Esercitazione 5 - 17 Ottobre 2022

Esercizio 1

Dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a|<1 \\ 1 & a=1 \\ +\infty & a>1 \\ \nexists & a\leq -1 \end{cases}$

Se $a=1$, $a^n = 1 \ \forall n$. <u>Ok</u>

Se $a=-1$, $a^n = (-1)^n = \begin{cases} -1 & n \text{ dispari} \\ 1 & n \text{ pari} \end{cases}$

Quindi, $\forall \ell \in \mathbb{R}$, $\exists\, \varepsilon>0$, $\forall M>0$, $\exists\, \bar{n}>M$ $|a_n-\ell|>\varepsilon$.

Se $\ell>0$, scelgo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Fisso $M>0$.

Scelgo $\bar{n}>M$ dispari. Allora vale che

$|a_{\bar{n}} - \ell| = |\ell - 1| > 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$.

Caso $\ell=0$, $\ell<0$: <u>ESERCIZIO</u>

Se $a>1$, allora $a=1+b$, $b>0$.

Allora $a^n = (1+b)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1+nb \to +\infty$

Per il th. del confronto, $\lim_n a^n = +\infty$.

Se $a=0$. ok

Se $a \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow$

$\exists\, b>0$ t.c. $\frac{1}{a} = 1+b \Rightarrow$

$\left(\frac{1}{a}\right)^n = (1+b)^n \geq 1+nb \Rightarrow$

$a^n \leq \frac{1}{1+nb} \to 0$. $\Rightarrow \lim_n a^n = 0$

Se $a \in (-1,0)$ Oss che $\underset{0 \leftarrow}{-|a|^n} \leq a^n \leq \underset{\downarrow 0}{|a|^n}$

Concludiamo per il th. del confronto.

Se $a<-1$. **ESERCIZIO** (NB come $a=-1$)

Esercizio 2 $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Sia $a_n = \sqrt[n]{n}$, $b_n = \sqrt{a_n}$.

Poiché $a_n > 1 \ \forall n \implies b_n > 1 \ \forall n.$

$\implies \exists\, k_n > 0$ t.c. $b_n = 1 + k_n$

$\implies \sqrt{n} = b_n^n = (1+k_n)^n \geq 1 + n k_n$

$\implies k_n \leq \dfrac{\sqrt{n} - 1}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$

Quindi $k_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0.$

$\implies b_n^2 = a_n = (1+k_n)^2 \xrightarrow{n \to +\infty} 1.$

GERARCHIE DEGLI INFINITI

Esercizio 3 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = 0 \quad \forall a>1.$

$\sqrt{a} > 1 \implies \sqrt{a} = 1+k$

$(\sqrt{a})^n = (1+k)^n \geq 1+kn \geq kn$

$\implies a^n \geq k^2 n^2$

$\implies \frac{n}{a^n} \leq \frac{n}{k^2n^2} = \frac{1}{k^2 n} \to 0.$

Concludiamo per il th. del confronto.

Esercizio 4

Dimostriamo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{\alpha^n} = 0 \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 1$.

Se $\beta \leq 0$ è facile, ESERCIZIO.

Se $\beta > 0$, osserviamo una forma indeterminata.

Se $\beta = k \in \mathbb{N}_+$, allora

$$\frac{n^\beta}{\alpha^n} = \frac{n^k}{\alpha^n} = \left(\frac{n}{\sqrt[k]{\alpha^n}}\right)^k = \left(\frac{n}{(\sqrt[k]{\alpha})^n}\right)^k \longrightarrow 0$$

grazie all'es precedente.

Se invece $\beta \in \mathbb{R}^+$, allora sia $\beta \leq \lfloor \beta \rfloor + 1$

$$\Rightarrow \frac{n^\beta}{\alpha^n} \leq \frac{n^{\lfloor \beta \rfloor + 1}}{\alpha^n} \longrightarrow 0.$$

Esercizio 5 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\beta} = 1 \quad \forall \beta\in\mathbb{R}.$

Se $\beta = 0$ ok

Se $\beta\in\mathbb{N}_+$, $\sqrt[n]{n^\beta} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^\beta = \underline{\text{al limite } \beta \text{ volte } 1}$

Se $\beta\in\mathbb{R}_+$ ESERCIZIO

Se $\beta\in\mathbb{Z}_{<0}$, $\beta = -k$, $k>0$.

$\sqrt[n]{n^\beta} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^{-k} \to 1.$

Se $\beta\in\mathbb{R}_-$ ESERCIZIO

Esercizio 6

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(\log_b n)^\beta}{n^\alpha} = 0 \quad \forall b > 1, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$$

Se $\beta \leq 0$ ok

Se $\beta > 0$, sia $a_n = \log_b n \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$.

$$\Rightarrow \frac{(\log_b n)^\beta}{n^\alpha} = \frac{(\log_b n)^\beta}{(b^{\log_b n})^\alpha} =$$

$$= \frac{(\log_b n)^\beta}{(b^\alpha)^{\log_b n}} = \frac{a_n^\beta}{(b^\alpha)^{a_n}} \longrightarrow 0$$

Esercizio 7 $\quad \lim_n \frac{\alpha^n}{n!} = 0 \quad \forall \alpha > 0.$

Caso $0 < \alpha < 1$ ok

Sia $\alpha > 1$, oss. che

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\alpha}{n} \cdot \frac{\alpha}{n-1} \cdots \frac{\alpha}{3} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{1}$$

Poiché $\frac{\alpha}{n} \to 0$, $\exists\, \bar{n}$ tc $\frac{\alpha}{n} \le \frac{1}{2} \quad \forall n > \bar{n}$

Quindi, se $n > \bar{n}$, allora

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\alpha}{n} \frac{\alpha}{n-1} \cdots \frac{\alpha}{\bar{n}} \frac{\alpha}{\bar{n}-1} \cdots$$

$$0 \leftarrow \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-\bar{n}} \cdot \frac{\alpha^{\bar{n}}}{\bar{n}!} \longrightarrow 0.$$

costante $\quad > 0$

Esercizio 8 $\quad \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0.$

$$\frac{n!}{n^n} = 1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{n}$$

$$\le 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \to 0$$

LIMITI DI FUNZIONI

Esercizio 9

a) $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1}$ $\left[\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right]$

Oss. $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x+1})(x-1)} = \frac{1}{x-1}$

$\Rightarrow \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$

MORALE: SEMPLIFICARE!

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^5+7x^4-1}{2x^5+7}$ $\left[\begin{matrix}\infty\\\infty\end{matrix}\right]$

$$\frac{4x^5+7x^4-1}{2x^5+7} = \frac{4+\frac{7}{x}-\frac{1}{x^5}}{2+\frac{7}{x^5}} \to 2$$

MORALE: RACCOGLIERE IL TERMINE "DOMINANTE"

c) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2+x-2}$$

$$\frac{\sqrt{x-1}}{x^2+x-2} = \frac{\cancel{\sqrt{x}}\,\overbrace{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}^{\to 1}}{x^{\cancel{2}\,\frac{3}{2}}\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}_{\to 1}} \to 0$$

MORALE: RACCOGLIERE NON SOLO PEZZI POLINOMIALI

d) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}} \quad \left[\frac{0}{0}\right].$$

$$\frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}} = \frac{\cancel{3-\sqrt[4]{x}}}{\cancel{(3-\sqrt[4]{x})}(3+\sqrt[4]{x})} \longrightarrow \frac{1}{6}$$

SEMPLIFICARE NON SOLO POLINOMI

e) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}$$

Oss. $$\overbrace{-\frac{x}{1+x^2}}^{\to 0} \leq \frac{x\sin x}{1+x^2} \leq \overbrace{\frac{x}{1+x^2}}^{\to 0}.$$

MORALE: **il TH del confronto è utile.**

7) $$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - \sqrt{1+x}\right) \quad [\infty - \infty]$$

Oss. $$\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right) =$$

$$\sqrt{x}\, \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \cdot (x - x - 1) = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$$

$\to -\frac{1}{2}$ ESERCIZIO

MORALE: **"RAZIONALIZZARE LE RADICI"**

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1-e^x}$

$$\frac{x^2}{1-e^x} = -\overset{\to 1}{\frac{x}{e^x-1}} \cdot \overset{\to 0}{x} \longrightarrow 0$$

MORALE: RICONOSCERE I LIMITI NOTEVOLI

h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\log(x)}{e^x - e} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\log(y+1)}{e^{y+1}-e}$

$x - 1 = y$

$$= \lim_{y \to 0} \underbrace{\frac{\log(y+1)}{y}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{e} \cdot \overset{\to 1}{\frac{y}{e^y - 1}} = \frac{1}{e}$$

MORALE: CAMBI DI VARIABILE INTELLIGENTI!

i) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\log(\log(x))}{\log(x)}$ $\frac{\to -\infty}{\to 0^+}$ $\to -\infty$

MORALE: NON TUTTI I LIMITI SONO F.I.

j) $\lim_{x\to a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x-a}$

$$\frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x-a} = \frac{\sin x - \sin a}{x-a}\left(\sin x + \sin a\right) \quad \to 2\sin a$$

MEMO: FORMULE DI PROSTAFERESI

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x - \sin\alpha}{x-\alpha} = 2\,\frac{\sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}{x-\alpha}\cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) \quad \to \cos a$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\left(\sin x + \sin a\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right), \quad \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \to 1$$

$$= 2\sin a\cos a = \sin 2a$$

MORALE: USARE UN PO' DI TRIGONOMETRIA.