1 Lunedì 10/10

Esercizio 14
Rappresentare sul piano complesso $A, B, f(A), g(B), h(B)$, dove:

$$\begin{aligned}
A &= \{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) \in [0,1], \ Im(z) \in [0,1]\} \\
B &= \Big\{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq 2, \ arg(z) \in \Big]\frac{3}{4}\pi, \pi\Big[\Big\} \\
f &\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : \ f(z) = z + z_0 \quad (z_0 \in \mathbb{C}) \\
g &\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : \ g(z) = iz \\
h &\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : \ h(z) = z^2
\end{aligned}$$

Hint: f rappresenta una traslazione, g una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ e per $h(B)$ utilizzare la formula del prodotto

Esercizio 15
Risolvere in $\mathbb{C}$:

1. $z^6 + i\overline{z^3} = 0$
2. usando la formula del 2° grado, $z^2 - (3+i)z + 2 = 0$
3. $\begin{cases} \overline{z}^2 - 2w^2 = -2 \\ \overline{w}^2 - z = 0 \end{cases}$

1) da $|z^6| = |-i\overline{z^3}| = |\overline{z}^3| = |z^3|$, abbiamo $|z| = 0$ o $|z| = 1$. Nel secondo caso (il primo è banale), possiamo moltiplicare per z^3 e ottenere

$$z^6 \cdot z^3 = -i\overline{z}^3 \cdot z^3 = -i|z^2|^3 = -i$$

Usando la formula della radice n-esima, per $k = 0, 1, \ldots, 8$

$$\begin{aligned}
z_k &= \sqrt[9]{|-i|}\Bigg(\cos\Big(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{9}\Big) + i\sin\Big(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{9}\Big)\Bigg) \\
&= \cos\Big(-\frac{\pi}{18} + \frac{2}{9}\pi k\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{18} + \frac{2}{9}\pi k\Big)
\end{aligned}$$

2) con la formula del secondo grado,

$$z_{1,2} = \frac{(3+i) \pm \sqrt{9+6i-1-8}}{2} = \frac{(3+i) \pm \sqrt{6i}}{2}$$

Ora dobbiamo trovare il numero complesso w tale che $w^2 = (a+ib)^2 = 6i$ risolvendo il sistema $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} a = b \\ b = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

Allora, $z_{1,2} = \frac{(3+i)\ \pm\ w}{2} = \frac{(3+i)\ \pm\ (\sqrt{3}+i\sqrt{3})}{2}$

3) da $z = \overline{w}^2$, abbiamo che $\overline{z} = \overline{\overline{w} \cdot \overline{w}} = w \cdot w = w^2$. Sostituendo,

$$\begin{cases} w^4 - 2w^2 + 2 = 0 \\ z = \overline{w}^2 \end{cases} \implies \begin{cases} w_{1,2}^2 = 1\ \pm\ \sqrt{1-2} = 1 \pm i \\ z = \overline{w}^2 \end{cases}$$

Scrivendo w in forma trigonometrica, troviamo $|w| = \sqrt[4]{2}$ e $arg(w) = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Le soluzioni sono quindi:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \sqrt[4]{2}\big(\cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8})\big) = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}, & z_1 &= 1 - i \\
w_2 &= \sqrt[4]{2}\big(\cos(\frac{9\pi}{8}) + i\sin(\frac{9\pi}{8})\big) = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{9\pi}{8}}, & z_2 &= 1 - i \\
w_3 &= \sqrt[4]{2}\big(\cos(-\frac{\pi}{8}) + i\sin(-\frac{\pi}{8})\big) = \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}, & z_3 &= 1 + i \\
w_4 &= \sqrt[4]{2}\big(\cos(\frac{7\pi}{8}) + i\sin(\frac{7\pi}{8})\big) = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}, & z_4 &= 1 + i
\end{aligned}$$

Esercizio 16

Determinare inf/sup (eventualmente min/max) delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ in $\mathbb{R}$
2. $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ in $\mathbb{R}$
3. $h(x) = \arccos(x) - \arcsin(x)$ in $[-1, 1]$

1) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 \geq 0$. Controlliamo che $m = 0 = \min_{\mathbb{R}} f$:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\exists x_0 \in \mathbb{R} : \; f(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x_0 = 1)$ o $(x_0 = -1)$

$\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$ perché $\nexists M > 0 : \; f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) aggiungendo e sottraendo $(x^2 + 1 - x)$ al numeratore, otteniamo

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{x^2 + 1 - x - (x^2 - 2x + 1)}{x^2+1} = 1 - \frac{x}{x^2+1} - \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \leq 1 - \frac{x}{x^2+1}$$

da questa disuguaglianza deduciamo che

$$g(x) = \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Inoltre, $\frac{1}{2} = \max_{\mathbb{R}} g$ perché per $x_0 = 1$ abbiamo $g(x_0) = \frac{1}{2}$.
Per trovare $\inf_{\mathbb{R}} g$ è sufficiente osservare che $g(x)$ è una funzione dispari. Allora $\inf_{\mathbb{R}} g = \min_{\mathbb{R}} g = -\max_{\mathbb{R}} g = -\frac{1}{2}$

3) sia $\arccos(x)$ sia $-\arcsin(x)$ sono funzioni decrescenti, e quindi lo è anche la loro somma $h(x)$. Allora,

$$\begin{cases} \pi & = \arccos(-1) = \max_{x\in[-1,1]} \arccos(x) \\ \frac{\pi}{2} & = \arcsin(-1) = \max_{x\in[-1,1]} \arcsin(x) \end{cases} \implies \frac{3\pi}{2} = h(-1) = \max_{x\in[-1,1]} h(x)$$

$$\begin{cases} 0 & = \arccos(1) = \min_{x\in[-1,1]} \arccos(x) \\ -\frac{\pi}{2} & = \arcsin(1) = \min_{x\in[-1,1]} \arcsin(x) \end{cases} \implies -\frac{\pi}{2} = h(1) = \min_{x\in[-1,1]} h(x)$$

Esercizio 17 (non ancora fatto in classe)
Usando la definizione, dimostrare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$
2. $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$
3. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-2x-3}{x+1} = -4$

1) dobbiamo dimostrare che $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x| < \delta_\epsilon \Rightarrow |\sin(x)| < \epsilon$
Siccome $|\sin(x)| \leq |x|$, basta scegliere $\delta_\epsilon = \epsilon$: infatti $|\sin(x)| \leq |x| < \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) dobbiamo dimostrare che $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x| < \delta_\epsilon \Rightarrow |\cos(x) - 1| < \epsilon$
Siccome $|cos(x) - 1| = 1 - \cos(x) = 2\big(\sin(\frac{x}{2})\big)^2 \in [0,2]$, abbiamo

$$-\epsilon < 0 \leq 1 - \cos(x) \leq 2\Big|\sin(\frac{x}{2})\Big|^2 \leq 2\left(\frac{|x|}{2}\right)^2 = \frac{|x|^2}{2}$$

Se scegliamo $\delta_\epsilon = \sqrt{2\epsilon}$, $0 \leq 1 - \cos(x) < \frac{2\epsilon}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) dobbiamo dimostrare che $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon\ :\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ |x+1| < \delta_\epsilon \Rightarrow |\frac{x^2-2x-3}{x+1} + 4| < \epsilon$

$$\left|\frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} + 4\right| = \left|\frac{x^2 + 2x + 1}{x+1}\right| = |x+1| < \delta_\epsilon$$

E' sufficiente allora scegliere $\delta_\epsilon = \epsilon$

Esercizio 18
Dimostrare che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Per $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, abbiamo $0 < \sin(x) < x < \tan(x)$.
Dividendo per $\sin(x)$ (diverso da 0 nell'intervallo considerato!),

$$0 < 1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

Le funzioni che stiamo considerando sono tutte pari, perciò la disuguaglianza vale per $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Allora,

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Per il teorema del confronto, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Esercizio 19

Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} \quad [= 1]$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \quad [= \frac{1}{2}]$

Hint: riscrivere opportunamente la quantità da calcolare, usando il limite notevole dell'esercizio 18 e la regola dei limite di un prodotto di funzioni