

Esercizi paradigma 4: “Proprietà globali di funzioni reali di variabile reale... e i primi passi con i limiti”

(3 - 7 ottobre 2022)

4.1) i) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Scrivete la definizione di

a) maggiorante di f b) estremo superiore di f c) massimo di f .

ii) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + 1 & \text{se } x \leq -1 \\ -x^3 & \text{se } -1 < x < 1 \\ -2^{-x} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Usando la rappresentazione grafica di f ,

a) determinate l'insieme dei maggioranti di f e l'insieme dei minoranti di f .

b) determinate $\inf_{\mathbb{R}} f$ e $\sup_{\mathbb{R}} f$. Essi sono massimo e minimo, rispettivamente?

4.2) Trovate una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che sia

i) strettamente crescente e non suriettiva;

ii) iniettiva e non monotona.

4.3) i) Provate che la successione di termine $a_n = \frac{n^2 - 1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ è strettamente crescente (ossia, per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ si ha $a_n < a_{n+1}$).

ii) Le successioni di termini $b_n = \log(a_n + 1)$ e $c_n = -\sqrt[3]{a_n}$ sono strettamente crescenti?

4.4) Dimostrate che la funzione $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ è strettamente decrescente su ciascuno degli intervalli

i) $]-\infty, -2[$; ii) $]-2, 2[$; iii) $]2, +\infty[$.

4.5) Siano $f, g : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definite da $f(x) = [x^2]$ e $g(x) = x^2 - f(x)$.

i) Rappresentate il grafico di f e quello di g .

ii) Determinate il massimo intervallo $A \subseteq [-2, 2]$ contenente $\frac{1}{2}$ e tale che $f|_A$ risulti crescente.

iii) Determinate il massimo intervallo $B \subseteq [-2, 2]$ contenente $\frac{1}{2}$ e tale che $g|_B$ risulti crescente.

iv) Determinate l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f su $[-2, 2]$ e quelli di g su $[-2, 2]$.

v) Individuate i punti di massimo e i punti di minimo sia di f sia di g .

4.6) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Determinate quali delle seguenti implicazioni sono vere?

i) Se f e g sono pari, allora il loro prodotto è una funzione pari.

ii) Se f e g sono periodiche, allora il loro prodotto è una funzione periodica.

iii) Se f e g sono monotone, allora il prodotto è una funzione monotona.

iv) Se f e g non sono limitate, allora il loro prodotto è una funzione non limitata.

4.7) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Determinate quali delle seguenti implicazioni sono vere?

i) Se f e g sono dispari, allora $f \circ g$ è una funzione dispari.

ii) Se f e g sono periodiche, allora $f \circ g$ è una funzione periodica.

iii) Se f e g sono monotone, allora $f \circ g$ è una funzione monotona.

iv) Se f e g non sono limitate, allora $f \circ g$ è una funzione non limitata.

4.8) Scrivete, in matematica (usando $\forall \varepsilon > 0, \dots$ oppure $\forall M > 0, \dots$), la definizione di

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2; \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

4.9) Provate, usando la definizione di limite, che $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x+1} = 3$.

4.10) Calcolate, se esistono, i seguenti limiti (usate il fatto che $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$):

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3x + 1); \quad \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x^3} + 2\sqrt[3]{x} \right); \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{x^2 + \sin \pi}{\sqrt[4]{x}} \right); \\ \text{ii)} \quad & \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x^2 - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2^{-1}}{x^3 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin 1}{|x| - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin 1}{|x| - 1}; \\ \text{iii)} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{3x}{x^2 + 1} \right); \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x - 3}{1 - x^4}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

4.11) Calcolate i seguenti limiti di funzioni razionali (Attenzione: se i limiti si presentano come forme indeterminate, dovete 'trasformarli opportunamente' per 'uscire' dalle forme indeterminate):

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 - x - 3}; \quad \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x^2 - 2}{\frac{1}{5x}}; \quad \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1}; \quad \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 5}{(x - 2)^2}; \\ \text{e)} \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 1}{x^2 - 1}; \quad \text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - x - 2}; \quad \text{g)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 + 2x^2}{x^7}; \quad \text{h)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - \frac{1}{2x^3}}{2x^4 + 5}. \end{aligned}$$

4.12) Calcolate i seguenti limiti di funzioni irrazionali (usate il fatto che $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$).

Attenzione: se i limiti si presentano come forme indeterminate, dovete 'trasformarli opportunamente' per 'uscire' dalle forme indeterminate):

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}; \quad \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}); \quad \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x+2}} \sqrt{x^2 + x + 1}; \quad \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+16} - 4}{|x|}; \\ \text{e)} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}}; \quad \text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1}}; \quad \text{g)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1}. \end{aligned}$$

4.13) Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ due successioni a termini reali positivi. Provate con esempi che

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0 \text{ non implica } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0; \\ \text{b)} \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \text{ non implica } \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0. \end{aligned}$$

4.14) Trovate due successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ a valori reali tali che

- i) $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow +\infty$ e la successione $(a_n b_n)_n$ abbia limite finito (analogamente, abbia limite $+\infty$, oppure $-\infty$, oppure non abbia limite);
- ii) $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ e la successione $\left(\frac{a_n}{b_n} \right)_n$ abbia limite finito (analogamente, abbia limite $+\infty$, oppure $-\infty$, oppure non abbia limite).