una rappresentazione parametrica di  $\mathcal{C}$  vista come

insieme di punti di  $\mathbb{R}^2$ ). Il vettore  $\underline{r}'(\vartheta)$  risulta

$$\underline{r}'(\vartheta) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{\vartheta}{\sqrt{3}}} \cos \vartheta - e^{\frac{\vartheta}{\sqrt{3}}} \sin \vartheta, \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{\vartheta}{\sqrt{3}}} \sin \vartheta + e^{\frac{\vartheta}{\sqrt{3}}} \cos \vartheta \right);$$

risulta

$$\begin{aligned} \|\underline{r}'(\vartheta)\|^2 &= \frac{1}{3} e^{\frac{2\vartheta}{\sqrt{3}}} \cos^2 \vartheta + e^{\frac{2\vartheta}{\sqrt{3}}} \sin^2 \vartheta - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{2\vartheta}{\sqrt{3}}} \cos \vartheta \sin \vartheta \\ &\quad + \frac{1}{3} e^{\frac{2\vartheta}{\sqrt{3}}} \sin^2 \vartheta + e^{\frac{2\vartheta}{\sqrt{3}}} \cos^2 \vartheta + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{2\vartheta}{\sqrt{3}}} \cos \vartheta \sin \vartheta \\ &= \frac{4}{3} e^{\frac{2\vartheta}{\sqrt{3}}} \neq 0 \quad \forall \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

e quindi  $\underline{r}'(\vartheta) \neq \underline{0} \quad \forall \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  provando che la curva è regolare  $\forall \vartheta$ . □

(b) Il vettore  $\underline{r}'(\vartheta)$  è tangente alla curva in  $\underline{r}(\vartheta)$ . Questo vettore è parallelo alla retta di eq.  $x - \sqrt{3}y = 0$  (che ha la direzione del vettore  $(1, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ) se e solo se  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  t.c.  $\underline{r}'(\vartheta) = \lambda(1, \frac{1}{\sqrt{3}})$ .

Quindi 
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{\vartheta}{\sqrt{3}}} \cos \vartheta - e^{\frac{\vartheta}{\sqrt{3}}} \sin \vartheta = \lambda \\ \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{\vartheta}{\sqrt{3}}} \sin \vartheta + e^{\frac{\vartheta}{\sqrt{3}}} \cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda. \end{cases}$$

Per risolvere osserviamo che, in particolare, deve essere

$$\frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{\vartheta}{\sqrt{3}}} \cos \vartheta - e^{\frac{\vartheta}{\sqrt{3}}} \sin \vartheta = e^{\frac{\vartheta}{\sqrt{3}}} \sin \vartheta + \sqrt{3} e^{\frac{\vartheta}{\sqrt{3}}} \cos \vartheta$$

quindi 
$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right) \cos \vartheta = 2 \sin \vartheta$$

cioè 
$$\begin{aligned} \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} &= \tan \vartheta, & (\cos \vartheta \neq 0 \text{ per } \vartheta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} &= \tan \vartheta. \end{aligned}$$

L'unico valore  $\vartheta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  che risolve quest'equazione è  $\underline{\underline{\vartheta = -\frac{\pi}{6}}}$ . ■

3. Sia  $\mathcal{C}$  la curva piana data dall'eq.

$$y^2 - 2xy + x^2 + 3x + 3y - 6 = 0$$

e sia  $P = (1, 1)$  un pt. su  $\mathcal{C}$ . Poniamo  $g(x, y) = y^2 - 2xy + x^2 + 3x + 3y - 6$ .

(a) Allora  $\mathcal{C}$  è data dalla curva di livello 0 della funzione  $g$ .

L'eq. della retta tangente a  $\mathcal{C}$  in un suo pt.  $(x_0, y_0)$  in cui  $\nabla g$

non si annulla e data da

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0) = 0.$$

Il pt.  $(1,1)$  sta su  $\mathcal{C}$ ; inoltre

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -2y + 2x + 3$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = 3$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y - 2x + 3$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = 3.$$

Allora l'eq. della retta tangente in  $P \in$

$$3(x-1) + 3(y-1) = 0,$$

ossia  $x+y-2=0$ . Allora l'eq. della retta tangente a  $\mathcal{C}$  in  $P \in$

$$ax+by-2=0,$$

dove  $a=1$ ,  $b=1$ .

(b) Dato  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $f(x,y) = \alpha x^2 + y^4 + 2x$ , ricordiamo che un pt.

$(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$  in cui  $\nabla g$  non si annulla è un pt. stazionario per  $f$  su  $\mathcal{C} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$  t.c.  $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ , ossia

$$\iff \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = 0.$$

$$\text{Or } \det \begin{pmatrix} 2\alpha+2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 0 \iff 2\alpha+2=4 \iff \underline{\underline{\alpha=1.}}$$

4. Abbiamo  $f(x,y) = 2xy^2 + x^2 \log(1+x+y) - \sin(xy)$ .

Ricordiamo che  $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$  per  $t \rightarrow 0$

$$\sin s = s - \frac{s^3}{3!} + o(s^3) \text{ per } s \rightarrow 0.$$

Poichè  $x+y \rightarrow 0$  per  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ ,  $xy \rightarrow 0$  per  $(x,y) \rightarrow (0,0)$

possiamo scrivere

$$x^2 \log(1+x+y) = x^2(x+y) - x^2 \frac{(x+y)^2}{2} + x^2 o((x+y)^2) \text{ per } (x,y) \rightarrow (0,0)$$

$$\sin(xy) = xy - \frac{(xy)^3}{3!} + o((xy)^3) \text{ per } (x,y) \rightarrow (0,0).$$

Osserveremo ora che  $x^2 o((x+y)^2) = o((x^2+y^2)^2) (= o(\|(x,y)\|^4))$

per  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ .

Infatti

$$\left| \frac{x^2 o((x+y)^2)}{(x^2+y^2)^2} \right| = \left| \frac{o((x+y)^2)}{(x+y)^2} \cdot \frac{(x+y)^2 x^2}{(x^2+y^2)^2} \right|$$

$$\leq \left| \frac{o((x+y)^2)}{(x+y)^2} \right| \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \leq 2 \left| \frac{o((x+y)^2)}{(x+y)^2} \right|$$

$\uparrow$   
 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq 2(x^2+y^2)$

$\downarrow$   
 $(x,y) \rightarrow (0,0)$   
 $0$

Inoltre  $(xy)^3 = o((x^2+y^2)^2)$  per  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ . Infatti

$$\left| \frac{(xy)^3}{(x^2+y^2)^2} \right| = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} |xy| \leq |xy|$$

$\downarrow$   
 $(x,y) \rightarrow (0,0)$   
 $0$

e ovviamente anche  $o((xy)^3) = o((x^2+y^2)^2)$  per  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ .

Quindi,

$$\begin{aligned} & 2xy^2 + x^2 \log(1+x+y) - \sin(xy) \\ &= 2xy^2 + x^2(x+y) - \frac{x^2(x+y)^2}{2} - xy + o((x^2+y^2)^2) \\ & \quad \text{per } (x,y) \rightarrow (0,0) \\ &= 2xy^2 + x^3 + x^2y - \frac{x^4}{2} - x^3y - \frac{x^2y^2}{2} - xy + o((x^2+y^2)^2) \\ & \quad \text{per } (x,y) \rightarrow (0,0) \\ &= -xy + 2xy^2 + x^2y + x^3 - \frac{x^2y^2}{2} - x^3y - \frac{x^4}{2} + o((x^2+y^2)^2) \\ & \quad \text{per } (x,y) \rightarrow (0,0) \end{aligned}$$

Per l'unicità del polinomio di Taylor possiamo asserire che il

polinomio di Taylor di ordine 4 centrato in  $(0,0)$  di  $f(x,y)$  è

$$P_{4,0}(x) = -xy + 2xy^2 + x^2y + x^3 - \frac{x^2y^2}{2} - x^3y - \frac{x^4}{2}$$

e quindi è uguale a

$$axy + bxy^2 + cx^2y + dx^3 - \frac{x^2y^2}{2} + ex^3y - \frac{x^4}{2},$$

dove  $a = -1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 1$ ,  $d = 1$ ,  $e = -1$ .

□

(a)  $x^2y^2 = o(\|(x,y)\|^4)$  per  $(x,y) \rightarrow (0,0)$  (F)

Infatti,  $\frac{x^2y^2}{\|(x,y)\|^4} = \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \not\rightarrow 0$  per  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ ;

basta considerare  $y=x \neq 0$  e si ha  $\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \Big|_{y=x} = \frac{x^4}{4x^4} \rightarrow \frac{1}{4}$ .

(b)  $x^2 o((x+y)^2) = o(\|(x,y)\|^4)$  per  $(x,y) \rightarrow (0,0)$  (V)  
(vedi inizio pag. 4)

5. Sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x,y) = (1-x^2-y^2)(y+x^2+1)$ . Oss. che  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$

Il sistema di equazioni che fornisce i pt. critici è

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x(y+x^2+1) + (1-x^2-y^2)2x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y(y+x^2+1) + (1-x^2-y^2) = 0.$$

Se  $x=0$ , la prima eq. è soddisfatta; la seconda eq. diventa  $-2y(y+1)+1-y^2=0$ , ossia  $3y^2+2y-1=0$ , quindi  $y=-1$  o  $y=\frac{1}{3}$ . Si ha quindi

$$\underline{P_1 = (0, -1)} \quad \text{con} \quad \underline{\alpha = -1}$$

$$\underline{P_2 = (0, \frac{1}{3})} \quad \text{con} \quad \underline{\beta = \frac{1}{3}}.$$

[Verifico - non era richiesto nella consegna! - che gli unici pt. critici per  $f$  sono proprio  $P_1 = (0, -1)$  e  $P_2 = (0, \frac{1}{3})$ .

Oss. che  $\nabla f(x,y) = 0$  possiamo riscriverlo come

$$\begin{cases} 1-x^2-y^2 = 2y(y+x^2+1) \\ x[(y+x^2+1) + 2y(y+x^2+1)] = 0. \end{cases}$$

La seconda eq. diventa  $x(y+x^2+1)(2y-1)=0$ , per cui si ha uno dei casi seguenti:

$$x=0, \quad y+x^2+1=0, \quad 2y-1=0.$$

Se  $x=0$ , come già oss. sopra, si hanno i pt. critici  $(0, -1)$  e  $(0, \frac{1}{3})$ .

Se  $y+x^2+1=0$ , il sistema diventa

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y+x^2+1=0 \end{cases}$$

che, come si verifica subito, ha solamente la soluzione  $(0, -1)$ .

Infine, se  $2y-1=0$ , la prima eq. diventa  $1-x^2-\frac{1}{4}=\frac{3}{2}+x^2$ , ossia  $2x^2+\frac{3}{2}=0$ , che non ha soluzioni.]

Determiniamo ora la matrice hessiana; poiché

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2(y+x^2+1) - 2x \cdot 2x - 2x \cdot 2x + (1-x^2-y^2)2$$

$$= -12x^2 - 2y^2 - 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -2x - 4xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2(y+x^2+1) - 2y - 2y$$

$$= -2x^2 - 6y - 2$$

possiamo scrivere

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -12x^2 - 2y^2 - 2y & -2x - 4xy \\ -2x - 4xy & -2x^2 - 6y - 2 \end{pmatrix}$$

Risulta

$$\det H_f(0,-1) = 0$$

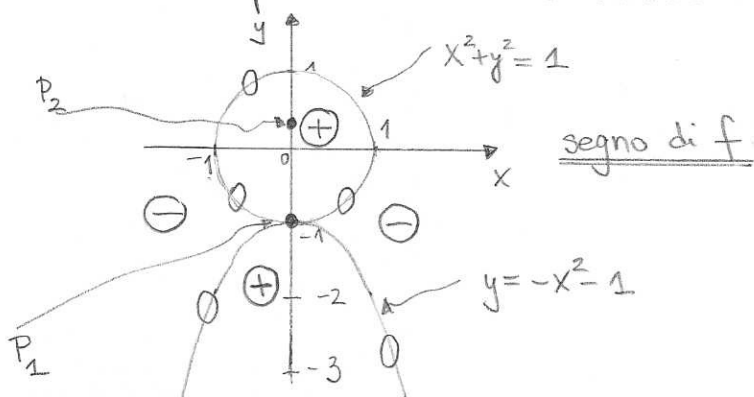
$$\det H_f(0, \frac{1}{3}) = \begin{vmatrix} -\frac{8}{9} & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \frac{1}{3}) < 0 \quad \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, \frac{1}{3}) < 0 \right)$$

Quindi  $(0, \frac{1}{3})$  è un pt. di massimo locale stretto per  $f$ , mentre per quanto riguarda  $(0,-1)$  dobbiamo cercare di studiare il segno dell'incremento  $f(x,y) - f(0,-1)$ , cioè di  $f(x,y)$  poiché  $f(0,-1) = 0$ .

Poiché l'espressione di  $f(x,y)$  è prodotto di due fattori, il segno complessivo si ottiene subito da quello dei due fattori componenti.

Quindi  $(0,-1)$  è punto di sella.



Oss. Dal segno di  $f$  si poteva subito (come abbiamo fatto qui sopra) dedurre che il pt. critico  $P_1$

è un pt. di sella. Inoltre, oss. che  $f|_{\overline{B}_1(0)}$

assume max e min  $\left(\text{su } \overline{B_1(0)}\right)$  per il teorema di Weierstrass, da  $\left(\begin{smallmatrix} \text{Unico} \\ \text{pt. critico} \\ \in B_1(0) \end{smallmatrix}\right)$   $f|_{\partial \overline{B_1(0)}} = 0$  e  $f > 0$  su  $B_1(0)$  si deduce che  $P_2 = (0, \frac{1}{3})$  è pt. di max assoluto per  $f|_{\overline{B_1(0)}}$  e quindi pt. di max loc. stretto per  $f$  su  $\mathbb{R}^2$  (senza dover passare per lo studio della matrice hessiana). In definitiva,

(a)  $P_1$  è un pt. di sella per  $f$ .

(b)  $P_2$  è un pt. di massimo locale stretto per  $f$ . □

6. Poniamo  $g(x,y) = y \log(x^2+1) - y^2 + e^{-2x} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ ; sia  $(x_0, y_0) = (0, 1)$ .

Risulta  $g(0,1) = -1 + 1 = 0$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \log(x^2+1) - 2y \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,1) = -2 \neq 0.$$

Allora è possibile utilizzare il teorema della funzione implicita nel pt.  $(0,1)$  e ottenere una funzione  $y = \varphi(x)$  di classe  $\mathcal{C}^\infty$  in un intorno  $U$  di  $x_0 = 0$  tale che  $y_0 = \varphi(0) = 1$ , il cui grafico rappresenta la curva di eq.  $g(x,y) = 0$  in un intorno di  $(0,1)$ . Abbiamo

$$(*) \quad g(x, \varphi(x)) = \varphi(x) \log(x^2+1) - \varphi^2(x) + e^{-2x} = 0 \quad \forall x \in U.$$

Derivando  $(*)$  rispetto a  $x$  si ha

$$(**) \quad \varphi'(x) \log(x^2+1) + \varphi(x) \frac{2x}{x^2+1} - 2\varphi(x)\varphi'(x) - 2e^{-2x} = 0 \quad \forall x \in U$$

e in particolare, tenendo conto che  $\varphi(0) = 1$ ,

$$-2\varphi'(0) - 2 = 0$$

ossia  $\varphi'(0) = -1$ . Allora

(a) L'eq. della retta tangente al grafico di  $\varphi$  nel pt.  $(0,1)$  risulta

$$\underline{y = -x + 1} \quad (y = \varphi(0) + \varphi'(0)(x-0)) \quad \square$$

Oss. che lo sviluppo di Taylor di  $\varphi$  centrato in  $x_0 = 0$  di ordine 1

è dunque  $\varphi(x) = 1 - x + o(x)$  per  $x \rightarrow 0$ . Inoltre

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Abbiamo  $\varphi(x) - e^{-x} = \cancel{1} - \cancel{x} + o(x) - \cancel{1} + \cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$   
 $= o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$

Per rispondere dunque al quesito in b) dobbiamo indagare lo sviluppo di Taylor di  $\varphi$  di ordine 2 centrato in  $x_0 = 0$ , ossia determinare  $\varphi''(0)$ .

Derivando  $(**)$  rispetto a  $x$  si ha

$$\varphi''(x) \log(x^2+1) + \varphi'(x) \frac{2x}{x^2+1} + \varphi'(x) \frac{2x}{x^2+1} + \varphi(x) \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} - 2(\varphi'(x))^2 - 2\varphi(x)\varphi''(x) + 4e^{-2x} = 0 \quad \forall x \in U$$

e in particolare, tenendo conto che  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi'(0) = -1$ , risulta

$$\cancel{2} - \cancel{2} - 2\varphi''(0) + 4 = 0,$$

ossia  $\varphi''(0) = 2$ . Possiamo allora scrivere

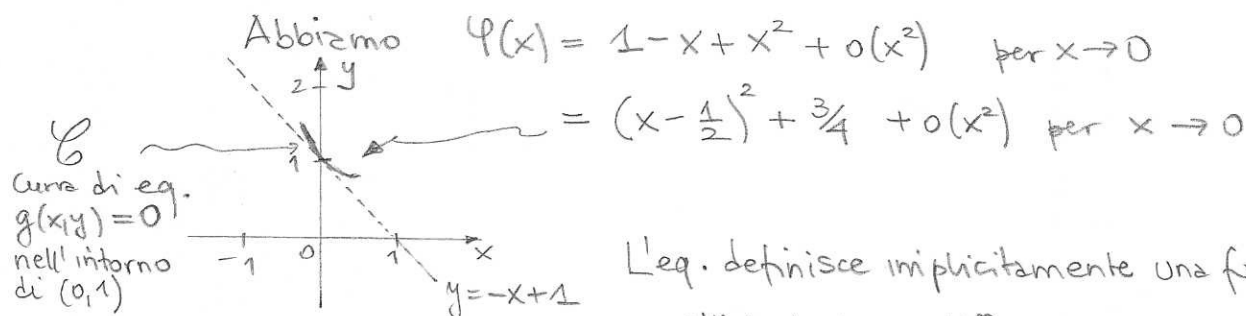
$$\varphi(x) = 1 - x + x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

(b) Abbiamo  $\forall x > 0$   $\frac{\varphi(x) - e^{-x}}{x^\alpha} = \frac{\cancel{1} - \cancel{x} + x^2 + o(x^2) - \cancel{1} + \cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^\alpha}$   
 $= \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^\alpha}.$

Dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - e^{-x}}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

□



L'eq. definisce implicitamente una funzione  $x = \varphi(y)$  di classe  $C^\infty$  in un intorno di  $y_0 = 1$  t.c.  $\varphi(1) = 0$ ? (Si).

Basta oss. che  $g(0,1) = 0$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+1} - 2e^{-2x} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(0,1) = -2 \neq 0$  e quindi è possibile utilizzare nuov. il teorema della funz. implicita nel intorno  $(0,1)$  ... (con variabili  $x$  e  $y$  scambiati). ■

7. (a)  $\mathcal{C} : 2x^3 + y^2 - x^2 = 0$

Sia  $g(x,y) = 2x^3 + y^2 - x^2$ . Il teorema della funzione implicita non può essere applicato rispetto ad alcuna delle due variabili nei pt. della curva in cui si annullano entrambe le derivate di  $g$ :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 6x^2 - 2x = 0 \quad 2x(3x-1) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y = 0$$

cioè nei pt.  $(0,0)$  e  $(\frac{1}{3}, 0)$ . Oss. che solo  $(0,0) \in \mathcal{C}$ , poiché  $2 \cdot \frac{1}{27} + 0 - \frac{1}{9} \neq 0$ .

Quindi, per  $(0,0)$  non è possibile applicare il teorema della funzione implicita rispetto ad alcuna delle due variabili.  $\square$

(b) L'eq. della retta tangente a  $\mathcal{C}$  in un suo pt.  $(x_0, y_0)$  in cui non si annulla  $\nabla g$  è data da

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0;$$

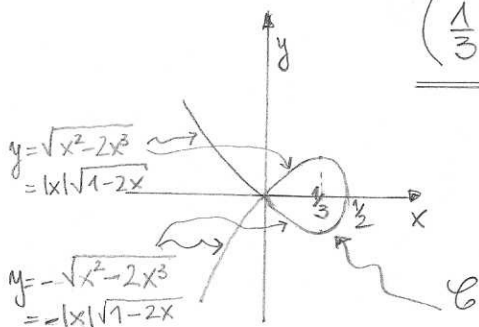
questa è orizzontale se e solo se  $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ . Rimettendo

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 6x^2 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 0, \quad x_0 = \frac{1}{3}$$

$(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$  e  $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$  implica che i due pt. accettabili sono

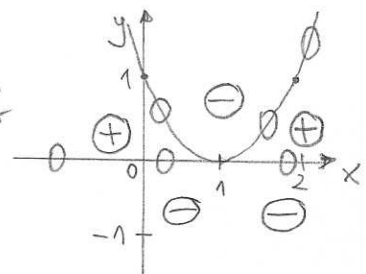
$$\left( \frac{1}{3}, -\frac{1}{3\sqrt{3}} \right) \quad \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}} \right)$$

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 - 2x^3 \geq 0 \\ y &= \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{2}{27}} \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{27}} \end{aligned}$$



8.  $f(x,y) = y(x-1)^2 - y^2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$   $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$   
 $= y[(x-1)^2 - y]$

Possiamo rapidamente rappresentare il segno di  $f$



Risulta  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y(x-1)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x-1)^2 - 2y$

Quindi i pt. critici risolvono il sistema  $\begin{cases} 2y(x-1) = 0 \\ (x-1)^2 - 2y = 0. \end{cases}$

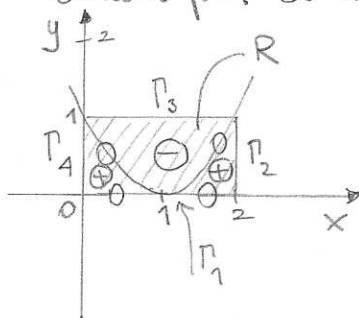
Risulta che  $P = (1,0)$  è l'unico pt. critico per  $f$ .

Dal segno di  $f$  risulta subito che  $P$  è un pt. di sella per  $f$ .

( $f(1,0) = 0$  e in ogni intorno di  $(1,0)$  cadono pt.  $(x,y)$  per cui  $f(x,y) > 0$  e pt.  $(x,y)$  t.c.  $f(x,y) < 0$ ). Abbiamo allora che

(a) è un'affermazione (F),

(b) è un'affermazione (V):  $f$  è una funzione continua su un insieme compatto: per il teorema di Weierstrass  $f$  assume max e minimo su  $R$ . Poiché  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$  e  $\nexists$  pt. critici in  $\overset{\circ}{R}$ , tutti i pt. di minimo e massimo assoluto di  $f$  si trovano su  $\partial R$ .



$$\partial R = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

$$f|_{\Gamma_1}(x,y) = f(x,0) = 0.$$

$$f|_{\Gamma_2}(x,y) = f(2,y) = y - y^2 = -(y - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$$

$$\min_{0 \leq y \leq 1} f(2,y) = f(2,0) = f(2,1) = 0;$$

$$\max_{0 \leq y \leq 1} f(2,y) = f(2, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}.$$

$$\underline{f|_{\Gamma_4}(x,y) = f|_{\Gamma_2}(x,y)}$$

$$f|_{\Gamma_3}(x,y) = f(x,1) = (x-1)^2 - 1$$

$$\min_{0 \leq x \leq 2} f(x,1) = f(1,1) = -1;$$

$$\max_{0 \leq x \leq 2} f(x,1) = f(0,1) = f(2,1) = 0.$$

Dunque

Il numero di pt. di min. assoluto di  $f$  su  $R$  è 1

Il numero di pt. di max. assoluto di  $f$  su  $R$  è 2.

Inoltre,  $\min_R f = -1$   $\max_R f = \frac{1}{4}$ .

$$9. f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin y^3}{x^4 + y^4} & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$(a) \text{ Oss. che } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x,0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f(0,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Segue che  $\forall \underline{h} = (h,k), h \neq 0$  in  $\mathbb{R}^2$

$$\frac{f(\underline{h}) - f(\underline{0}) - \langle \nabla f(\underline{0}), \underline{h} \rangle}{\|\underline{h}\|} = \frac{f(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} = \frac{h^2 \sin k^3}{\sqrt{h^2 + k^2} (h^4 + k^4)} \quad \underline{h} = (h,k)$$

$$\text{Ora } \left. \frac{h^2 \sin k^3}{\sqrt{h^2 + k^2} (h^4 + k^4)} \right|_{k=h \neq 0} = \frac{h^2 \sinh^3}{2\sqrt{2}|h| h^4} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Quindi  $f$  non è differenziabile in  $(0,0)$ . L'affermazione (a) è (F).  $\square$

(b)  $f$  non ammette piano tangente al grafico di  $f$  in  $(0,0)$  di eq.  $z=0$ .  
L'affermazione (b) è (F), poiché  $f$  non è differenziabile in  $(0,0)$ .  $\blacksquare$

$$10. f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x_1, x_2) = (\sinh(x_1 - x_2), x_1 + x_2)$$

•  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$  poiché ogni componente lo è (basta  $\mathcal{C}^1$ )

$$\text{Inoltre} \quad J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cosh(x_1 - x_2) & -\cosh(x_1 - x_2) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{implica } \det J_f(x_1, x_2) = 2 \cosh(x_1 - x_2) \neq 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Risulta che  $f$  è un diffeomorfismo locale in ogni pt. di  $\mathbb{R}^2$ .

$$\text{Oss. che } f(x_1, x_2) = (0, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sinh(x_1 - x_2) = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Allora} \quad J_{f^{-1}}(0, 1) = [J_f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Si ha} \quad J_{f^{-1}}(0, 1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\text{dove } \underline{a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2}, \quad d = \frac{1}{2}.}$$

11.  $f(x,y,z) = x - y$      $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 1\}$ .

$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ ,  $E$  chiuso e limitato. Per il teorema di Weierstrass esistono massimo e minimo di  $f$  su  $E$ . Poiché  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$  e  $\nabla f(x,y,z) = (1, -1, 0) \neq 0 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ , il massimo e il minimo di  $f$  su  $E$  si trovano su  $\partial E$ . Impostiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = 8\lambda y \\ 0 = 2\lambda z \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z=0 \quad \text{non potendo essere } \lambda=0$$

soluzione delle prime due equazioni.

Quindi

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{8\lambda} \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$$

Si ottiene  $(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}, \mp \frac{1}{2\sqrt{5}}, 0)$  pt. stazionari di  $f$  su  $E$ .

Risulta  $f(+\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}, 0) = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$   
 $f(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}, 0) = -\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2},$

e abbiamo  $\min_{E} f = -\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \max_{E} f = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

12.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$      $f(x,y,z) = (x^2 + y + z^2, x - z) \quad \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$      $g(s,t) = (e^{s-t}, s) \quad \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$

Abbiamo che  $g \circ f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  è differenziabile in ogni pt. di  $\mathbb{R}^3$  (anzi  $\mathcal{C}^\infty$ ) e

$$J_{g \circ f}(x,y,z) = J_g(f(x,y,z)) \cdot J_f(x,y,z) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{Ora } J_g(s, t) = \begin{pmatrix} e^{s-t} & -e^{s-t} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M^{2 \times 2}$$

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 2z \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M^{2 \times 3}$$

$$\text{e } f(2, -4, 1) = (1, 1). \text{ Quindi}$$

$$\begin{aligned} J_{g \circ f}(2, -4, 1) &= J_g(f(2, -4, 1)) \cdot J_f(2, -4, 1) = J_g(1, 1) \cdot J_f(2, -4, 1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{da cui } \frac{\partial (g \circ f)_1}{\partial z}(2, -4, 1) = \underline{\underline{3}}; \quad \frac{\partial (g \circ f)_2}{\partial x}(2, -4, 1) = \underline{\underline{4}}.$$

In alternativa, possiamo porre  $h(x, y, z) = g \circ f(x, y, z) = g(f(x, y, z))$

$$\begin{aligned} &= g(x^2 + y + z^2, x - z) \\ &= (e^{x^2 + y + z^2 - x + z}, x^2 + y + z^2) \\ &= (h_1(x, y, z), h_2(x, y, z)) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial (g \circ f)_1}{\partial z}(2, -4, 1) &= \frac{\partial h_1}{\partial z}(2, -4, 1) \\ &= \left[ e^{x^2 + y + z^2 - x + z} \cdot (2z + 1) \right] \Big|_{(x, y, z) = (2, -4, 1)} = \underline{\underline{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (g \circ f)_2}{\partial x}(2, -4, 1) &= \frac{\partial h_2}{\partial x}(2, -4, 1) \\ &= 2x \Big|_{(x, y, z) = (2, -4, 1)} = \underline{\underline{4}}. \end{aligned}$$

