Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – a.a. 2022–2023
Note esercitazione

Esercitatore: Simone Verzellesi*

14 Novembre 2022

Esercizio 8.1. Calcolare i seguenti limiti con il teorema di de l'Hôpital:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\cos^3 x - 1}{\log(1+2x)\cosh(x^3)}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\log(\log(x+1))}{\log x}$

Soluzione

(a) Verifichiamo le ipotesi:

- $f(x) = \cos^3 x - 1 \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$
- $g(x) = \log(1+2x)\cosh(x^3) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$
- $g'(x) = \dfrac{2}{1+2x}\cosh x^3 + 3x^2 \sinh x^3 \log(1+2x)$. Siccome $g(0) = 2$, per il teorema della permanenza del segno $\exists b \in \mathbb{R}_{>0} : \forall x \in]0, b[, g'(x) > 0$

È quindi possibile applicare il teorema di de l'Hôpital

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\cos^3 x - 1}{\log(1+2x)\cosh(x^3)} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{-3\operatorname{sen} x \cos^2 x}{\frac{2}{1+2x}\cosh x^3 + 3x^2 \sinh x^3 \log(1+2x)} = 0$$

(b) Verifichiamo le ipotesi:

- $f(x) = \log(\log(x+1)) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$
- $g(x) = \log x \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$
- $g'(x) \neq 0$ in un intorno destro di 0, infatti $g'(x) = \dfrac{1}{x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\log(\log(x+1))}{\log x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{\log(x+1)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x+1}\cdot\underbrace{\frac{x}{\log(1+x)}}_{\to1}$$

Esercizio 8.2. Calcolare il polinomio di Taylor con resto di Peano di

(a) $\log x$ di ordine 3 in $x_0 = 2$

(b) $\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x) + \log(1 + \operatorname{arctg} x)$ di ordine 3 in $x_0 = 0$

Soluzione

(a) Abbiamo due modi: il primo applicando la formula di Taylor mentre il secondo cercando di ricondurci agli sviluppi noti.

Modo 1:

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x} \qquad f^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f^{(3)}(x) = +\frac{2}{x^3}$$

*Trascrizione a cura di Davide Borra

$$\begin{aligned}\log x &= \log 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{4\cdot 2!}(x-2)^2 + \frac{1}{4\cdot 3!}(x-2)^3 + o((x-2)^3) = \\ &= \log(2) + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 + o((x-2)^3) = \\ &= \log 2 - \frac{11}{16} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o((x-2)^3)\end{aligned}$$

Modo 2:

$$f(x) = \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

Devo riuscire a ricondurmici:

$$\log(x) = \log(\frac{x}{2}\cdot 2) = \log 2 + \log\frac{x}{2} = \log 2 + \log\Big(1 + \Big(\frac{x}{2} - 1\Big)\Big)$$

Da cui

$$\log x = \log 2 + \Big(\frac{x}{2} - 1\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{2} - 1\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{x}{2} - 1\Big)^3 + o\left(\Big(\frac{x}{2} - 1\Big)^3\right)$$

(b) Poniamo $t = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{arctg}(x)$. In un intorno di 0, sia $\operatorname{tg} x$ che $\operatorname{arctg} x$ tendono a 0, quindi anche t e y. Utilizzando gli sviluppi fondamentali

$$\operatorname{sen} t + \log(1+y) = \left[t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right] + \left[y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)\right]$$

Adesso sviluppiamo anche t e y:

$$t = \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad y = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}&\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x) + \log(1 + \operatorname{arctg} x) = \\ &= \left[\Big(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big) - \frac{\big(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\big)^3}{6} + o\left(\Big(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big)^3\right)\right] + \\ &+ \left[\Big(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big) - \frac{\big(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\big)^2}{2} + \frac{\big(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\big)^3}{3} + o\left(\Big(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big)^3\right)\right] = \\ &= 2x + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\end{aligned}$$

Esercizio 8.3. Calcolare i seguenti limiti utilizzando gli sviluppi di Taylor:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - \log(1-x)}{\operatorname{tg} x - x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen}^2\sqrt{x} - \operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

Soluzione

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad\Rightarrow\quad e^{x^2} = 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2!} + o(x^4)$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$

Per eliminare la forma indeterminata espando fino al quarto ordine:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{\big(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4)\big) - \big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\big) - \frac{3}{2}x^2}{x^4} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{11}{24}\cdot\frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} + \cancel{\frac{o(x^4)}{x^4}} = \frac{11}{24}\end{aligned}$$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - \log(1-x)}{\operatorname{tg} x - x}$

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\log(1 + (-x)) = -x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ Sostituisco gli sviluppi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \log(1-x)}{\operatorname{tg} x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x + o(x) - 1 - (-x + o(x)))}{(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + o(x)}{x^3 + o(x^3)} = +\infty$$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen}^2 \sqrt{x} - \operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

Proviamo a sviluppare al primo ordine: $\operatorname{sen} x = x + o(x) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} \sqrt{x} = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - (\sqrt{x} + o(\sqrt{x}))^2 - (x + o(x))^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^2} = ?$$

Il primo ordine non è sufficiente: $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} \sqrt{x} = \sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{x^3}}{3!} + o(x^{\frac{3}{2}})$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen}^2 \sqrt{x} - \operatorname{sen}^2 x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x^3}}{3!} + o(x^{\frac{3}{2}})\right)^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x)\right)^2}{x^2} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x + \frac{\sqrt{x^6}}{36} - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36} + o(x^6)\right)}{x^2} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{3} - x^2 + \overbrace{\frac{x^3}{36} + o(x^3)}^{o(x^2)}}{x^2} = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Esercizio 8.4. Dimostrare che $\operatorname{sen} \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$

Soluzione Sviluppiamo con il polinomio di Taylor con resto di Lagrange

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\operatorname{sen}^{(4)}(c)}{4!} x^4 \quad (\text{con } c \in \left[0, \frac{1}{n}\right])$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \underbrace{\frac{\operatorname{sen}^{(4)}(c)}{n^4 4!}}_{>0} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}$$

Basta quindi dimostrare che

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} > \frac{1}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad 6n^2 - n - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{12} = \langle\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{smallmatrix}$$

$$\begin{cases} n < -\dfrac{1}{3} \vee n > \dfrac{1}{2} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow n \geq 1$$

QED

Esercizio 8.5. Calcolare $\sqrt{e}$ con 4 cifre decimali di precisione.

Soluzione Sappiamo che

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

dove e^c è la derivata $n+1$-esima di e^x calcolata in $x = c$. In particolare

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \tag{1}$$

Adesso dobbiamo stabilire per quale valore di n l'errore non influenza le prime 4 cifre del risultato. Osserviamo che $e < 3$ e $c < \frac{1}{2}$ quindi $e^c < \sqrt{3} < 2$:

$$\frac{e^c}{(n+1)!2^{n+1}} < \frac{2}{(n+1)} = \frac{1}{2^n(n+1)!} < \frac{1}{10^5}$$

$$10^5 < (n+1)!2^n \quad \Rightarrow \quad n \geq 6$$

Sostituendo ora n nella (1) si ricava il valore cercato

Esercizio 8.6. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2+\alpha}{1-\alpha}\right)^n$ converge e determinarne il valore.

Soluzione Osserviamo che si tratta di una serie geometrica di ragione $q := \frac{2+\alpha}{1-\alpha}$. Quindi $\displaystyle\sum_n q^n$ è

- convergente se $|q| < 1$
- divergente se $q \geq 1$
- indeterminata se $q \leq -1$

Si tratta quindi di risolvere $\left|\frac{2+\alpha}{1-\alpha}\right| < 1$ e si ottiene che la serie è

- convergente se $\alpha < -\frac{1}{2}$
- divergente se $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$
- indeterminata se $\alpha > 1$

Inoltre se la serie converge

$$\sum_{n=0}^{+\infty} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{2+\alpha}{1-\alpha}} = \frac{\alpha-1}{2\alpha+1}$$

Esercizio 8.7. Calcolare

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Soluzione

- Cerchiamo di riscrivere la serie per ricondurci a qualcosa di noto

$$a_n := \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1=!} = \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{(n+1)}n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right)$$

Si nota quindi che si tratta di una serie telescopica, per cui si ha che

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(N+1)!}$$

Da cui

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1 \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{(N+1)!} = 1$$

- Cerchiamo di riscrivere la serie per ricondurci a qualcosa di noto

$$a_n := \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2)A + nB}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Di conseguenza riscrivo la serie e mi accorgo che si tratta di una serie telescopica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+1)} \right) = \frac{1}{4} - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$