

(A)

1. Dobbiamo risolvere l'eq. $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$.

Notiamo subito che $\bar{z} = 0$, ossia $z = 0$, non è soluz. dell'equazione.

Poniamo poi $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ (con x, y non entrambi nulli).

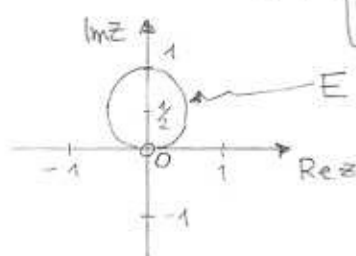
Abbiamo

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

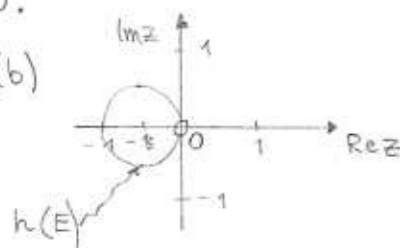
$$\text{Quindi } \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{-y}{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - y = 0 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ x^2 + y^2 \neq 0. \end{cases}$$

Allora (a)



(b)



$$h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad h(z) = z e^{i\pi/2}$$

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

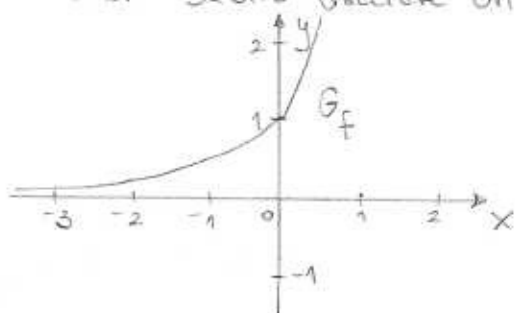
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+e^{-x}} & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + 3x + 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Oss. che $e^{-x} \downarrow \quad 1+e^{-x} \downarrow \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{1+e^{-x}} \uparrow$ su $]-\infty, 0]$

Inoltre $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asintoto orizz. per f , per $x \rightarrow -\infty$

f continua su $]-\infty, 0]$ e $f(0) = 1$.

Oss. che $x^2 + 3x + 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$. Possiamo allora subito tracciare un grafico qualitativo di f :



(a) la funzione f è iniettiva. (Vera)

$f|_{]-\infty, 0]}$ è strett. crescente e ≤ 1

$f|_{]0, +\infty[}$ è strett. crescente e > 1 . □

(b) $f(x) \sim 2e^x$ per $x \rightarrow -\infty$ Vera

Basta oss. che $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{2e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2e^x}{e^x+1}}{2e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x+1} = 1$ $\square$

Si ha $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

Ricordiamo che $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ se f è derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$ e $y_0 = f(x_0)$.

Ora $f(x_0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2e^{x_0}}{e^{x_0}+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4e^{x_0} = e^{x_0}+1$
 $\Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x_0 = \log \frac{1}{3}$.

Ora $f(x) = \frac{2e^x}{e^x+1}$ è derivabile in $] -\infty, 0[$ e quindi, in particolare in $x_0 = -\log 3$. Ora

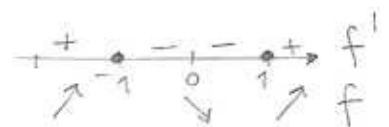
$f'(x) = \frac{2e^x(e^x+1) - 2e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ e quindi $f'(\log \frac{1}{3}) = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{(\frac{1}{3}+1)^2}$
 $= \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{(\frac{4}{3})^2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2}{4 \cdot 4}}{2} = \frac{3}{8}$.

In definitiva, $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{8}{3}$.

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2 \operatorname{arctg} x$. Svolgiamo un breve studio di funzione. Abbiamo

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; f continua su tutto $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$ e $f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2+x^4-2}{1+x^2} = \frac{(x^2+2)(x^2-1)}{1+x^2}$

$x = -1$ pt. di max. loc. stretto per f

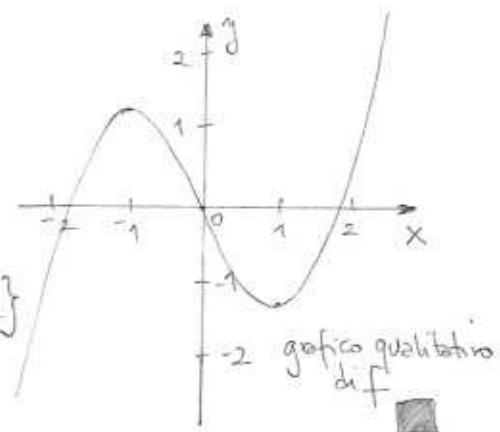


$f(-1) = -\frac{1}{3} - 2 \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{1}{3} + 2 \operatorname{arctg} 1$
 $= -\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}$.

$x = 1$ pt. di min. loc. stretto per f

$f(1) = -f(-1) = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}$.
 $\uparrow$
 f dispari

$E_\alpha = \{d \in \mathbb{R} : f(x) = d \text{ ha più di una soluzione}\}$
 $= [\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}, -\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}]$.



4. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-bx} - x & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ ax^2 + 2x + c & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Allora f soddisfa su $[-1, 1]$

(a) le ipotesi del teorema di Weierstrass per $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c = 1$:

Oss. che $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $[-1, 0]$ e in $[0, 1]$. Basta allora richiedere la continuità di f anche in $x=0$, ossia $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Abbiamo $e^0 - 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + 2x + c)$
 $\Leftrightarrow 1 = c$. □

(b) le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri per $a < -3$, $b \in \mathbb{R}$, $c = 1$:

Infatti, abbiamo che f è continua in $[-1, 1]$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $c = 1$. Poiché $f(-1) = e^b + 1 > 0 \quad \forall b \in \mathbb{R}$, f soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri solo se $f(1) = a + 2 + 1 < 0$, ossia $a + 3 < 0$, da cui $a < -3$. □

(c) le ipotesi del teorema di Rolle per $a = -2 + \frac{1}{e^3}$, $b = -3$, $c = 1$:

Infatti, abbiamo che f è continua in $[-1, 1]$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $c = 1$. Poiché f è derivabile su $[-1, 0[$ e su $]0, 1]$, basta allora richiedere la derivabilità di f anche in $x=0$. Oss. che $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -b - 1$ e $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2$.
 (coll. del teorema di Lagrange). Pertanto f è derivabile in $x=0 \Leftrightarrow -b-1 = 2 \Leftrightarrow b = -3$.

Infine $f(-1) = f(1) \Leftrightarrow e^{-3} + 1 = a + 2 + 1 \Leftrightarrow a = -2 + e^{-3}$. ■

5. $f(x) = \operatorname{arctg} |x|^{\frac{3}{2}}$

(a) $(0, 0)$ è una cuspide del grafico di f . Falsa

$$\forall h \neq 0 \quad \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\operatorname{arctg} |h|^{\frac{3}{2}}}{h} = \underbrace{\frac{\operatorname{arctg} |h|^{\frac{3}{2}}}{|h|^{\frac{3}{2}}}}_{\substack{\downarrow h \rightarrow 0 \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{|h|^{\frac{3}{2}}}{h}}_{\substack{\downarrow h \rightarrow 0 \\ 0}}.$$

Quindi $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} |h|^{\frac{3}{2}}}{h} = 0.$

Risulta che f è derivabile in $x=0$ con $f'(0)=0$; $(0,0)$ non è una cuspidale del grafico di f . $\square$

(b) $x=0$ è un pt. di minimo assoluto per f . Vera

Basta oss. che $f(x) = \operatorname{arctg} |x|^{\frac{3}{2}} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $= 0 \Leftrightarrow x=0$. $\square$

(c) f è derivabile in $x=0$, ma f' non è continua in $x=0$. Falsa

Infatti, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \quad (\text{vedi (a)}) \\ \frac{-1}{1+(-x)^3} \cdot \frac{3}{2} (-x)^{\frac{1}{2}} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Risulta immediatamente che $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 = f'(0)$. $\blacksquare$

6. (a) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_{\alpha}(x) = e^{x-x^2} - \cos x + \log(1+x-\alpha x^2)$.

Ricordiamo che

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4) \quad "$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \quad " .$$

Dunque, per $x \rightarrow 0$ si ha

$$\begin{aligned} f_{\alpha}(x) &= \left[1 + (x^2 - x) + \frac{(x^2 - x)^2}{2} + \frac{1}{6} (x^2 - x)^3 + o((x^2 - x)^3) \right] \\ &\quad - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) \\ &\quad + \left[(x - \alpha x^2) - \frac{1}{2} (x - \alpha x^2)^2 + \frac{1}{3} (x - \alpha x^2)^3 + o((x - \alpha x^2)^3) \right] \\ &= \cancel{1} + x^2 - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\ &\quad + \cancel{x} - \alpha x^2 - \frac{x^2}{2} + \alpha x^3 + \frac{1}{3} x^3 + o(x^3) \\ &= \left(\frac{3}{2} - \alpha \right) x^2 + \left(\alpha - 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) x^3 + o(x^3) \\ &= \left(\frac{3}{2} - \alpha \right) x^2 + \left(\alpha - \frac{5}{6} \right) x^3 + o(x^3) . \end{aligned}$$

Risulta allora che la p.p. di f_α è $\begin{cases} (\frac{3}{2}-\alpha)x^2 & \text{se } \alpha \neq \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}x^3 & \text{se } \alpha = \frac{3}{2} \end{cases}$ ed è
(rispetto all'infinitesimo
campione x , per $x \rightarrow 0^+$)

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} f_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ è convergente se $\alpha = \frac{3}{2}$ (per il criterio del confronto asintotico
essendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$) ■

7. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos x dx = 0 \quad \forall f \in C^1([-\pi, \pi])$ con $f(-\pi) = f(\pi)$,
ossia è vero solo la (c).

In fatti

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx &= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{integrazione} \\ \text{per parti}}}{(-\cos x) f(x)} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos x) f'(x) dx \\ &= (-\cos \pi) f(\pi) + \cos(-\pi) f(-\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x) f'(x) dx \\ &= f(\pi) - f(-\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos x dx. \end{aligned}$$

Allora $\forall f \in C^1([-\pi, \pi])$ per cui $f(\pi) = f(-\pi)$ si ha l'uguaglianza
data. ■

8. Dobbiamo determinare $I = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)^4}{(2+x)^2} dx$.

$$\begin{aligned} \text{Ora } \int \frac{\log(1+x)^4}{(2+x)^2} dx &= 4 \int \frac{\log(1+x)}{(2+x)^2} dx \\ &= 4 \left[-\frac{1}{2+x} \log(1+x) + \int \frac{1}{2+x} \cdot \frac{1}{1+x} dx \right] \\ &= 4 \left[-\frac{1}{2+x} \log(1+x) + \int \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} \right) dx \right] \\ &= 4 \left[-\frac{1}{2+x} \log(1+x) + \log\left(\frac{1+x}{2+x}\right) \right] + C \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Allora $\forall M > 0$ si ha

$$\int_0^M \frac{\log(1+x)^4}{(2+x)^2} dx = 4 \left[-\frac{1}{2+x} \log(1+x) + \log\left(\frac{1+x}{2+x}\right) \right]_0^M$$

ossia

$$\int_0^M \frac{\log(1+x)^4}{(2+x)^2} dx = 4 \left[-\overset{\substack{0 \\ n \rightarrow +\infty}}{\frac{\log(1+M)}{2+M}} + \overset{\substack{\log 1 = 0 \\ n \rightarrow +\infty}}{\log\left(\frac{1+M}{2+M}\right)} \right] - 4 \log\left(\frac{1}{2}\right).$$

Poiché

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{\log(1+x)^4}{(2+x)^2} dx = -4 \log\left(\frac{1}{2}\right),$$

per definizione possiamo concludere che $\underline{I} = -4 \log\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \log 2 = \underline{\underline{\log 16.}}$ ■

9. Abbiamo $\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{x - \sin x}}{x^{2\alpha} \sqrt{1+x^2}}}_{f(x)} dx$ Ora $f:]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ continua e

• per $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \sim \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{6} x^{2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{6} x^{2\alpha - \frac{3}{2}}}$.

Poiché $\int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha - \frac{3}{2}}} dx$ risulta convergente $\Leftrightarrow 2\alpha - \frac{3}{2} < 1$
 $\Leftrightarrow \alpha < \frac{5}{4},$

per il criterio del confronto asintotico si ha che

$\int_0^1 f(x) dx$ è convergente $\Leftrightarrow \alpha < \frac{5}{4}.$

• per $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \sim \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{2\alpha} x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{5\alpha}{2} - \frac{1}{2}}}$.

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{5\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} dx$ risulta convergente $\Leftrightarrow \frac{5\alpha}{2} - \frac{1}{2} > 1$
 $\Leftrightarrow \alpha > \frac{3}{5},$

per il criterio del confronto asintotico si ha che

$\int_1^{+\infty} f(x) dx$ è convergente $\Leftrightarrow \alpha > \frac{3}{5}.$

In conclusione, oss. che $\frac{3}{5} < \frac{5}{4}$, possiamo concludere che

$I_\alpha =]\frac{3}{5}, \frac{5}{4}[$. ■

(a) L'eq. diff.

$$(*) \quad y'' + ay' + by = 0$$

ha $y_1(x) = e^{2x} \cos x$ e $y_2(x) = e^{2x} \sin x$ come soluzioni se e solo se $z_1 = 2+i$ e $z_2 = 2-i$ sono le radici dell'eq. caratteristica

$$z^2 + az + b = 0,$$

$$\text{ossia } (z - z_1)(z - z_2) = z^2 + az + b = 0.$$

$$\text{Ora } (z - (2+i))(z - (2-i)) = z^2 - 4z + 5$$

$$\text{e quindi } \underline{a = -4}, \underline{b = 5}.$$

□

(b) Determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'eq.

diff.

$$(**) \quad y'' - 4y' + 5y = 5x.$$

Poiché $f(x) = P(x) = 5x$ è un polinomio di grado 1 e

$\xi = \gamma + \delta i = 0 + 0i = 0$ non è soluzione dell'eq. caratteristica dell'eq. diff. omogenea associata a $(**)$ (cioè di $y'' - 4y' + 5y = 0$),

cerchiamo una soluzione particolare per $(**)$ della forma

$\bar{y}(x) = Q(x) = \bar{a}x + \bar{b}$ con $\bar{a}, \bar{b}$ da determinare imponendo che $\bar{y}(x)$ sia soluzione dell'eq. diff. completa $(**)$.

Abbiamo

$$\bar{y}'(x) = \bar{a} \quad \bar{y}''(x) = 0,$$

e quindi $\bar{y}(x)$ risolve $(**)$ $\Leftrightarrow$

$$-4\bar{a} + 5(\bar{a}x + \bar{b}) = 5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\bar{a} = 5 \\ -4\bar{a} + 5\bar{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{a} = 1 \\ \bar{b} = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Allora

$$y(x) = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x + x + \frac{4}{5}$$

è l'integrale generale dell'eq. diff. $(**)$.

$$\text{Ora } y(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 + \frac{4}{5} = 0, \text{ ossia } c_1 = -\frac{4}{5}.$$

Poiché $y'(x) = 2c_1 e^{2x} \cos x - c_1 e^{2x} \sin x + 2c_2 e^{2x} \sin x + c_2 e^{2x} \cos x + 1$
 si ha

$$y'(0) = 1 \Leftrightarrow 2c_1 + c_2 + 1 = 1 \Leftrightarrow c_2 = -2c_1$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{8}{5}$$

$$\uparrow$$

$$c_1 = -\frac{4}{5}$$

La soluzione del p.b.m. di Cauchy in (b) è

$$\underline{y(x) = -\frac{4}{5} e^{2x} \cos x + \frac{8}{5} e^{2x} \sin x + x + \frac{4}{5}}$$

11. Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ l'insieme $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \text{la serie in } (*) \text{ è convergente}\}$, dove

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\pi) \frac{(1-x^2)^n}{(2n)^\alpha}$$

che possiamo riscrivere $\frac{1}{2^\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (1-x^2)^n}{n^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2-1)^n}{n^\alpha}$.

Poniamo $t = x^2 - 1$. Allora la serie data può essere riscritta come serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n \quad \text{con } a_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

(nello studio della convergenza della serie data possiamo trascurare il fattore moltiplicativo $\frac{1}{2^\alpha}$).

Determiniamo il raggio di convergenza di questa serie usando il criterio della radice n -esima. Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^\alpha} = 1 \quad \left(\text{sapp. che } \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \right.$$

$$\left. \text{e quindi } (\sqrt[n]{n})^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1, \text{ per continuità di } x^\alpha \right)$$

Quindi il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^\alpha}$ è $r_t = 1$.

Possiamo allora asserire che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^\alpha} \quad \text{è convergente } \forall t \in]-1, 1[, \forall \alpha > 0.$$

Dal criterio di Leibniz segue che abbiamo anche la convergenza in $t = -1$, $\forall \alpha > 0$. Risulta infine la convergenza in $t = 1$ se $\alpha > 1$.

In definitiva, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^\alpha}$ è convergente $\forall t \in [-1, 1[\quad \forall \alpha > 0$
 $\forall t \in [-1, 1] \quad \forall \alpha > 1.$

Ricordando che $t = x^2 - 1$, e quindi

$$-1 \leq x^2 - 1 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x^2 < 2$$

$$\text{e} \quad -1 \leq x^2 - 1 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x^2 \leq 2,$$

possiamo concludere che $E_\alpha =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\quad \forall \alpha > 0$
 $\underline{E_\alpha = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \quad \forall \alpha > 1.}$

12. Sia $(a_n)_n$ la succ. definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n - 1} + 1 & \text{per } n \geq 0 \\ a_0 = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

(a) Provate, usando il principio di induzione, che $1 < a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Poniamo $P(n) = "1 < a_n < 2"$

i) $1 < a_0 < 2 \Rightarrow P(0)$ è vero.

ii) Preso un $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi e supposto vero $P(n)$, proviamo che è vero $P(n+1)$:

abbiamo $1 < a_n < 2$
 (ipotesi induttiva)

$$\Rightarrow 0 < a_n - 1 < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt[3]{a_n - 1} < 1$$

$\sqrt[3]{\cdot}$ strett. crescente

$$\Rightarrow 1 < \sqrt[3]{a_n - 1} + 1 < 2$$

quindi $P(n+1)$ è vero.

Dunque, dal principio di induzione segue che

$$1 < a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

(b) Provate che $(a_n)_n$ è strett. crescente, ossia $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Notiamo che

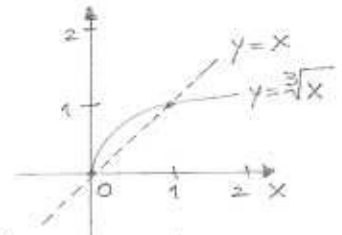
$$a_{n+1} > a_n \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{a_n - 1} + 1 > a_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{a_n - 1} > a_n - 1$$

Oss. che $\sqrt[3]{x} > x \quad \forall x \in]0,1[$ e quindi da (a) con

$x = a_n - 1 \in]0,1[$ si ha

$$\sqrt[3]{a_n - 1} > a_n - 1$$



Possiamo allora asserire che $(a_n)_n$ è strettamente crescente.

□

(c) Essendo $(a_n)_n$ una successione (strett.) crescente (con $a_n > 1 \quad \forall n$) e limitata superiormente (≤ 2), per il teorema di Jenza del limite per funzioni monotone abbiamo che la succ. $(a_n)_n$ ammette limite finito l e $1 < l \leq 2$.

Poiché

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n - 1} + 1 \quad \forall n \geq 0,$$

passando al limite, per $n \rightarrow +\infty$, in entrambi i membri dell'uguaglianza sopra e sfruttando la continuità della funzione radice cubica, si ottiene

$$l = \sqrt[3]{l-1} + 1.$$

$$\text{Ora } l-1 = \sqrt[3]{l-1} \Leftrightarrow (l-1)^3 = l-1 \Leftrightarrow (l-1)(l^2 - 2l) = 0$$

$$\Leftrightarrow l = 0, 1, 2. \text{ Poiché deve essere } 1 < l \leq 2, \text{ l'unico}$$

valore accettabile per $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$ è $l = 2$.

■