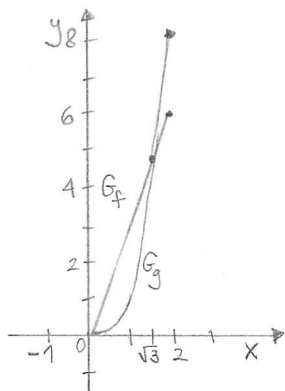


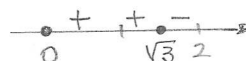
1. siano $f, g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 3x$, $g(x) = x^3$



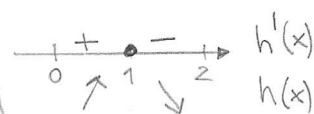
• $\|f-g\|_{\infty} = \max_{x \in [0,2]} |f(x)-g(x)| = \underline{\underline{2}}$. Infatti:

poniamo $h(x) = f(x) - g(x) = 3x - x^3$ su $[0, 2]$

• segno di h



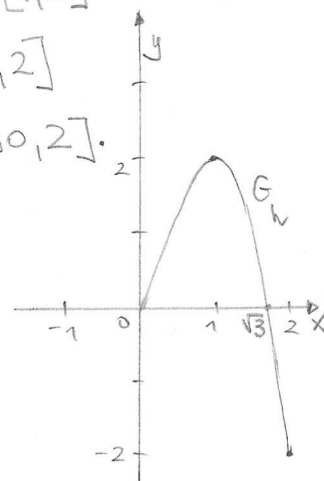
• $h'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1-x^2)$



$\Rightarrow h(x)$ è strett. crescente su $[0, 1]$
strett. decrescente su $[1, 2]$

• $h''(x) = -6x < 0$ su $]0, 2]$

$\Rightarrow h(x)$ è strett. concava su $]0, 2]$.



Possiamo tracciare un grafico qualitativo di h .

Risulta $\max_{x \in [0,2]} |f(x)-g(x)| = \max_{x \in [0,2]} |h(x)| = 2$

(nota: $2 = |h(1)| = |h(2)|$).

• $\|f-g\|_1 = \int_0^2 |f(x)-g(x)| dx = \int_0^{\sqrt{3}} (f(x)-g(x)) dx + \int_{\sqrt{3}}^2 -(f(x)-g(x)) dx$
 $= \int_0^{\sqrt{3}} (3x - x^3) dx - \int_{\sqrt{3}}^2 (3x - x^3) dx$
 $= \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{3}} - \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{\sqrt{3}}^2 = \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4} \right) - \left(6 - 4 \right) + \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4} \right)$
 $= 7 - \frac{9}{2} = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$

2. $f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

oss. che $\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$, $f_n(x)$ è dispari su $[-1, 1]$, quindi bast

studiare $f_n|_{[0,1]}$. Notiamo subito che $f_n(x) \geq 0 \forall x \in [0, 1]$

e $f_n(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. Inoltre $f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$. Dunque
 $\forall n \geq 1$, $f_n'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{n}$. Dal segno di

$f_n'(x)$ risulta che $x=\frac{1}{n}$ è un pt. di massimo (assoluto) per f_n
 in $[0,1]$ e $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n}}{1+n^2 \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2n}$.

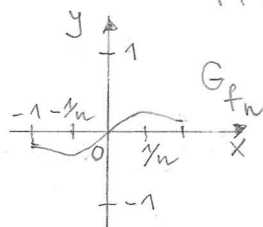
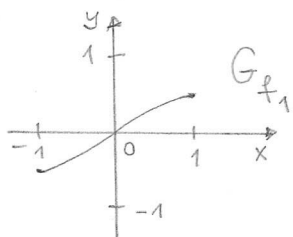


Grafico qualitativo di $f_1(x)$, $f_n(x)$

Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$ si ha

$$\begin{aligned} \text{a) } \underline{d_\infty(f_n, f)} &= \max_{x \in [-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in [-1,1]} |f_n(x)| = \\ &= \max_{x \in [0,1]} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2n}}}. \end{aligned} \quad \square$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \underline{d_1(f_n, f)} &= \int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)| dx = 2 \int_0^1 f_n(x) dx = 2 \int_0^1 \frac{x}{1+n^2x^2} dx \\ &= \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{2n^2x}{1+n^2x^2} dx = \frac{1}{n^2} \left[\log(1+n^2x^2) \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\log(1+n^2)}{n^2}}}. \end{aligned} \quad \square$$

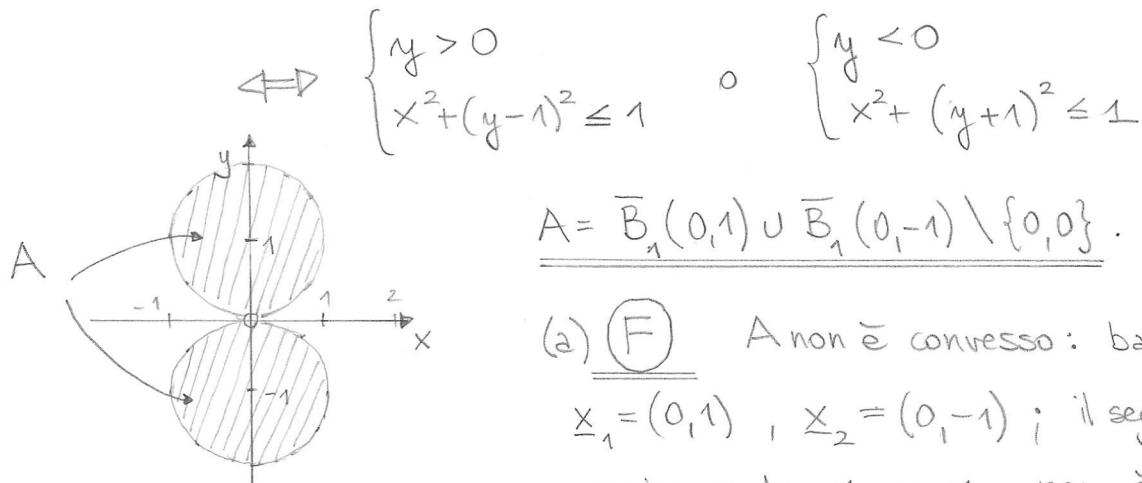
$$\underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x) \quad \forall x \in [-1,1] \quad (\text{F}) : \text{ infatti, } \forall n \in \mathbb{N}_{>0}}$$

$$f_n'(0) = 1, \text{ mentre } f'(0) = 0. \quad \blacksquare$$

3. Sia $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x^2+y^2}{2y}\right)$. Abbiamo che

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, -1 \leq \frac{x^2+y^2}{2y} \leq 1\}. \text{ Ora}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} y \neq 0 \\ -1 \leq \frac{x^2+y^2}{2y} \leq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ -2y \leq x^2+y^2 \leq 2y \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} y < 0 \\ 2y \leq x^2+y^2 \leq -2y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x^2+(y-1)^2 \leq 1 \\ x^2+(y+1)^2 \geq 1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} y < 0 \\ x^2+(y+1)^2 \leq 1 \\ x^2+(y-1)^2 \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$



(a) (F) A non è convesso: basta prendere $x_1 = (0, 1)$, $x_2 = (0, -1)$; il segmento congiungente x_1 e x_2 non è contenuto

in A, poiché $0 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \notin A$. □

(b) (V) $\overline{A} = \overline{B}_1(0, 1) \cup \overline{B}_1(0, -1)$ è compatto. □

(c) (F) $f(A) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$. Nota che $f(x, y) = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$, ma $(0, 0) \notin A$. □

(d) (F) f è una funzione continua su A, ma A non è compatto! Oss. che $\max_A f$ e $\min_A f$ sono, ma le ipotesi del teorema di Weierstrass non sono soddisfatte (il teorema di Weierstrass ci dà cond. suff. affinché f abbia massimo e minimo su un insieme, ma non necessarie!) ■

4. $f(x) = x \log x$

(a) (F) : la funzione f non è lipschitiana su $]0, 1[$;
 infatti $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\log x + 1] = -\infty$.
 (Una funz. derivabile $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è lipschitiana $\Leftrightarrow f'$ è limitata).

(b) (V) : f è uniformemente continua su $[0, 1]$. Infatti, poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$, possiamo estendere f con continuità a $[0, 1]$. Consideriamo allora la funzione

$$\bar{f}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in]0,1[\\ 0 & \text{se } x = 0, 1. \end{cases}$$

Per il teorema di Heine-Cantor, $\bar{f}$ è uniformemente continua su $[0,1]$ e quindi su $]0,1[$, dove coincide con la funzione f . $\square$

(c) (V) f è lipschitziana su $]1, b[$, $b > 1$: segue dal teorema di Lagrange: fissati $x, y \in]1, b[$ si ha

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |x - y| \leq (\log b + 1) |x - y|$$

$$|f'(\xi)| \leq \sup_{x \in]1, b[} |f'(x)|$$

$$|f'(x)| = |\log x + 1| \leq |\log b + 1| = \log b + 1 \quad \forall x \in]1, b[$$

Per l'arbitrarietà di x, y segue quanto si vuole. $\blacksquare$

5. A, B sottoinsiemi $\neq \emptyset$ di $\mathbb{R}^n$.

(a) A chiuso, B (seq.) compatto $\Rightarrow A \cap B$ limitato (V).

Infatti, $A \cap B \subseteq B$; per il teor. di Heine-Borel l'insieme B è limitato, e quindi anche $A \cap B \subseteq B$ lo è. $\square$

(b) A chiuso, B (seq.) compatto $\Rightarrow A \cup B$ (seq.) compatto (F)

Basta prendere $A = [1, +\infty[$ chiuso, $B = [1, 2]$ compatto (seq.); si ha che $A \cup B = [1, +\infty[$ è chiuso, ma non limitato! Per il teor. di Heine-Borel, $A \cup B$ non è (seq.) compatto. $\square$

(c) A chiuso, B aperto, $A \subseteq B \Rightarrow \partial A \subseteq A \cap B$ (V)

Essendo A chiuso, si ha che $\partial A \subseteq A$; poiché $A \subseteq B$, segue $\partial A \subseteq B$ e dunque $\partial A \subseteq A \cap B$. $\square$

(d) A aperto, B chiuso, $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \overset{\circ}{B} \neq \emptyset$ (F)

Basta prendere $A =]0, 2[$, $B = \{1\}$; abbiamo $A \cap B = \{1\} \neq \emptyset$, ma $\overset{\circ}{B} = \emptyset$. $\blacksquare$

6. $(x_n)_n$ la successione definita da $x_n = n(\cos n\pi) \sin \frac{1}{2n}$
 $= (-1)^n n \sin \frac{1}{2n}$.

Oss. innanzitutto che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{2}$. Quindi

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon \text{ si ha } \frac{1}{2} - \varepsilon < n \sin \frac{1}{2n} < \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

Proviamo allora usando la caratterizzazione del minimo/massimo limite di una successione limitata (!) (vedi 6Lez (2) - 17.03, pag 60) che

$$a) \quad \underline{\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n} = -\frac{1}{2} \qquad b) \quad \underline{\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n} = \frac{1}{2}.$$

$$a) \quad i) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon \quad (-1)^n n \sin \frac{1}{2n} > -\frac{1}{2} - \varepsilon :$$

questo segue da (*) per n dispari, $n \geq n_\varepsilon$;

se n è pari, $n \geq n_\varepsilon$ la disug. è banalm. verificata.

$$ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{Sono infiniti indici } n \text{ tale che } x_n < -\frac{1}{2} + \varepsilon.$$

$$\text{Ovviamente per } n_k = 2k+1, \quad x_{2k+1} = -(2k+1) \sin \frac{1}{2(2k+1)}$$

$$\text{e } \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k+1} = -\frac{1}{2}. \quad \square$$

$$b) \quad i) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon \quad (-1)^n n \sin \frac{1}{2n} < \frac{1}{2} + \varepsilon :$$

questo segue da (*) per n pari, $n \geq n_\varepsilon$;

se n è dispari, $n \geq n_\varepsilon$ la disug. è banalm. verificata.

$$ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{Sono infiniti indici } n \text{ tale che } x_n > \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

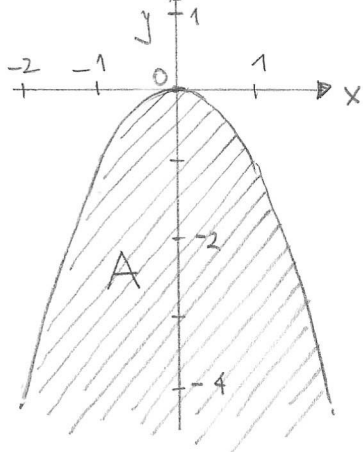
$$\text{Ovviamente per } n_k = 2k, \quad x_{2k} = 2k \sin \frac{1}{2(2k)}$$

$$\text{e } \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k} = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

$$7. \quad f(x,y) = \sqrt{-y-x^2} \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -y-x^2 \geq 0\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -x^2\}$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -x^2\}$$



(a) A è connesso per poligoni (V)

(A è convesso!)

□

(b) $A \cap \bar{B}_1(0)$ è compatto (V)

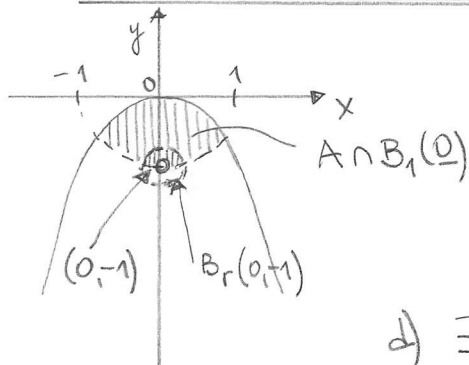
A è chiuso = $g^{-1}([0, +\infty[)$, dove

$g(x, y) = -y - x^2$ è una funzione continua
e $[0, +\infty[$ è chiuso in $\mathbb{R}$.

$\bar{B}_1(0)$ è chiuso e limitato; quindi $A \cap \bar{B}_1(0)$ è chiuso e

limitato e per il teorema di Heine-Borel è compatto. □

(c) $(0, -1)$ è un pt. di accumul. per $A \cap \bar{B}_1(0)$ (V)



infatti, $\forall r > 0$ si ha

$$B_r(0, -1) \cap (A \cap \bar{B}_1(0)) \setminus \{(0, -1)\} \neq \emptyset$$

□

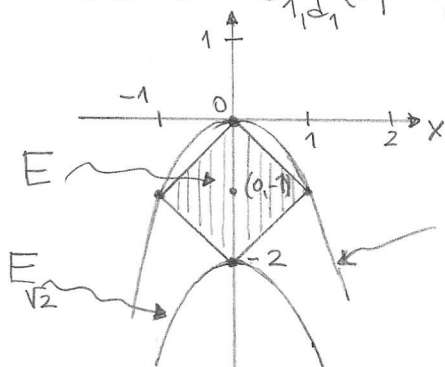
d) $\exists \lim_{\substack{(x, y) \in A \\ \|(x, y)\| \rightarrow +\infty}} f(x, y)$ (F)

$$\text{Basta oss. } \forall y \leq 0, f(0, y) = \sqrt{-y} \Rightarrow \lim_{y \rightarrow -\infty} f(0, y) = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x, -x^2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, -x^2) = 0.$$

□

Sia $E = \bar{B}_{1/2}(0, -1)$. Allora $\min_{(x, y) \in E} f(x, y) = 0$, $\max_{(x, y) \in E} f(x, y) = \sqrt{2}$.



$$\forall c \geq 0, E_c = \{(x, y) \in A : f(x, y) = c\}$$

$$= \{(x, y) \in A : y = -x^2 - c^2\}$$

$$E_0 = \{(x, y) \in A : f(x, y) = 0\}$$

$$E_{\sqrt{2}} = \{(x, y) \in A : \underbrace{\sqrt{-y - x^2}}_{f(x, y)} = \sqrt{2}\}.$$

■

8. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme chiuso, $x_0 \in E$.

(a) $\exists$ una succ. $(x_n)_n \subseteq E \setminus \{x_0\}$ t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$: (F).
Basta prendere $E = \{x_0\}$. $\square$

(b) $\forall r > 0$ si ha $B_r(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E) \neq \emptyset$: (F).

Se $x_0 \in \overset{\circ}{E}$, allora $\exists r > 0$ t.c. $B_r(x_0) \subset E$ e quindi $B_r(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E) = \emptyset$. $\square$

(c) $x_0 \in \partial E$ (F); x_0 potrebbe appartenere a $\overset{\circ}{E}$. $\square$

(d) Ogni succ. $(x_n)_n \subseteq E \cap \bar{B}_r(x_0)$, $r > 0$ ammette una sottosucc. convergente ad un elemento $\underline{x} \in E$ (V).

Infatti, $E \cap \bar{B}_r(x_0)$ è (seq.) compatto! $\blacksquare$

9. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(1-\cos y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) f è continua in $(0,0)$. (V)

Oss. che $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0 = f(0,0)$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $y \neq 0$

$$f(x,y) = \frac{x(1-\cos y)}{x^2+y^2} = \frac{x y^2}{x^2+y^2} \frac{(1-\cos y)}{y^2} = \overset{y \rightarrow 0 \nearrow \frac{1}{2}}{\frac{(1-\cos y)}{y^2}} \cdot g(x,y)$$

con $g(x,y) = \frac{x y^2}{x^2+y^2}$. Ora $|g(x,y)| = |x| \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |x|$
 $\downarrow$ per $(x,y) \rightarrow (0,0)$

$\Rightarrow \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y \neq 0}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

In definitiva, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. $\square$

(b) f è derivabile in $(0,0)$. (V).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f(0,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0. \quad \square$$

(c) f è differenziabile in $(0,0)$. (F).

$$\forall \underline{h} = (h,k) \quad \underline{h} \neq \underline{0}$$

$$\frac{f(\underline{0} + \underline{h}) - f(\underline{0}) - \langle \nabla f(\underline{0}), \underline{h} \rangle}{\|\underline{h}\|} = \frac{f(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} = \frac{h(1 - \cos k)}{(h^2 + k^2) \sqrt{h^2 + k^2}}.$$

$\uparrow$
 $\underline{h} = (h,k)$

$$\text{Posto } g(h,k) = \frac{h(1 - \cos k)}{(h^2 + k^2) \sqrt{h^2 + k^2}},$$

$$\text{oss. che } \forall h \neq 0, \quad k=h \quad g(h,h) = \frac{h(1 - \cos h)}{2\sqrt{2} h^2 |h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \square$$

(d) f ammette massimo e minimo in $\mathbb{R}^2$. (V)

f è una funzione continua su $\mathbb{R}^2$ (in $(0,0)$ l'abbiamo provato in (a); in tutti gli altri punti è continua essendo somma, prodotto, rapporto di funzioni continue e il denominatore non si annulla per $(x,y) \neq (0,0)$).

$$\text{Oss. che } \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x,y) = 0, \quad \text{poichè } 0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{2|x|}{x^2 + y^2}$$

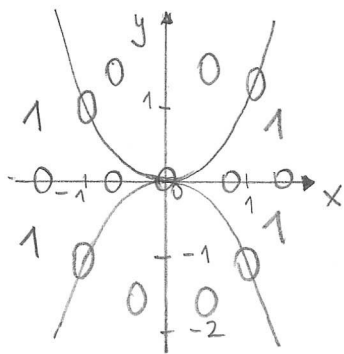
$$\text{inoltre } f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} > 0$$

$$f\left(-1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} < 0.$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &\searrow \text{ se } \|(x,y)\| \rightarrow +\infty. \\ &0 \end{aligned}$$

Ora basta applicare l'oss. fatta nella 10 Lez(2) - 31_03, pag. 116 per concludere. ■

$$10. f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |y| \geq x^2 \text{ o } y=0 \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



(a) f è continua, ma non deriv. in $(0,0)$ (F)

f non è continua in $(0,0)$: basta considerare

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \frac{x^2}{2}) = 1 \neq f(0,0).$$

Invece $\forall x \in \mathbb{R}, f(x,0)=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$

$\forall y \in \mathbb{R}, f(0,y)=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$

Dunque f è derivabile in $(0,0)$. □

(b) f è derivabile, ma non continua in $(0,0)$ (V)

vedi (a). □

(c) f è derivabile in $(0,0)$ lungo ogni direzione $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ e vale

$D_{\underline{v}} f(0,0) = \langle \nabla f(0,0), \underline{v} \rangle$ (V)

Abbiamo già visto in (a) $D_{\underline{v}} f(0) = 0$ se $\underline{v} = \underline{e}_1$ o $\underline{v} = \underline{e}_2$.

Per ogni $\underline{v} \neq \underline{e}_2, \forall t \neq 0 \quad |tv_2| \geq t^2 v_1^2 \Leftrightarrow |v_2| \geq t|v_1|^2$

$\underline{v} = (v_1, v_2), \|\underline{v}\|=1$

e questo è vero per t suff. piccola,

quindi $\frac{f(t\underline{v}) - f(0)}{t} = \frac{0-0}{t}$ per t suff. piccola;

dunque $D_{\underline{v}} f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\underline{v}) - f(0)}{t} = 0.$

Risulta quindi che f è derivabile in $(0,0)$ lungo ogni direzione $\underline{v}$

e vale $D_{\underline{v}} f(0) = \langle \nabla f(0), \underline{v} \rangle.$ □

(d) f è differenziabile in $(0,0)$ (F)

Poiché f non è continua in $(0,0)$, non può essere differenziabile in $(0,0)$. ■

11.(a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) = e^{\sqrt{3}x^2 - 2y}$, f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$,
e in particolare in $(1,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\sqrt{3}x e^{\sqrt{3}x^2 - 2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2e^{\sqrt{3}x^2 - 2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2\sqrt{3}e^{\sqrt{3}-2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -2e^{\sqrt{3}-2}$$

$\nabla f(1,1) \neq (0,0)$. La direzione di massima crescita in $(1,1)$ è quindi individuata da $\underline{v} = \frac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Da

$$(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

segue $\theta = -\frac{\pi}{6}$. □

$$(b) \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha e^{\sqrt{3}x^2 - 2y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

se $\underline{v} = \underline{e}_2 = (0,1)$ mi ha $D_{\underline{v}}g(0,0) = 0$ ($g(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$)

Sia $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$, $\underline{v} = (v_1, v_2)$, $\|\underline{v}\| = 1$, $\underline{v} \neq \underline{e}_2$, $t \neq 0$

$$\frac{f(t\underline{v}) - f(0)}{t} = \frac{|t|^\alpha |v_1|^\alpha e^{\sqrt{3}t^2 v_1^2 - 2tv_2}}{t|t|} = \frac{|t|^{\alpha-1} |v_1|^\alpha e^{\sqrt{3}t^2 v_1^2 - 2tv_2}}{t}$$

Allora $\exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\underline{v}) - f(0)}{t}$ (e vale 0) $\Leftrightarrow \alpha - 1 > 1$
ossia $\alpha > 2$.

Quindi $E =]2, +\infty[$ e mi ha $\inf E = 2$. ■

12. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \cos(\beta y + x)$.

f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$; abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(\beta y + x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\beta \sin(\beta y + x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -\beta.$$

Allora, l'eq. del piano tg. al grafico di f in $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ risulta

$$z = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \beta(y - 0)$$

ossia $z = -x - \beta y + \frac{\pi}{2}$. La retta parallela a $2x = 2y = z$ passante per $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ ha eq. parametriche

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Questa retta giace sul piano tg individuato sopra se sostituendo x, y, z in funzione di t nell'eq. del piano si ottiene un'identità, cioè se $\forall t \in \mathbb{R}$ si ha

$$2t = \cancel{\frac{\pi}{2}} - t - \beta t + \cancel{\frac{\pi}{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

cioè $\beta = -3$.

Si può anche osservare che, essendo $\underline{n} = (\nabla f(\frac{\pi}{2}, 0), -1) = (-1, -\beta, -1)$ un vettore normale al piano tg al grafico di f in $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$, esso è perpendicolare al vettore $\underline{w} = (1, 1, 2)$ che individua la direzione della retta se $\langle \underline{n}, \underline{w} \rangle = 0$, da cui $\beta = -3$. ■