Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica e CdL in Fisica - Corso di AM A / AM 1 a.a. 2022/23
Test di autovalutazione - 15 ottobre 2022

1) $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-1}{2|x+1|} \leq 1\}$ $=]-1, 3]$.

$\frac{x^2-1}{2|x+1|} \leq 1 \iff \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2-1 \leq 2|x+1| \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x < -1 \\ x^2-1 \leq 2(-x-1) \end{cases}$ o $\begin{cases} x > -1 \\ x^2-1 \leq 2(x+1) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x < -1 \\ x^2+2x+1 \leq 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x > -1 \\ x^2-2x-3 \leq 0 \end{cases}$

$\hookrightarrow \nexists$ ono sol. $\hookrightarrow]-1, 3]$.

Allora $\inf A = -1$. E' un minimo? No.
$\sup A = 3$. E' un massimo? Sì.

2) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^3-1| \leq 1\}$ $= [0, \sqrt[3]{2}]$.

$|x^3-1| \leq 1 \iff -1 \leq x^3-1 \leq 1$
$\iff 0 \leq x^3 \leq 2$

- $\exists M \in A : \forall x \in A, x \leq M$ Vera : $M = \sqrt[3]{2}$.
- $\exists M \in \mathbb{R}_{>0} : \forall x \in A, M \leq x$ Falsa : infatti, è vera la sua negazione ossia $\forall M \in \mathbb{R}_{>0}, \exists x \in A : M > x$.
  Fissato qualunque $M \in \mathbb{R}_{>0}$, basta prendere $x = 0$.
- $\forall M \in \mathbb{R}_{<0}, \exists x \in A : x > M$ Vera : basta prendere un qualsiasi $x \in A$ con $x > 0$.
- $\exists x \in A : \forall M \in \mathbb{R}_{>0}, x \leq M$ Vera : $x = 0$.

3) $P(x,y,z) =$ " $x^2 \geq y+z$ ".

- $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}, P(x,y,z)$ Falsa:

Proviamo che la negazione è vera, ossia che è vera l'affermazione
$\exists x \in \mathbb{Z} : \forall z \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : x^2 < y+z$:
basta prendere $x = 0$; preso un qualsiasi $z \in \mathbb{Z}$, basta prendere $y = -z+1$.

• $\forall y\in\mathbb{Z}, \exists z\in\mathbb{Z} : \forall x\in\mathbb{Z}, \ \mathcal{P}(x,y,z)$ Vera :

Preso $y\in\mathbb{Z}$ qualsiasi, basta prendere $z=-y$ e oss. che $\forall x\in\mathbb{Z}$ ha $x^2\geq 0$. □

• $\forall x,y\in\mathbb{Z}, \exists z\in\mathbb{Z} : \ \mathcal{P}(x,y,z)$ Vera :

Presi $x,y\in\mathbb{Z}$ qualsiasi, basta prendere $z=-y$ (infatti $\forall x\in\mathbb{Z}$, si ha $x^2\geq 0$, e con $z=-y$ risulta $z+y=0$) □

• $\exists z\in\mathbb{Z} : \forall x,y\in\mathbb{Z}, \ \mathcal{P}(x,y,z)$ Falsa :

Proviamo che la negazione è vera, ossia che è vera l'affermazione

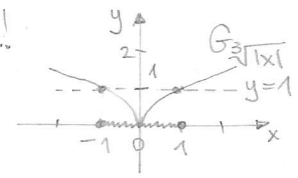
$\forall z\in\mathbb{Z}, \exists x,y\in\mathbb{Z} : \ x^2 < y+z$.

Infatti, preso $z\in\mathbb{Z}$ qualsiasi, basta prendere $x=0$, e $y=-z+1$.

■

4) • $\{x\in\mathbb{R} : -\sqrt[3]{|x|}+1\geq 0\}$ è limitato Sì :

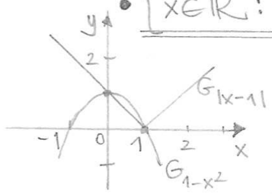
graficam.!



$$-\sqrt[3]{|x|}+1\geq 0 \iff \sqrt[3]{|x|}\leq 1 \iff |x|\leq 1$$

$$\Rightarrow \{x\in\mathbb{R} : -\sqrt[3]{|x|}+1\geq 0\} = [-1,1]$$ □

• $\{x\in\mathbb{R} : 1-x^2\leq |x-1|\}$ è limitato superiormente No :



$$1-x^2\leq|x-1| \iff \begin{cases} x\geq 1\\ 1-x^2\leq x-1\end{cases} \text{ o } \begin{cases} x<1\\ 1-x^2\leq -x+1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\geq 1\\ 0\leq x^2+x-2\end{cases} \text{ o } \begin{cases} x<1\\ 0\leq x^2-x\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\geq 1\\ x\leq -2 \text{ o } x\geq 1\end{cases} \text{ o } \begin{cases} x<1\\ x\leq 0 \text{ o } x\geq 1.\end{cases}$$

$= \ ]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$

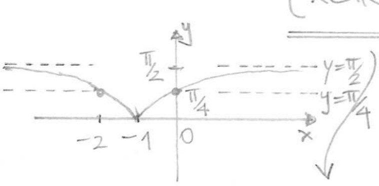
□

• $\{x\in\mathbb{R} : \log_2 x^2\leq 2\}$ è limitato inferiormente Sì :

$= [-2,2]\setminus\{0\}$

$$\log_2 x^2\leq \log_2 4 \iff \begin{cases} x\neq 0\\ x^2\leq 4.\end{cases}$$ □

• $\{x\in\mathbb{R} : \frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg}|x+1| < \frac{\pi}{2}\}$ è limitato No :



sempre verificata

$$\underbrace{\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 < \operatorname{arctg}|x+1|}_{} < \frac{\pi}{2}$$

$$\iff |x+1|>1 \iff x+1<-1 \text{ o } x+1>1$$

$$\iff x<-2 \text{ o } x>0.$$ ■

$= \ ]-\infty,-2[\ \cup\ ]0,+\infty[$

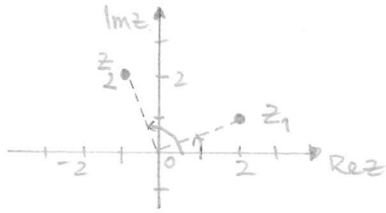
5. Per quale delle seg. coppie (z_1, z_2) di numeri complessi, il prodotto $z_1 \cdot z_2$ ha argomento principale in $\left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right[$?

Ricordo che se $z_1 = |z_1| \left(\cos(\arg z_1) + i \sin(\arg z_1) \right)$

$$z_2 = |z_2| \left(\cos(\arg z_2) + i \sin(\arg z_2) \right)$$

allora $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| \left(\cos(\arg z_1 + \arg z_2) + i \sin(\arg z_1 + \arg z_2) \right)$.

(a) $z_1 = 2 + i, \quad z_2 = -1 + 2i$ No



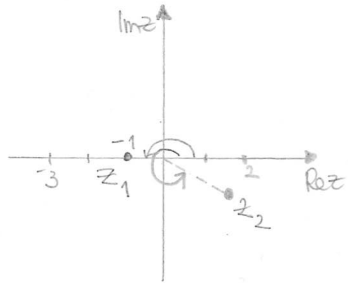
Oss. che $0 < \arg z_1 < \frac{\pi}{4} \qquad \frac{\pi}{2} < \arg z_2 < \frac{3\pi}{4}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} < \arg z_1 + \arg z_2 < \pi$$

$$\notin \left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right[.$$

☐

(b) $z_1 = -1, \quad z_2 = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$ No



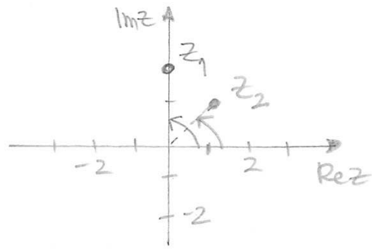
Oss. che $\arg z_1 = \pi \qquad \arg z_2 = \frac{11\pi}{6} \quad \left(= -\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Rightarrow \quad \arg z_1 + \arg z_2 = \frac{17\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi$$

argomento principale $= \frac{5\pi}{6} \notin \left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right[$.

☐

(c) $z_1 = 2i, \quad z_2 = 1 + i$ No

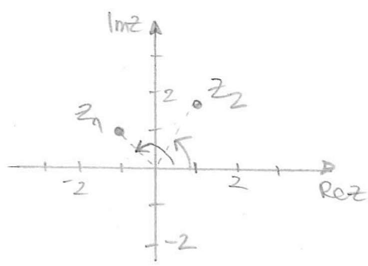


Oss. che $\arg z_1 = \frac{\pi}{2} \qquad \arg z_2 = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \quad \arg z_1 + \arg z_2 = \frac{3\pi}{4} \notin \left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right[.$$

☐

(d) $z_1 = -1 + i \qquad z_2 = 1 + \sqrt{3} i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$ Sì



Oss. che $\arg z_1 = \frac{3\pi}{4} \qquad \arg z_2 = \frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow \quad \arg z_1 + \arg z_2 = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{9+4}{12}\pi$$

$$\Rightarrow \quad \pi < \arg z_1 + \arg z_2 < \frac{5\pi}{4}.$$

■

6) $z^3=|z|^4$: se z è soluzione dell'eq. $z^3=|z|^4$ allora z soddisfa $|z|^3=|z|^4$ ossia $|z|^3(1-|z|)=0$, da cui $z=0$ o $|z|=1$. Allora l'eq. $z^3=|z|^4$ risulta, per $z\neq 0$, equiv. a $z^3=1$. Ora $z^3=1$ ha 3 soluzioni che appartengono alla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 nel piano complesso che sono

$z_0=1$, $z_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ e

$$z_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

In definitiva, l'eq. $z^3=|z|^4$ ha 3 soluzioni che appartengono alla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 nel piano complesso. □

$$\begin{cases}(\bar z-1)(\bar z+1)=2(\operatorname{Im}z)i\\ \operatorname{Re}z-\operatorname{Im}z=0\end{cases} \iff \begin{cases}|z|^2+z-\bar z-1=2(\operatorname{Im}z)i\\ \operatorname{Re}z=\operatorname{Im}z.\end{cases}$$

Poniamo $z=x+iy$; allora il sistema dato si riscrive

$$\begin{cases}x^2+y^2+\cancel{x}+\cancel{iy}-\cancel{x}+\cancel{iy}-1=\cancel{2yi}\\ x=y\end{cases} \iff \begin{cases}x^2+y^2=1\\ x=y.\end{cases}$$

Otteniamo le due soluzioni del sistema che appartengono alla circonf. di centro l'origine e raggio 1 nel piano di Gauss: $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$ ■

7) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (opp. $=\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$)

Risulta $z^{18}=\cos(-6\pi)+i\sin(-6\pi)=1$

$z^{15}=\cos(-5\pi)+i\sin(-5\pi)=-1.$

Allora $w=z^{18}-z^{15}=2$ e $w=a+ib$ con $a=2$ e $b=0$.

■

8) $z+\bar z-4\operatorname{Im}z=z^2+|z|$: poniamo $z=x+iy$ e l'eq. si riscrive

$$x+\cancel{iy}+x-\cancel{iy}-4y=x^2+2xyi-y^2+\sqrt{x^2+y^2},$$

ossia

$$2x-4y=x^2+2xyi-y^2+\sqrt{x^2+y^2}.$$

L'eq. data risulta allora equiv. al sistema

$$\begin{cases} 2x-4y = x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2} \\ xy=0; \end{cases}$$

tale sistema è equiv. a

$$\begin{cases} x=0 \\ -4y=-y^2+|y| \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} y=0 \\ 2x=x^2+|x| . \end{cases}$$

Ora

$$\begin{cases} x=0 \\ y^2-4y-|y|=0 \end{cases} \iff \begin{matrix} x=0,\ y=0 \\ o\ x=0,\ y=5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} z=0; \\ z=5i, \end{matrix}$$

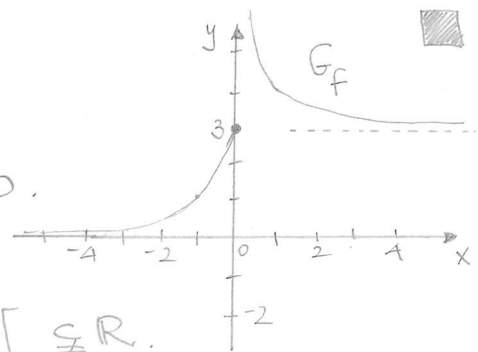
mentre
$$\begin{cases} y=0 \\ x^2-2x+|x|=0 \end{cases} \iff \begin{matrix} y=0,\ x=0 \\ o\ y=0,\ x=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} z=0; \\ z=2. \end{matrix}$$

Dunque l'insieme delle soluzioni dell'eq. data è

$$\{z=0,\ z=2,\ z=5i\}.$$

Dunque $\alpha = \sup\{|z| : z \text{ soluzione dell'eq.}\} = \sup\{0,2,5\}$, ossia $\underline{\alpha = 5.}$

9) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} 3^{x+1} & \text{se } x \le 0 \\ 3+\frac{1}{x} & \text{se } x>0. \end{cases}$



f è suriettiva (Falsa) : $f(\mathbb{R}) =]0,+\infty[\subsetneq \mathbb{R}$.

f è iniettiva (Vera) : ogni retta orizz. di eq. $y=k$ interseca il G_f al più una volta.

($f|_{]-\infty,0]}$ strett. crescente, $f|_{]0,+\infty[}$ strett. crescente e

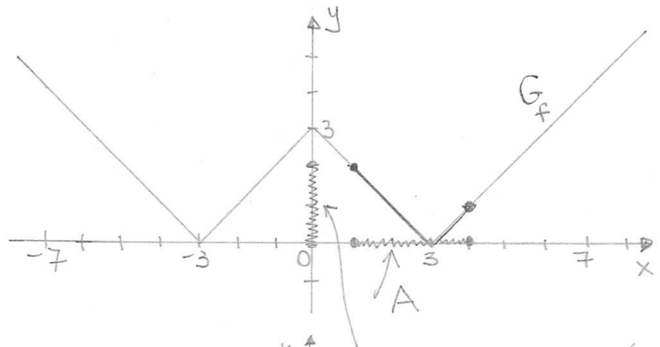
$$\max_{]-\infty,0]} f = 3 < \inf_{]0,+\infty[} f \quad)$$

f è limitata inferiormente (Vera) : $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

f è strett. monotona Falsa : $f|_{]-\infty,0]}$ strett. crescente

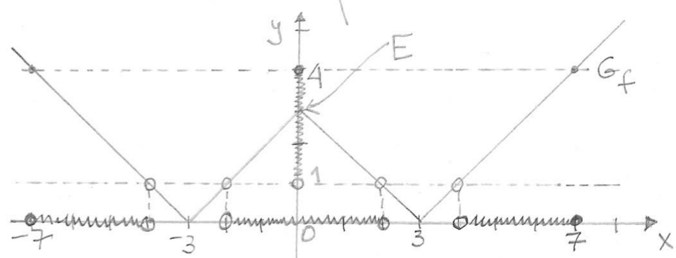
$f|_{]0,+\infty[}$ strett. decrescente. ■

10) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=||x|-3|$



$f(A)=[0,2]$. Ne segue che

$\min f(A)=0$ $\max f(A)=2$.



$E=]1,4]$

$f^{-1}(E)=\{x\in\mathbb{R}: f(x)\in]1,4]\}$

$=[-7,-4[\cup]-2,2[\cup]4,7]$.

Allora $\inf f^{-1}(E)=-7$. E' un minimo? Si.

$\sup f^{-1}(E)=7$. E' un massimo? Si. ■

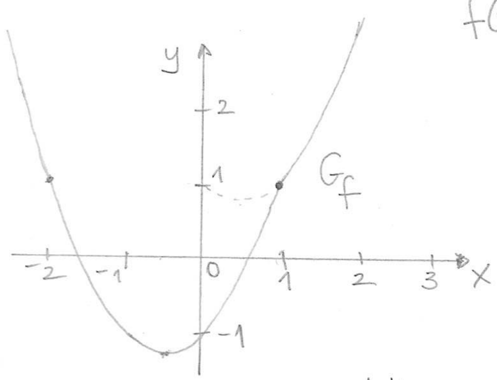
11) Sia Λ l'insieme dei valori del parametro reale λ per cui l'eq.

$$x^2-|x-1|=\lambda$$

ha due soluzioni.

$$f(x)=x^2-|x-1|=\begin{cases}x^2-x+1 & \text{se } x\geq 1\\ x^2+x-1 & \text{se } x<1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} & \text{se } x\geq 1\\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4} & \text{se } x<1.\end{cases}$$



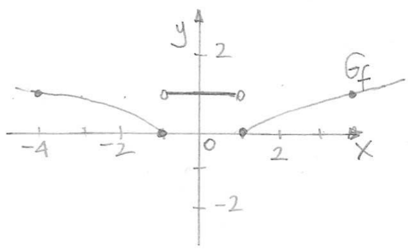
$\Lambda=]-\frac{5}{4},+\infty[$

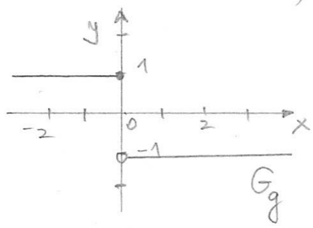
Allora $\inf\Lambda=-1.25$ e quindi

$\inf\Lambda=-a.bc$ con $a=1$, $b=2$, $c=5$. ■

12) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \sqrt{|x|} - 1 & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \le 0 \\ -1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$





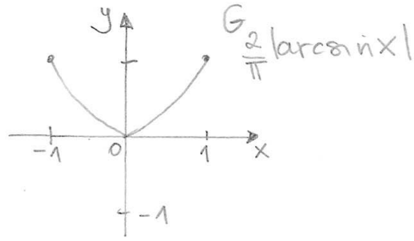
Stabilite per ciascuna delle seg. espressioni se è corretta sì o no.

$(f \circ g)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ **sì**

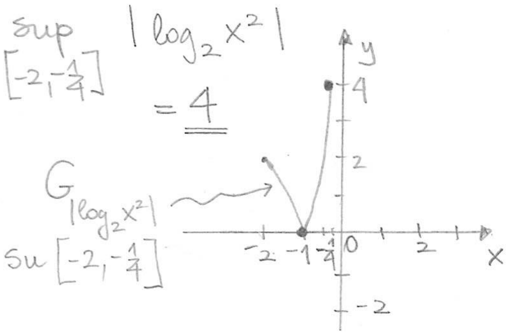
$(g \circ g)(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \le 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ **sì**

$(g \circ g \circ g)(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ **sì** .

13) (a) $\sup\limits_{]0,1[} \left(\frac{2}{\pi} |\arcsin x| \right) = \underline{\underline{1}}$



(b) $\sup\limits_{[-2,-\frac{1}{4}]} |\log_2 x^2| = \underline{\underline{4}}$

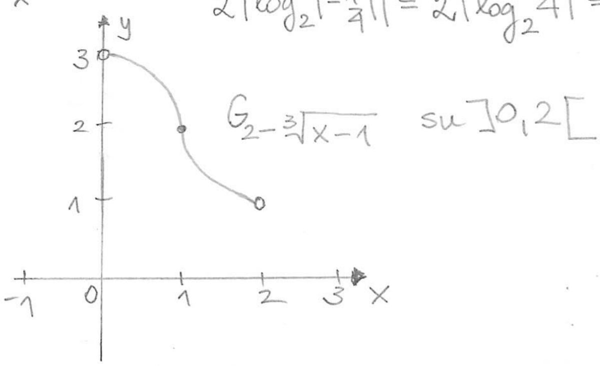


$|\log_2 x^2| = 2 |\log_2 |x||$

$2 |\log_2 |-2|| = 2$

$2 |\log_2 |-\frac{1}{4}|| = 2 |\log_2 4| = 4$

(c) $\inf\limits_{]0,2[} (2 - \sqrt[3]{x-1}) = \underline{\underline{1}}$



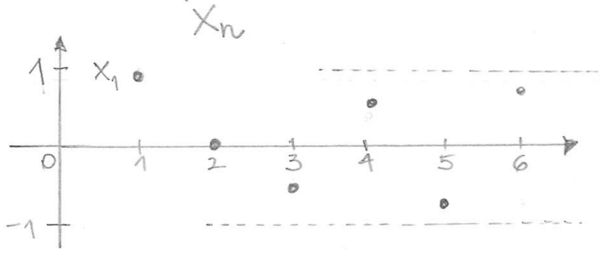
14) $A = \{ \underbrace{(-1)^n \cos \frac{\pi}{n}}_{x_n} : n \in \mathbb{N}_{\ge 1} \}$

$x_1 = 1$

$x_2 = 0$

$x_{2n+1} \searrow -1 \quad \forall n \ge 1$

$x_{2n} \nearrow 1 \quad \forall n \ge 1$



Stabilite per ciascuna delle seg. quattro affermazioni se è vera o falsa.

L'insieme A è costituito solo da pt. isolati (Falsa).

$1 \in A$ ed 1 è un pt. di accumulazione per A $\square$

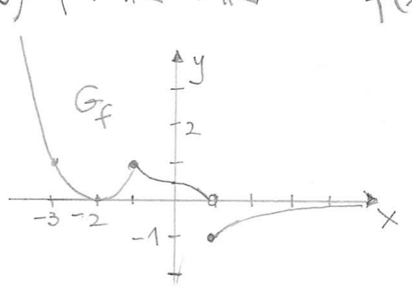
A ha solo un pt. di accumulazione (Falsa).

1 e -1 sono pt. di accumulazione per A. $\square$

A è un insieme limitato (Vera). $A \subseteq [-1,1]$ $\square$

A non ammette minimo (Vera): $\inf A = -1$, ma $\nexists\, \bar{x} \in A : \bar{x} = -1$.

15) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x^2+4x+4 = (x+2)^2 & \text{se } x<-1 \\ \frac{1}{\pi}\arccos x & \text{se } x \in [-1,1[\\ -\frac{1}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$



Stabilite per ciascuna delle seg. affermazioni se è vera o falsa.

$x=-1$ è un pt di massimo loc, ma non è un pt. di max assoluto (Vera).

$x=1$ è un pt. di minimo loc per f, ma non è un pt. di min assoluto (Falsa).

$\operatorname{im} f = [-1, +\infty[$ (Vera).

la funz. $f|_{[-3,+\infty[}$ ha 2 pt. di massimo globale (Vera): $x=-3$, $x=-1$. ■

16) $a_n = \dfrac{(1+n^n)\sqrt[n]{2^n+\log 3^n}}{n^{n+1}\sin\frac{1}{n} + n!} = \dfrac{\cancel{n^n}\overbrace{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)}^{\to 1}\overbrace{\sqrt[n]{2^n+n\log 3}}^{\to 2}}{\cancel{n^n}\left(\underbrace{\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{\to 0}\right)}$

$\underline{L = \lim_{n\to+\infty} a_n = 2.}$

$2^n \leq 2^n + n\log 3 \leq 2\cdot 2^n \quad \forall n \geq \bar{n}$ (poiché $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\log 3}{2^n} = 0$)

$\Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{2^n}}_{\to 2} \leq \sqrt[n]{2^n+n\log 3} \leq \underbrace{\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{2^n}}_{\to 2}$ ■

17) $L = \lim_{x\to 1} \dfrac{1-\cos 2(x-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{2}$ e quindi $\underline{2L = 1.}$

Infatti $\dfrac{1-\cos 2(x-1)}{(x^2-1)^2} = \overbrace{\dfrac{1-\cos 2(x-1)}{(2(x-1))^2}}^{\to \frac{1}{2}} \cdot \dfrac{4\cancel{(x-1)^2}}{\cancel{(x-1)^2}\underbrace{(x+1)^2}_{\to 4}} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{4}} = \frac{1}{2}.$