1 Lunedì 03/10

Esercizio 10
Determinare inf/sup (o min/max) dei seguenti insiemi:

1. $A = \left\{ \frac{n}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$
2. $B = \left\{ 2(-1)^n - \frac{1}{2n} \ : \ n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\}$
3. $C = \left\{ \frac{n}{m} \ : \ n, m \in \mathbb{N}_{>0}, \ 0 < m < n \right\}$

1) A è limitato superiormente e inferiormente. Siccome $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, scegliamo $L = 1$ come candidato per $\sup A$ e controlliamo che soddisfi le due proprietà richieste:

- $L = 1 \geq \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- dato $\epsilon > 0$, dimostrare che esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{\overline{n}}{\overline{n}+1} \geq 1 - \epsilon$

Similmente, siccome $\frac{n}{n+1} \geq 0$, scegliamo $l = 0$ come candidato per $\inf A$ e controlliamo

- $l = 0 \leq \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- dato $\epsilon > 0$, dimostrare che esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{\overline{n}}{\overline{n}+1} \leq 0 + \epsilon$

Inoltre, $l = 0$ è minimo perché $l \in A$ per $n = 0$.

2) notiamo che B può essere riscritto come

$$B = \left\{ 2 - \frac{1}{2n} \ : \ n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \ \text{n pari} \right\} \cup \left\{ -2 - \frac{1}{2n} \ : \ n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \ \text{n dispari} \right\}$$

e, similmente a prima, controlliamo che $\sup B = 2$ e che $\min B = -\frac{5}{2}$

3) notiamo che C è superiormente illimitato perché contiene l'insieme $\{n \ : \ n \in \mathbb{N}_{\geq 2}\}$ e quindi $\sup C = +\infty$. Un'altra osservazione è che $0 < m < n$ implica $\frac{n}{m} > 1$; dobbiamo solo controllare che $1 = \inf C$

Esercizio 11

Risolvere in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni:

1. $\frac{1}{|z|\overline{z}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \big(= \cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\big)$
2. $\overline{z}\big(Im(z) - Re(z)\big) = z$
3. $2z^2 + \overline{z} = -1$
4. $z^3 = 1$

1) se prendiamo il modulo da entrambe le parti dell'equazione, abbiamo

$$\left|\frac{1}{|z|\overline{z}}\right| = \frac{1}{|z||\overline{z}|} = \frac{1}{|z|^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{|z|} = 1$$

($|e^{i\frac{\pi}{4}}| = 1$ perché è un punto della circonferenza goniometrica).
Sostituendo questo valore nell'equazione di partenza e ricordando l'identità $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = 1$, otteniamo $z = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{\overline{z}|z|} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) sostituendo $z = a + ib$ e raccogliendo parte reale e immaginaria, otteniamo l'equazione

$$a(b - a - 1) + ib(a - b - 1) = 0$$

Troviamo dunque le sue soluzioni risolvendo il sistema $\begin{cases} a(b-a-1) = 0 \\ b(a-b-1) = 0 \end{cases}$

3) analogamente al punto precedente, con $z = a + ib$ otteniamo

$$2(a^2 - b^2 + a + 1) + ib(4a - 1) = 0$$

e ci basta risolvere $\begin{cases} 2(a^2 - b^2 + a + 1) = 0 \\ b(4a - 1) = 0 \end{cases}$

4) usiamo la formula di De Moivre $\Big($se $z = |z|\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)$, allora $z^n = |z|^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big)\Big)$ per scrivere

$$\begin{aligned} z^3 &= |z|^3\big(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)\big) \\ 1 &= 1\big(\cos(0) + i\sin(0)\big) \end{aligned}$$

Otteniamo che

$$\begin{aligned} |z| &= 1 \\ \theta &= 0 + \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Esercizio 12
Rappresentare in $\mathbb{C}$ i seguenti insiemi:

1. $A = \Big\{z \in \mathbb{C} \ :\ \frac{|z+i|}{|z-i|} = 1\Big\}$
2. $B = \Big\{z \in \mathbb{C} \ :\ |z - i - 2| < |z + 2|,\ |z| \geq 1\Big\}$

Hint: come nell'esercizio 11, in entrambi i casi basta fare i calcoli scrivendo $z = a + ib$ *e risolvendo l'equazione/disequazione così ottenuta*

Esercizio 14
Dimostrare la disuguaglianza tra medie (armonica, geometrica, aritmetica, quadratica)

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}$$

Hint: prova la seconda e terza disuguaglianza elevando al quadrato i due membri; per la prima disuguaglianza, usa quella tra media geometrica e aritmetica con $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$