Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

10 Ottobre 2022

.

Esercizio 1.1. Risolvere le seguenti equazioni/sistemi di equazioni in $\mathbb{C}$:

(a) $z^6 + i\overline{z}^3 = 0$

(b) $z^2 - (3+i)z + 2 = 0$

(c) $\begin{cases} \overline{z}^2 - 2w^2 + 2 = 0 \\ \overline{w}^2 - z = 0 \end{cases}$

Soluzione (a) $z^6 + i\overline{z}^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^6 = -i z^3 \quad \underset{\text{passo ai moduli}}{\Rightarrow} \quad |z^6| = |-iz^3|$

Siccome il modulo distribuisce sul prodotto e $|-i| = 1$ si ha

$$|z|^6 = |z|^3 \quad \Leftrightarrow \quad |z|^3(|z|^3 - 1) = 0$$

$$|z| = 0 \quad \text{o} \quad |z| = 1$$

- Caso $|z| = 0$, si ha $z = 0$
- Caso $|z| = 1$, si ha

$$z^3 \cdot z^6 = -i\overline{z}^3 \cdot z^3 \quad \Leftrightarrow \quad z^9 = -i(\cancel{|z|^2})^3 \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt[9]{-i}$$

Da cui, per la formula di De Moivre

$$z_k = e^{i\left(\frac{3}{18}\pi + \frac{2}{9}k\pi\right)}$$

(b) In questo caso basta applicare la risolvente di secondo grado:

$$z_1, 2 = \frac{3 + i \pm \sqrt{(3+i)^2 - 8}}{2} = \frac{3 + i \pm \sqrt{9 - 1 + 6i - 8}}{2} = \frac{3 + i \pm \sqrt{6i}}{2} = \frac{3 + i \pm \sqrt{6}\sqrt{i}}{2}$$

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\frac{pi}{2}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$$

$$\pm\sqrt{6}\sqrt{i} = \pm\sqrt{6}\left[\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i\right] = \pm\left(\sqrt{3} + \sqrt{3}i\right)$$

N.B.: uno dei due $\pm$ è ridondante

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} i$$

(c) Il sistema può essere risolto in due modi: ponendo $z = a + ib$ e $w = c + id$, oppure osservando le equazioni e provando a sostituire in modo "furbo".
Noto che nella prima equazione è presente w^2, mentre nella seconda è presente $\overline{w}^2$. Passo quindi al coniugato nella II e isolo w^2.

$$\begin{cases} \overline{z}^2 - 2w^2 + 2 = 0 \\ w^2 = \overline{z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \overline{z}^2 - 2\overline{z} + 2 = 0 \\ w^2 = \overline{z} \end{cases}$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

Risolvo ora la I per $\overline{z}$:

$$\overline{z} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$$

Da cui $z = -1 \mp i$ Ora ricavo w in entrambi i casi:

$$\begin{cases} \overline{z} = 1 - i \\ w^2 = \overline{z} \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} \overline{z} = 1 + i \\ w^2 = \overline{z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \overline{z} = 1 - i \\ w = \sqrt{\overline{z}} \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} \overline{z} = 1 + i \\ w = \sqrt{\overline{z}} \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$w = \sqrt{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[4]{2}e^{i\left(k\pi - \frac{\pi}{8}\right)} \quad \cup \quad w = \sqrt{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right)}$$

Esercizio 1.2. Calcolare $\inf, \sup, \min, \max$ delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \qquad D = \mathbb{R}$

(b) $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2} \qquad D = \mathbb{R}$

(c) $h(x) = \arccos x - \operatorname{arcsen} x \qquad D = [-1, 1]$

Soluzione (a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2$

Siccome è una potenza pari di un polinomio, $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, da cui $\inf_{\mathbb{R}} f \geq 0$. Inoltre $f(\pm 1) = 0$, quindi si ha

$$\inf_{\mathbb{R}} f = \min_{\mathbb{R}} f = 0$$

Ora dimostriamo che $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$, ovvero che $\forall M \geq 0 \exists x \in \mathbb{R} : f(x) > M$. Fissiamo $M > 0$ e cerchiamo $x \in \mathbb{R}$ tale che $(x^2-1)^2 > M$. Consideriamo $x \geq 1$.

$$x^2 > \sqrt{M} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > \sqrt{\sqrt{M} + 1}$$

Di conseguenza $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$ e $\nexists \max_{\mathbb{R}} f$

(b) $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Osservazione.

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 & se\ x \geq 0 \\ g(x) \leq 0 & se\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$g(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -g(x)$$

La funzione è dispari, quindi è simmetrica rispetto all'origine degli assi. Di conseguenza $\sup_{\mathbb{R}} f = \sup_{\mathbb{R}_{\geq 0}} f = -\inf_{\mathbb{R}} f = -\inf_{\mathbb{R}_{\leq 0}} f$

Come li troviamo (senza derivate)?

Sappianmo che $g(1) = \dfrac{1}{2}$, dobbiamo provare che $g(x) \leq \dfrac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{x + x^2 + 1 - x - x^2 - 1 + x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x-x^2+2x-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{(x-1)^2}{x^2+1} =$$

$$= 1 - \frac{x}{x^2+1} - \underbrace{\frac{(x-1)^2}{x^2+1}}_{\geq 0} \leq 1 - \frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{x}{x^2+1} \leq 1 - \frac{x}{x^2+1}$$

$$2\frac{x}{x^2+1} \leq 1$$

$$\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$$

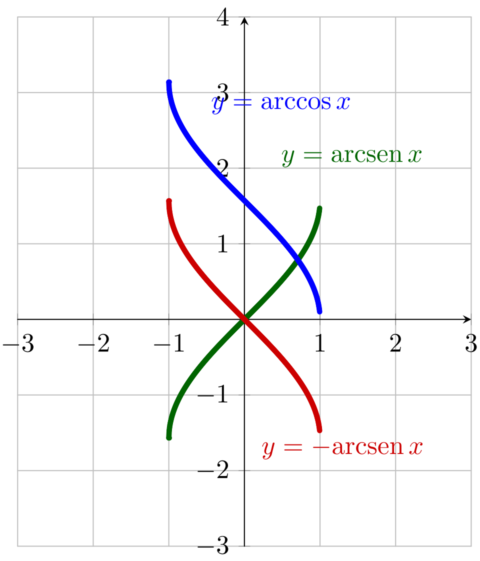

Figura 1

(c) Rappresentiamo la funzione $h(x) = \arccos x - \operatorname{arcsen} x$ (Figura 1)
Osserviamo che sia $\arccos x$ che $-\operatorname{arcsen} x$ hanno minimo in $x = 1$, quindi

$$\inf_D h = \min_D h = h(1) = \arccos 1 - \operatorname{arcsen} 1 = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

Infatti $\underbrace{\arccos x}_{\geq 0} \underbrace{- \underbrace{\operatorname{arcsen} x}_{\geq \frac{\pi}{2}}}_{\geq -\frac{\pi}{2}} \geq \frac{\pi}{2}$.

Analogamente si dimostra che $\sup_D h = \max_D h = \frac{3}{2}\pi$

DEF (Limite finito)**.** *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione e $x \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per D, allora*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \;\; \forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

Esercizio 1.3. Dimostrare i seguenti limiti

(a) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$

(b) $\lim_{x \to 0} \cos x = 0$

(c) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} = -4$

(d) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

i. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

ii. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Soluzione (a) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : |\operatorname{sen} x| < \varepsilon \;\; \forall x \in \,]-\delta, \delta[$.
Ricordiamo che per le proprietà del seno, $\forall x \in \mathbb{R}, |\operatorname{sen} x| \leq |x|$. Fisso ε e pongo $\delta = \varepsilon$. Siccome $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$, allora

$$|x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\operatorname{sen} x| \leq |x| < \delta = \varepsilon$$

(b) $\lim_{x \to 0} \cos x = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |\cos x - 1| > \varepsilon \; \forall x \in \,]\delta, \delta[$$

$$|\cos x - 1| = 1 - \cos x = 1 - \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} \leq 2\left|\frac{x}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}|x|^2$$

$$|\cos x - 1| \leq \frac{1}{2}|x|^2$$

Voglio avere $|\cos x - 1| < \varepsilon$, quindi pongo $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$, allora

$$|\cos x - 1| = \frac{1}{2}|x|^2 \leq \frac{1}{2}|\delta|^2 = \frac{1}{2}\sqrt{2\varepsilon}^2 = \varepsilon$$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} = -4$

Osservazione. *la funzione non è definita in $x = -1$, ma la definizione di limite non considera il valore della funzione in quel punto, quindi posso scomporre il denominatore e semplificare:*

$$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-3)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = \lim_{x\to -1} x - 3 = -4$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - 3 + 4| < \varepsilon \ \forall x \in \,]-1-\delta, -1+\delta[, x \neq -1$$

$$|x-1| \leq \varepsilon \quad \text{pongo } \delta = \varepsilon \quad |x-1| \leq \delta$$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Ricordando che $|\operatorname{sen} x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Consideriamo $x > 0$:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{x}{x} = 1$$

Consideriamo $x < 0$:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} \leq 1$$

$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$$

Considero ora il seguente grafico, in cui $PB = \operatorname{sen} x$, $PA = x$, $TA = \operatorname{tg} x$ per definizioni di seno, radiante e tangente.

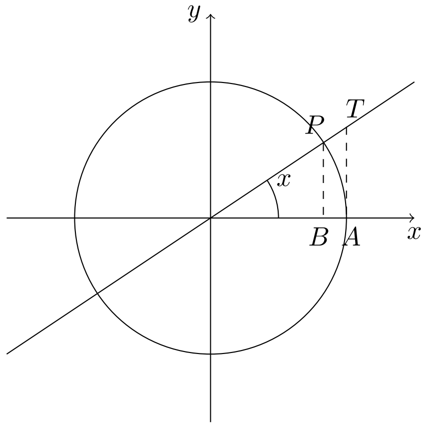

Figura 2

Considero $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (la dimostrazione si ripete analogamente per $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$). Si ha

$$0 \leq \operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x$$

$$\frac{\cancel{\operatorname{sen} x}}{\cancel{\operatorname{sen} x}} \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} = \cos x$$

Passo ai reciproci

$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 0} \cos x = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} 1 = 1 \end{array}\right\} \text{per il teorema del confronto } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

i. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$

ii. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(2\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\right)^2 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$