1 12 dicembre

Esercizio
Data la funzione $f(s) = \frac{e^{-|s|}-1}{s(s+1)}$

1. studiare dominio, segno e derivate di f, disegnando un grafico qualitativo di f
2. determinare il dominio di $F(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$
3. determinare il grafico di F

Hint:
1) dopo aver calcolato dominio, segno e limiti di f agli estremi del dominio, studiare il segno di f' attraverso stime

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-e^{-s}(s^2+3s+1)+(2s+1)}{s^2(s+1)^2} & \text{se } s > 0 \\ \frac{e^{s}(s^2-s-1)+(2s+1)}{s^2(s+1)^2} & \text{se } s < 0 \end{cases}$$

2) se $x > 0$, $F(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$ è un integrale proprio e, essendo la funzione f continua e limitata in $[0, x]$ per ogni $x > 0$, abbiamo che $F(x) \in \mathbb{R}$. Allora, $[0, +\infty[\subseteq Dom(F)$. Analogamente, $f(s)$ è continua e limitata in $[a, 0[$ per ogni $a \in]-1, 0[$ e quindi $]-1, 0[\subseteq Dom(F)$.
Infine, siccome $f(s) \sim (1 - \frac{1}{e})\frac{1}{s+1}$ per $s \to -1^+$ e $\int_0^{-1} \frac{1}{s+1}\,\mathrm{d}s$ non converge, possiamo concludere che $Dom(F) =]-1, +\infty[$

1.1 Funzioni convesse

Esercizio (una caratterizzazione della convessità)
Dimostra che una funzione $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è convessa in $[a, b]$ se e solo se $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, $\forall \lambda \in [0, 1]$ vale che

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

Hint:
$\Rightarrow$) scelto un $x \in [x_1, x_2]$, possiamo scrivere $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ per un qualche $\lambda \in [0, 1]$ e sostituirlo nella definizione di convessità di f facendo i

calcoli.
$\Leftarrow$) *scelto un* $x \in [x_1, x_2]$, *possiamo scrivere* $x = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1 + \frac{x_2-x}{x_2-x_1}x_2$ *e porre* $\lambda = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}$

Esercizio
Provare che $f(x) = x^2$ è strettamente convessa.

Esercizio
Provare che $\forall a, b \geq 0$, $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ per ogni $p > 1$.

Hint: consideriamo la funzione $f(t) = t^p$ *(convessa per* $p > 1$ *e* $t > 0$*!) e usiamo la caraterizzazione precedente con* $x = a, y = b$ *e* $\lambda = \frac{1}{2}$*: allora* $(\frac{a+b}{2})^p \leq \frac{a^p}{2} + \frac{b^p}{2}$

Esercizio
Dimostra che una funzione $f\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile è convessa se e solo se $f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Hint:
$\Rightarrow$) *usando la caratterizzazione precedente, otteniamo*

$$f(x) - f(y) \geq \frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(y)}{\lambda} \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Poniamo $g(\lambda) := f(\lambda x + (1-\lambda)y)$ *(è derivabile); allora, se prendiamo il limite per* $\lambda \to 0^+$ *nella disuguaglianza precedente, otteniamo* $f(x) - f(y) \geq g'(0) = f'(y)(x-y)$.
$\Leftarrow$) *scelto* $z \in [x, y]$, *possiamo scrivere* $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ *per qualche* $\lambda \in [0,1]$. *Allora abbiamo che*

$$\begin{cases} f(x) & \geq f(z) + f'(z)(x-z) \\ f(y) & \geq f(z) + f'(z)(y-z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda f(x) & \geq \lambda\big[f(z) + f'(z)(x-z)\big] \\ (1-\lambda)f(y) & \geq (1-\lambda)\big[f(z) + f'(z)(y-z)\big] \end{cases}$$

Sommando membro a membro, otteniamo la convessità di f.

1.2 Alcune importanti disuguaglianze

1. (disuguaglianza di Young)
   dati $p, q \in]1, +\infty[$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, allora $a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \forall a, b \geq 0$

2. (disuguaglianza di Hölder)
   dati $p, q \in]1, +\infty[$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, allora $\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1 \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ con $a_i, b_i \geq 0$ vale che
   $$\sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

3. (disuguaglianza di Cauchy-Schwartz)
   $\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1 \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ con $a_i, b_i \geq 0$, vale che
   $$\sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

4. (disuguaglianza di Jensen)
   data una funzione $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convessa (risp. concava), di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e una funzione g Riemann-integrabile su $[a, b]$, vale che
   $$f\left(\fint_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \right) \leq \fint_a^b (f \circ g)(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{(risp. } \geq \text{)}$$

5. (disuguaglianza di Young generalizzata)
   dati $p_1, \dots, p_n \in]1, +\infty[$ tali che $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$, vale che $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ con $a_i \geq 0$
   $$\prod_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{p_i}}{p_i}$$

Hint:
per 1), utilizzare la caratterizzazione della concavità per la funzione $\ln(t)$;
per 2), utilizzare la disuguaglianza di Young con $x_i := \frac{a_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}}$ *e* $y_i := \frac{b_i}{(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}}$;
per 4), utilizzare la caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili rispetto a $g(x)$ *e* $\fint_a^b g(t) \, \mathrm{d}t$;
per 5), utilizzare la disuguaglianza di Jensen per la funzione $f(t) = \ln(t)$ *e* g *opportuna funzione costante a tratti*