A

COGNOME E NOME: ______________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	3	3	2½	3	2½	3	2
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		**Totale**
Punti	3	2½	3½	4	4		36
Punti ottenuti							

1. (3 punti) Sia $E \subseteq \mathbb{C}$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione $\mathrm{Im}(\frac{1}{\bar{z}}) = 1$.
   Rappresentate qui sotto nel piano di Gauss
   (a) l'insieme E.
   (b) l'insieme $h(E)$, dove $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è la funzione definita da $h(z) = ze^{i\frac{\pi}{2}}$.

2. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+e^{-x}} & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + 3x + 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   Tracciate qui a fianco un grafico qualitativo di f.
   Stabilite per ciascuna delle seguenti due affermazioni se è vera o falsa.
   (a) La funzione f è iniettiva. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perché? ______________________

   (b) $f(x) \sim 2e^x$ per $x \to -\infty$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Si ha $f(\mathbb{R}) =$ ______.

   Inoltre $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) =$ ______.

3. (2½ punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2\arctan x$. Sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione

$$f(x) - \alpha = 0$$

   ammette più di una soluzione. Allora $E_\alpha =$ ________________

4. (3 punti) Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ e sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-bx} - x & \text{se } -1 \le x \le 0 \\ ax^2 + 2x + c & \text{se } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Allora f soddisfa su $[-1, 1]$

(a) le ipotesi del teorema di Weierstrass per a ______, b ______ e c ______.

Perché? ____

(b) le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri per a ______, b ______ e c ______.

Perché? ____

(c) le ipotesi del teorema di Rolle per a ____________, b ______ e c ______.

Perché? ____

5. ($2\frac{1}{2}$ punti) Sia $f(x) = \arctan |x|^{\frac{3}{2}}$.

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o se è falsa.

(a) $(0, 0)$ è una cuspide del grafico di f. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____

(b) $x = 0$ è un punto di minimo assoluto per f.
◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____

(c) f è derivabile in $x = 0$, ma f' non è continua in $x = 0$.
◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____

6. (3 punti) (a) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la parte principale dell'infinitesimo

$$f_\alpha(x) = e^{x^2 - x} - \cos x + \log(1 + x - \alpha x^2)$$

rispetto all'infinitesimo campione x, per $x \to 0^+$. Si ha

____

(b) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ è convergente se α ______.

7. (2 punti) L'uguaglianza

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos x \, dx = 0$$

vale

(a) per ogni $f \in \mathcal{C}^1([-\pi, \pi])$. ◯ Vero ◯ Falso

(b) per ogni $f \in \mathcal{C}^1([-\pi, \pi])$ con $f(-\pi) = -f(\pi)$. ◯ Vero ◯ Falso

(c) per ogni $f \in \mathcal{C}^1([-\pi, \pi])$ con $f(-\pi) = f(\pi)$. ◯ Vero ◯ Falso

(d) soltanto per ogni $f \in \mathcal{C}^1([-\pi, \pi])$ con $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. ◯ Vero ◯ Falso

8. (3 punti) Usando la definizione determinate il valore dell'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)^4}{(2+x)^2} dx.$$

Si ha $I =$ ______.

9. ($2\frac{1}{2}$ punti) Sia I_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ per cui risulta convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x - \sin x}}{x^{2\alpha}\sqrt{1+x^\alpha}} dx.$$

Allora $I_\alpha =$ ____________.

10. ($3\frac{1}{2}$ punti) (a) Determinate $a, b \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione

$$(*) \qquad y'' + ay' + by = 0$$

abbia la coppia $y_1(x) = e^{2x} \cos x$ e $y_2(x) = e^{2x} \sin x$ come soluzioni. Si ha $a =$ ______ e $b =$ ______.

(b) Per i valori di a e b determinati nel punto (a), risolvete il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 5x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

La soluzione è $y(x) =$ ______________________________.

Per i seguenti DUE esercizi è richiesto UN ACCURATO SVOLGIMENTO.

11. (4 punti) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ l'insieme $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \text{la serie in (*) è convergente}\}$, dove

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\pi) \frac{(1-x^2)^n}{(2n)^\alpha}.$$

12. (4 punti) Sia $(a_n)_n$ la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n - 1} + 1 \quad \text{per } n \geq 0 \\ \\ a_0 = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

(a) Provate, usando il principio di induzione, che $1 < a_n < 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(b) Provate che $(a_n)_n$ è strettamente crescente.

(c) Motivate l'esistenza del limite finito, per $n \to +\infty$, della successione $(a_n)_n$ e determinatelo.