

Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica  
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023  
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi\*

28 Novembre 2022

**Esercizio 10.1.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann integrabile e  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata tali che

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$$

Dimostrare che  $g$  è Riemann integrabile e che  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ .

*Soluzione*

**Ricorda** (linearità dell'integrale)  $\varphi, \psi \in \mathcal{R}([a, b])$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\alpha\varphi + \beta\psi)dx = \alpha \int_a^b \varphi dx + \beta \int_a^b \psi dx$$

*Dimostrazione.* Non è restrittivo supporre  $f(x_0) > g(x_0)$ . Definiamo

$$h(x) := f(x) - g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq x_0 \\ f(x_0) - g(x_0) & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

e dimostriamo che  $h$  è Riemann integrabile. Equivalentemente dimostriamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathcal{D} : S(\mathcal{D}, h) - s(\mathcal{D}, h) < \varepsilon$$

Fissiamo  $\varepsilon$  e definiamo

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \left\{ a, x_0 - \frac{\varepsilon}{4h(x_0)}, x_0 + \frac{\varepsilon}{4h(x_0)}, b \right\}$$

Si ottiene che

$$s(\mathcal{D}_\varepsilon, h) = 0$$

infatti l'inf di  $h$  su qualsiasi intervallo è 0. Si ha inoltre che

$$\begin{aligned} S(\mathcal{D}_\varepsilon, h) &= (x_1 - a) \sup_{[a, x_1]} f + (x_2 - x_1)h(x_0) + (b - x_2) \sup_{[x_2, b]} f = (x_1 - x_2)(h(x_0)) = \\ &= \left[ x_0 + \frac{\varepsilon}{4h(x_0)} - x_0 + \frac{\varepsilon}{4h(x_0)} \right] h(x_0) = h(x_0) \frac{\varepsilon}{2h(x_0)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

$h$  è quindi Riemann integrabile, di conseguenza per linearità  $g = f - h$  è Riemann integrabile. Rimane ora da dimostrare che  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ . Dimostriamo equivalentemente che  $\int_a^b h(x)dx = 0$ . Osserviamo che le somme inferiori sono sempre 0, mentre le somme superiori risultano limitate dall'alto da  $\frac{\varepsilon}{2}$ , quindi facendo tendere  $\varepsilon$  a 0 si ottiene che

$$\begin{aligned} 0 = s(\mathcal{D}) &\leq \int_a^b h(x)dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \implies \int_a^b h(x)dx &= 0 \end{aligned}$$

QED

---

\*Trascrizione a cura di Davide Borra

**Esercizio 10.2.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Dimostrare che se  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$  e  $\int_a^b f(x)dx = 0$ , allora  $f(x) = 0$  ovunque.

*Soluzione*

*Dimostrazione.* Si procede per assurdo: supponiamo che  $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) \neq 0$ . In particolare  $f(x_0) > 0$  per ipotesi. Per il teorema della permanenza del segno

$$\exists \delta > 0 : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq [a, b] \wedge f(x) > 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

. Per lo spezzamento si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx$$

Perchè gli altri due integrali sono non negativi per ipotesi.

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx = \sup s(\mathcal{D}, f) \geq 2\delta \inf_{[x_0-\delta, x_0+\delta]} f = 2\delta \inf_{[x_0-\delta, x_0+\delta]} f > 0$$

Poiché  $\inf_{[x_0-\delta, x_0+\delta]} f = \min_{[x_0-\delta, x_0+\delta]} f > 0$ , ottengo una contraddizione.

**QED**

**Esercizio 10.3.** Scrivere i primi due termini dello sviluppo di Taylor centrato in  $x_0 = 0$  della funzione

$$g(x) = \int_{x^3}^{-x^2} e^{-t^2} dt$$

E determinare per quali  $\alpha$  reali

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x^\alpha} = 0$$

*Soluzione* Definiamo

$$f(x) := \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Da cui

$$g(x) = \int_{x^3}^0 e^{-t^2} dt + \int_0^{-x^2} e^{-t^2} dt = - \int_0^{x^3} e^{-t^2} dt + \int_0^{-x^2} e^{-t^2} dt = f(-x^2) - f(x^3)$$

Di conseguenza per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$g'(x) = f'(-x^2)(-2x) - f'(x^3)(3x^2) = -2xe^{-x^4} - 3x^2e^{-x^6}$$

$$\implies g'(0) = 0$$

$$g''(x) = -2e^{-x^4} + 8x^4e^{-x^4} - 6xe^{-x^6} + 18x^7e^{-x^6}$$

$$\implies g''(x) = -2$$

Inoltre

$$g(0) = \int_0^0 e^{-t^2} dt = 0$$

Di conseguenza si ha

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = -x^2 + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \left(-1 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2-\alpha} \left(-1 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right) = 0 \iff \alpha < 2$$

**Esercizio 10.4.** Sia

$$g(x) = \int_0^{x^2} \cos(2t)dt$$

(a) trovare i punti critici di  $g(x)$ ;

(b) calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - x^2}{x^6}$$

*Soluzione*

(a) Sia  $f(x) = \int_0^x \cos(2t) dt \implies g(x) = f(x^2)$ . Di conseguenza  $g'(x) = 2xf'(x) = 2x \cos(2x^2)$ .  $x$  è punto critico  $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} ll \Leftrightarrow x = 0 \vee \cos(2x^2) = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm \sqrt{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}} \quad (k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

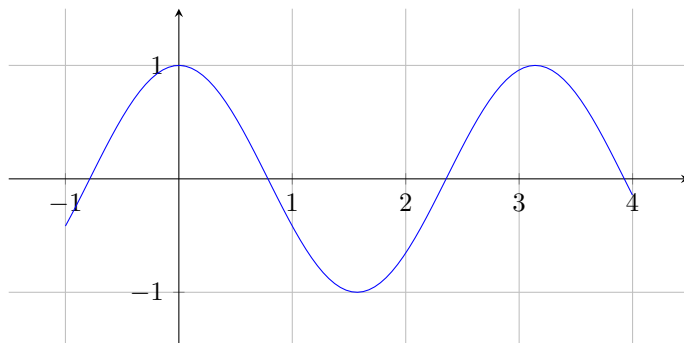
(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - x^2}{x^6} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'(x) - 2x}{6x^5} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \cos(2x^2) - 2x}{6x^5} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2x^2) - 1}{4x^4} \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

**Esercizio 10.5.** Studiare qualitativamente

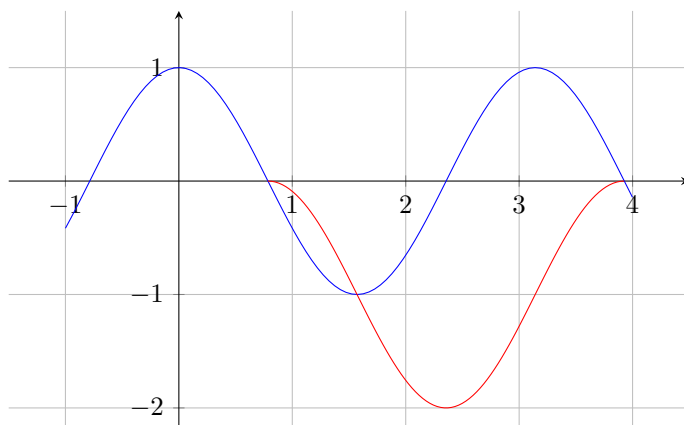
$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^x \cos(2t) dt$$

*Soluzione* Cominciamo rappresentando  $\cos 2x$  Prima di tutto osserviamo che la funzione integrale ha



una radice in  $x = \frac{\pi}{4}$ . Inoltre, spostandosi verso destra, tra  $\frac{\pi}{4}$  e  $\frac{\pi}{2}$  l'area è negativa e *sempre più grande*.

Di conseguenza la funzione integrale sarà decrescente e concava. Tra  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{3}{4}\pi$  l'area sarà negativa (funzione integrale decrescente) e *sempre più piccola* (convessa). Analogamente negli altri intervalli. Siamo così in grado di disegnare  $F(x)$  in  $\left[ \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi \right]$ . Siccome la funzione è periodica siamo quindi in grado di disegnare  $F$  su tutto  $\mathbb{R}$ .



**Esercizio 10.6.** Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{3-4x}{1+x^2} dx & \text{b) } \int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}} & \text{c) } \int \sqrt[3]{2x+1} dx \\ \text{d) } \int 6x \operatorname{sen}(-3x^2-2) dx & \text{e) } \int 3xe^{x^2} dx & \end{array}$$

*Soluzione*

$$\begin{array}{l} \text{a) } \int \frac{3-4x}{1+x^2} dx = 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx - 4 \int \frac{x}{1+x^2} dx = 3 \operatorname{arctg} x - 2 \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \\ = 3 \operatorname{arctg} x - 2 \int \log'(1+x^2) 2x dx = 3 \operatorname{arctg} x - 2 \int (\log(1+x^2))' dx = 3 \operatorname{arctg} x - 2 \log(1+x^2) + c \\ \text{b) } \int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}} = \int \frac{1}{x} \operatorname{arcsen}'(\log(x)) dx = \int (\operatorname{arcsen}(\log x))' dx = \operatorname{arcsen} \log x + c \\ \text{c) } \int \sqrt[3]{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int 2(2x+1)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{2} (2x+1)^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{3}{4} + c = \frac{3}{8} \sqrt[3]{(2x+1)^4} + c \\ \text{d) } \int 6x \operatorname{sen}(-3x^2-2) dx = \int (-6x)(-\operatorname{sen}(-3x^2-2)) dx = \cos(-3x^2-2) + c \\ \text{e) } \int 3xe^{x^2} dx = \frac{3}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{3}{2} e^{x^2} + c \end{array}$$

### Primitive elementari

Funzione	Primitiva
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log  x $
$e^x$	$e^x$
$a^x \quad (a > 0 \wedge a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\log a}$
$\text{sen } x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\text{sen } x$
$\text{senh } x$	$\text{cosh } x$
$\text{cosh } x$	$\text{senh } x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\text{tg } x$
$\frac{1}{1 + x^2}$	$\text{arctg } x$
$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	$\text{arcsen } x$
$-\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	$\text{arccos } x$