

1 Lunedì 24/10

Esercizio 24

Calcolare i seguenti limiti:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4(x)}{(1-\cos(x))^3} \text{ (forma indeterminata } \frac{0}{0} \text{)}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+n}{3+n} \right)^{n^2} \text{ (forma indeterminata } 1^\infty \text{)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3x} \right)^{\frac{1}{\ln(2x)}} \text{ (forma indeterminata } 0^0 \text{)}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \text{ (forma indeterminata } 1^\infty \text{)}$$

1)

$$\frac{\sin^4(x)}{(1-\cos(x))^3} = \left(\frac{\sin^4(x)}{x^4} \right) \left(\frac{x^6}{(1-\cos(x))^3} \right) \frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$$

2)

$$\left(\frac{1+n}{3+n} \right)^{n^2} = \left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{3}{n})^n} \right)^n = \left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{3}{n})^{3\frac{n}{3}}} \right)^n \rightarrow 0$$

3)

$$\left(\frac{1}{3x} \right)^{\frac{1}{\ln(2x)}} = e^{\ln \left(\frac{1}{3x} \right)^{\frac{1}{\ln(2x)}}} = e^{\frac{1}{\ln(2x)} \ln(3x)^{-1}} = e^{-\frac{\ln(3)+\ln(x)}{\ln(2)+\ln(x)}} \rightarrow e^{-1}$$

4)

$$\left(\frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln \left(\left(\frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \right)} = e^{\frac{\ln \left(1 + \frac{2^x + 3^x - 2}{2} \right)}{x}}$$

Moltiplicando e dividendo l'esponente per $\frac{2^x + 3^x - 2}{2}$, e ricordando il limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$ (per $a > 0$ e diverso da 1), otteniamo

$$\frac{2^x + 3^x - 2}{2x} = \frac{2^x - 1}{2x} + \frac{3^x - 1}{2x} \rightarrow \frac{\ln(2) + \ln(3)}{2} = \ln(\sqrt{6})$$

Esercizio 25

Determinare, al variare del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$, i seguenti limiti:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2(2x) - \sin^2(2x)}{x^\gamma}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3+x^\gamma}{2+x}\right)^x$$

1)

$$\frac{\tan^2(2x) - \sin^2(2x)}{x^\gamma} = \frac{\tan^2(2x)}{x^\gamma} \sin^2(2x) = \left(\frac{\tan(2x)}{2x}\right)^2 \left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2 \frac{16x^4}{x^\gamma}$$

Allora,abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2(2x) - \sin^2(2x)}{x^\gamma} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \gamma > 4 \\ 16 & \text{se } \gamma = 4 \\ 0 & \text{se } \gamma < 4 \end{cases}$$

2)

$$\left(\frac{3+x^\gamma}{2+x}\right)^x = \left(x^{\gamma-1} \frac{(1+\frac{3}{x^\gamma})}{(1+\frac{2}{x})}\right)^x = (x^{\gamma-1})^x \frac{(1+\frac{3}{x^\gamma})^x}{(1+\frac{2}{x})^x}$$

Allora,abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3+x^\gamma}{2+x}\right)^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } \gamma > 1 \\ e & \text{se } \gamma = 1 \\ 0 & \text{se } \gamma < 1 \end{cases}$$

Esercizio 26

Data la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_{n+1} & = \sqrt{1+a_n} \end{cases}$$

Dimostrare che esiste il limite e calcolarlo

Hint: usando il principio di induzione, provare che la successione $(a_n)_n$ è crescente e superiormente limitata (e positiva!). Per il Teorema sul limite di successioni monotone, il limite esiste e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}_{\geq 0}$; per trovare il valore di l , è sufficiente risolvere l'equazione $l = \sqrt{1+l}$

Esercizio 27

Stabilire se le seguenti funzioni sono continue

1.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{se } x \in]-1, 1[\\ |x| & \text{se } x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \end{cases}$$

2.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)}{x(\sqrt{x+1}-1)} & \text{se } x > 0 \\ ke^x - 2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

1) è sufficiente controllare che f sia continua in $-1, -1$, perché le altre funzioni sono già continue nei rispettivi domini.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} |x| & = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 - e^{\frac{1}{x^2-1}} & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} |x| & = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - e^{\frac{1}{x^2-1}} & = 1 \end{cases}$$

Allora f è continua anche in -1 e 1

2) come per f , è sufficiente controllare solo la continuità di g in 0 .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} ke^x - 2 = k - 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(x)}{x(\sqrt{x+1}-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \frac{x^2}{x(\sqrt{x+1}-1)} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = 2 \end{cases}$$

Allora, la funzione g è continua su tutto \mathbb{R} solo se $k = 4$, altrimenti è continua solo su $\mathbb{R} \setminus 0$

Esercizio 28

Dimostrare che $x^5 + 2x^3 - 2 = 0$ ha una e una sola soluzione reale.

Inoltre, trovare un intervallo di ampiezza massima pari a $\frac{1}{4}$ in cui x_0 sia contenuto.

$f(x) = x^5 + 2x^3 - 2 = 0$ è continua e monotona crescente perché somma di funzioni continue e monotone crescenti. Inoltre, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Allora, esiste uno e un solo punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.

Per trovare l'intervallo della giusta ampiezza che contiene x_0 possiamo utilizzare il metodo di bisezione partendo, per esempio, dall'intervallo $[0, 1]$ ($f(0) = -2$ e $f(1) = 1$)

Esercizio 29

Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, supponiamo che sia continua in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Dimostrare che, se f assume sia valori positivi sia valori negativi in ogni intorno di x_0 , allora $f(x_0) = 0$.

Hint: supporre per assurdo che $f(x_0) > 0$ (< 0) e trovare una contraddizione col Teorema della permanenza del segno