$\boxed{A}$

COGNOME E NOME: ______________________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	2½	2½	3	2½	3	3	2½
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		**Totale**
Punti	3	2½	3	4	4½		36
Punti ottenuti							

1. (2½ punti) Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o se è falsa.
   (a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $e^{|x+y|} \le e^{|x|}e^{|y|}$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perché? ______________________________

   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $\frac{e^{|y|}}{e^{|x|}} \le e^{|x-y|}$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perché? ______________________________

2. (2½ punti) Sia
$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{2}} - (1+x)^{\frac{1}{2}}}{\sin 3x - 3\sin x}.$$
   Allora $L =$ ______.

3. (3 punti) Determinate $a, b \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{se } x < 1 \\ \sin \frac{\pi}{2}x + \int_0^x (t\cos 2\pi t)dt & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$
   risulti derivabile in $x = 1$. Si ha $a =$ ______ e $b =$ ______.

4. (2½ punti) Sia $f(x) = \int_x^{2x-1} (e^{-t^2} + 1)dt$.
   Determinate il polinomio di Taylor di f di ordine 2 centrato in $x_0 = 1$. Si ha
$$P_{2,1}(x) = \underline{\hspace{6cm}}$$

5. (3 punti) Sia $f(x) = |x|(2 - \cos x)$.
Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o se è falsa.
   (a) $x = 0$ è punto di minimo assoluto di f. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perché? ______________________________

   (b) f non ammette limite per $x \to +\infty$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perché? ______________________________

   (c) Per ogni $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle su $[-2k\pi, 2k\pi]$.
   ◯ Vera ◯ Falsa

   Perché? ______________________________

   (d) Per ogni $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ si ha $\displaystyle\int_{-2k\pi}^{2k\pi} x f(x) dx = \int_{-2k\pi}^{2k\pi} x f^2(x) dx$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perché? ______________________________

6. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $g(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi (fornendo eventualmente un controesempio).
   (a) f ha un minimo assoluto su $\mathbb{R}$. ◯ Sì ◯ No

   Perché? ______________________________

   (b) Se f è positiva, allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. ◯ Sì ◯ No

   Perché? ______________________________

   (c) Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, la funzione $g \circ f$ è convessa. ◯ Sì ◯ No

   Perché? ______________________________

   (d) Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, la funzione $f \circ g$ è convessa. ◯ Sì ◯ No

   Perché? ______________________________

7. (2½ punti) Siano

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!2^n}{n^{2n}} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right) \log \frac{n^2}{n+2}.$$

Allora
   (a) la serie in (i) è convergente. ◯ Sì ◯ No

   Perché? ______________________________

   (b) la serie in (ii) è convergente. ◯ Sì ◯ No

   Perché? ______________________________

8. (3 punti) Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_0^x (2|t-1|+1)dt.$$

Dopo aver determinata l'espressione analitica di F, scrivetela qui sotto e rappresentate il grafico di F a fianco.

$F(x) =$

9. ($2\frac{1}{2}$ punti) Sia I_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui risulta convergente l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{2+8\alpha}(\arctan(x-1)^2)^\alpha}{\sqrt[3]{x^3-1}}dx.$$

Allora $I_\alpha =$ ____________.

10. (3 punti) (a) Determinate l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(*) \qquad 2y'' + 3y' - 2y = e^{\frac{1}{2}x}.$$

Si ha $y(x) =$ ________________________

(b) Determinate le soluzioni dell'equazione (*) che soddisfano le condizioni

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = -\infty. \end{cases}$$

Le soluzioni sono $y(x) =$ ________________________.

Per i seguenti DUE esercizi è richiesto UN ACCURATO SVOLGIMENTO.

11. (4 punti) (a) Trovate le soluzioni $(\widehat{z}, \widehat{w}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ del sistema di equazioni

$$\begin{cases} (\overline{w} - i)\overline{z}^2 + 2\overline{z} = 0 \\ z(z-w) = 3. \end{cases}$$

(b) Individuate l'insieme $E = \{z \in \mathbb{C} : (|z+i|-2)(|z|-1) = 0\}$ e rappresentatelo nel piano di Gauss.

(c) Esiste una coppia $(\widehat{z}, \widehat{w})$ che sia soluzione del sistema in (a) e tale che $\widehat{z} \in E$ e $\widehat{w} \in E$?

12. ($4\frac{1}{2}$ punti) Sia $f(x) = e^{2x} - 2e^{-x} + 2$ su $\mathbb{R}$.

(a) Studiate la funzione (comportamento agli estremi, monotonia, punti estremi, concavità/convessità) e tracciate un grafico qualitativo.

(b) Provate che esistono costanti $c > 0$ tali che

$$(*) \qquad |f(x) - f(y)| \geq c|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(c) Determinate la più grande costante c per cui (*) è verificata.