Università degli Studi di Trento - Corso di Laurea Triennale in Matematica

Programma di ANALISI MATEMATICA A - a.a. 2022/23 - 15 CFU

docente: Prof.ssa Anneliese Defranceschi
e-mail: anneliese.defranceschi@unitn.it
homepage: http://latemar.science.unitn.it/defranceschi

Periodo: Primo semestre 12/09/22-22/12/22 - Secondo Semestre 27/02/23-09/06/23

Le indicazioni dei capitoli e dei paragrafi si riferiscono al libro:

C.D. Pagani, S. Salsa: Analisi Matematica 1. Zanichelli, 2015.

Altri testi consigliati per il MOD1 e parzialmente per il MOD2: M. Bertsch, A. Dall'Aglio, L. Giacomelli: Epsilon 1. Primo corso di Analisi Matematica. Mc Graw Hill 2021.

C. Canuto, A. Tabacco: Analisi Matematica 1. Pearson 2021.

Per alcuni argomenti non svolti nel volume indicato sopra, le indicazioni si riferiscono ai libri:

M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa: Analisi Matematica 2. Zanichelli, 2010.
C.D. Pagani, S. Salsa: Analisi Matematica 2. Zanichelli, 2016.

L'ordine di elencazione è tematica e non corrisponde necessariamente all'ordine con cui gli argomenti vengono svolti a lezione.

Elementi di teoria degli insiemi - Cap. 1   Par. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

1: *Nozioni di logica matematica.* Proposizioni. Connettivi logici. Predicati. Quantificatori.
2: *Simboli e operazioni insiemistiche fondamentali.* Unione, intersezione, differenza e differenza simmetrica. Complementare.
3: *Relazioni.* Prodotto cartesiano. Ordinamenti: definizioni di maggiorante, minorante, massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore.
4: *Funzioni.* Nozione intuitiva di funzione. Dominio, codominio, immagine. Funzioni particolari. Funzioni composte. Funzioni iniettive e suriettive. Funzioni inverse.
5: *Il principio di induzione.* Disuguaglianza di Bernoulli.
6: *Cenni di calcolo combinatorio* Formula del binomio di Newton.

Insiemi numerici - Cap. 2   Par. 1, 2, 3, 4

1: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. I numeri naturali, i numeri interi relativi e i numeri razionali. Struttura di $\mathbb{Q}$ e rappresentazione dei numeri razionali.
2: *I numeri reali.* Cenni sulla definizione di numero reale come allineamento decimale. Ordinamento e struttura algebrica. Proprietà di completezza.
3: *Radicali, potenze e logaritmi.* Radici n-esime aritmetiche. Potenze con esponente reale e logaritmi. Disuguaglianza triangolare.
4: *I numeri complessi.* Operazioni e struttura di campo. Forma algebrica. Coniugato, modulo e argomento. Forma trigonometrica ed esponenziale. **Potenze e radici**.

Spazi euclidei - Cap. 3   Par. 1, 2

1: *Gli spazi euclidei $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$.* Spazi vettoriali lineari. Base e dimensione di uno spazio. Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$, norma in $\mathbb{R}^n$. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Angolo fra due vettori. Distanza in $\mathbb{R}^n$. Intorni sferici (circolari) di un punto in $\mathbb{R}^n$.

2: *Elementi di topologia in* $\mathbb{R}^n$. Punti interni, esterni e di frontiera. Punti di accumulazione e punti isolati. Insiemi aperti, chiusi e limitati. Unione e intersezione di famiglie di insiemi aperti e chiusi. Frontiera di un insieme. Chiusura di un insieme. **Teorema di Bolzano-Weierstrass** (Da ogni successione limitata in $\mathbb{R}^n$ si può estrarre una sottosuccessione convergente). Insiemi compatti. **Teorema di Heine-Borel** (Caratterizzazione degli insiemi chiusi e compatti utilizzando le successioni). Insiemi connessi per poligonali e insiemi convessi.

L'operazione di limite - Cap. 4 Par. 1, 2, 3, 4

1: *Funzioni reali di variabile reale.* Positività e simmetrie. Funzioni pari e dispari. Funzioni limitate. Estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo (assoluto/locale) di una funzione. Funzioni monotone. Esempi: potenze, esponenziali e logaritmi.

2: *Limiti di funzioni da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$. Definizione di limite. Proprietà vere definitivamente. Limiti destro e sinistro. Limiti e ordinamento. Teorema di permanenza del segno. Teorema del confronto (dei "due carabinieri"). Algebra dei limiti. Esempi di non esistenza del limite. Esistenza del limite di una funzione composta. **Teorema di esistenza del limite per funzioni monotone.** Infinitesimi e infiniti. I simboli o, $\sim$, loro relazioni. Confronti fra infinitesimi e infiniti. Asintoti.

3: *Successioni a valori in* $\mathbb{R}$. Limite di una successione. Esempi: successione geometrica. Relazione fra limite di successioni e limite di funzioni. Il numero e. Alcuni limiti notevoli.
Esistenza del limite. Massimo limite, minimo limite e valore limite di una successione.
Esistenza del limite finito: criterio di Cauchy. Definizione di successione fondamentale. **Teorema: criterio di convergenza di Cauchy.**

4: *Limiti in* $\mathbb{C}$ *e limiti in* $\mathbb{R}^n$. Funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ e loro limiti. Esempi di non esistenza del limite. Le successioni convergenti sono limitate.

Funzioni continue - Cap. 5 Par. 1, 2, 3

1: *Funzioni continue da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$. Definizione di continuità. Continuità di $f+g$, $f \cdot g$, $1/f$, $|f|$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$. Continuità delle funzioni composte. Punti di discontinuità. Possibili discontinuità di una funzione monotona.
Proprietà delle funzioni continue su un intervallo. Teorema della permanenza del segno. **Teorema di esistenza degli zeri**. **Teorema dei valori intermedi**. **Teorema (di Weierstrass) di esistenza del massimo e del minimo di una funzione continua su un intervallo [a,b]**. La nozione di uniforme continuità. Esempi di funzioni continue non uniformemente continue.

2: *Funzioni continue da* $\mathbb{R}^n$ *a* $\mathbb{R}^m$. Caratterizzazione della continuà mediante controimmagine degli aperti (chiusi). Continuità delle funzioni lineari.
Funzioni continue su un compatto. L' immagine continua di un insieme compatto è un insieme compatto. Teorema (di Weierstrass) di esistenza del massimo e minimo. **Teorema (di Heine-Cantor) di uniforme continuità di una funzione continua su un compatto**.
Monotonia ed invertibilità. Continuità della funzione inversa di una funzione continua su un intervallo.

3: *Funzioni elementari.* Polinomi. Funzioni razionali, funzioni algebriche. Esponenziali e logaritmi. Funzioni iperboliche. Funzioni circolari (o trigonometriche) e loro inverse. Esponenziale complesso.

Calcolo differenziale 1. Funzioni reali di variabile reale - Cap. 6 Par. 1, 2, 3

1: *Derivata e differenziale.* Rapporto incrementale e suo significato geometrico. Definizione di derivata e di funzione derivabile. Retta tangente. Continuità delle funzioni derivabili. Esempi di funzioni continue e non derivabili. Punti angolosi, punti con tangente verticale e cuspidi. Derivate successive.
Algebra delle derivate. Linearità della derivata. Derivata delle funzioni elementari. Derivata di funzione composta. Derivata di funzione inversa.
Il differenziale.

2: *I teoremi fondamentali del calcolo differenziale.* Punto critico. Il **teorema di Fermat** e gli estremi locali di una funzione. **I teoremi di Rolle e di Cauchy. Il teorema di Lagrange**. Conseguenze del teorema di Lagrange: test di monotonia, riconoscimento della natura dei punti stazionari. Il teorema di de l'Hôpital.

La formula di Taylor con il resto di Peano, di Lagrange e con resto in forma integrale. Sviluppi di Mac Laurin di alcune funzioni elementari.

3: *Applicazioni del calcolo differenziale.* Funzioni convesse e concave. Punto di flesso.
Determinazione del grafico di una funzione.
Applicazioni della formula di Taylor: determinazione della natura dei punti stazionari; calcolo di ordini di infinito o infinitesimo; calcolo del valore approssimato di una funzione e stima dell'errore.

Calcolo differenziale 2. Funzioni reali di più variabili - Cap. 7 Par. 1, 2, 3

1: *Funzioni da* $\mathbb{R}^n$ *a* $\mathbb{R}$. Derivate direzionali e derivate parziali. Gradiente. Differenziale e funzioni differenziabili. Relazione fra derivabilità e differenziabilità. **Teorema di continuità e derivabilità delle funzioni differenziabili**.
Teorema (del differenziale totale): se f è di classe C^1 **in un aperto** $A \subset \mathbb{R}^n$**, allora è differenziabile in ogni punto di** A.
Derivate di ordine superiore. Teorema (di Schwarz) di uguaglianza delle derivate seconde miste. Matrice Hessiana.
Formula di Taylor.

2: *Funzioni a valori vettoriali.* Matrice Jacobiana. Esempi. Funzioni: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Curve e curve regolari. La retta tangente al supporto di una curva. Funzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Piano tangente ad una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$.
Differenziabilità di funzioni composte. La regola della catena: Jacobiano di una funzione composta.

3: *Funzioni implicite.* Esempi di funzioni definite implicitamente. **Il teorema del Dini in** $\mathbb{R}^2$. Insiemi di livello e punti singolari. Ortogonalità di gradiente e linee di livello. Il teorema delle funzioni implicite in più di due variabili. Funzioni definite da un sistema di equazioni. L'analogo non lineare del teorema di Rouchè-Capelli.
Il teorema di inversione locale.

Integrali di funzioni di una variabile. Serie numeriche - Cap. 8 Par. 1, 2, 3

1: *Integrale di Riemann.* Partizione di un intervallo, somme superiori, somme inferiori e definizione di integrale. Caratterizzazione dell'ntegrale e significato geometrico. Classi di funzioni integrabili. **Teorema: Integrabilità delle funzioni continue**. Proprietà dell'integrale: linearità, monotonia, additività rispetto allintervallo di integrazione. **Teorema della media integrale**. Definizione di primitiva e proprietà. **Primo teorema fondamentale del calcolo integrale (o teorema di Torricelli-Barrow): calcolo dell'integrale per variazione di una primitiva**.
Funzione integrale. **Secondo teorema (o Il teorema) fondamentale del calcolo integrale**. Primitive e integrale indefinito. Tabella delle primitive.
Metodi di integrazione: integrazione per scomposizione, per parti e per sostituzione; integrazione di alcune funzioni razionali semplici.
Integrali dipendenti da un parametro. Continuità e formula di derivazione sotto il segno di integrale.

2: *Serie numeriche.* Definizione di serie e di somma di una serie. Serie convergenti, divergenti e irregolari. Proprietà elementari. Esempi di serie convergenti e divergenti: serie geometrica, serie telescopica, serie armonica e serie armonica generalizzata. Criterio di Cauchy di convergenza. Condizione necessaria di convergenza di una serie.
Serie a termini non negativi. Criterio del rapporto e della radice n-esima. **Criterio del confronto e del confronto asintotico**.
Convergenza e convergenza assoluta. Riordinamento di una serie. Teorema: se una serie è assolutamente convergente allora ogni suo riordinamento è convergente e ha la stessa somma.
Serie a segno alterno. Criterio di Leibniz di convergenza.
Serie di potenze. Serie di potenze e serie riconducibili a serie di potenze. Raggio di convergenza. Serie di Taylor.

3: *Estensioni dell'integrale di Riemann.* Integrali impropri: integrazione su insiemi illimitati e integrazione di funzioni illimitate.
Criteri di convergenza. Criterio del confronto e del confronto asintotico.
Serie numeriche e integrali impropri.

Equazioni differenziali Gli argomenti di questo capitolo si possono trovare in molti testi. Per esempio in

M. Bertsch, A. Dall'Aglio, L. Giacomelli: Epsilon 1. Primo corso di Analisi Matematica. Mc Graw Hill 2021.

M. Bramanti, C. Pagani, S. Salsa: Analisi Matematica 2. Zanichelli, 2010.

C. Canuto, A. Tabacco: Analisi Matematica 1. Pearson 2021.

Modelli differenziali.

a) *Equazioni differenziali ordinarie (di ordine n) del primo ordine.* Definizione di soluzione. Problema di Cauchy. Integrale generale.
Equazioni a variabili separabili.
Equazioni lineari del primo ordine. Integrale generale.

b) *Equazioni lineari del secondo ordine.* Forma generale dellequazione e problema di Cauchy. Struttura dellintegrale generale nel caso di unequazione omogenea o non omogenea. Equazioni omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti. Equazione caratteristica. Metodo della variazione delle costanti. Metodo di similarità.

Massimi e minimi per funzioni di più variabili Gli argomenti di questo capitolo si possono trovare in molti testi. Per esempio in

C.D. Pagani, S. Salsa. Analisi Matematica 2, Zanichelli, Cap. 2

M. Bertsch, A. Dall'Aglio, L. Giacomelli: Epsilon 1. Primo corso di Analisi Matematica. Mc Graw Hill 2021.

Definizione di massimo/minimo locale. Estremi liberi. Condizioni necessarie. Punti stazionari e Teorema di Fermat in più variabili.
Forme quadratiche. Forme quadratiche definite positive o negative; forme quadratiche indefinite; forme quadratiche semidefinite. Massimo di una forma quadratica sul cerchio unitario.
Condizioni sufficienti per esistenza di un estremo libero. Formula di Taylor e studio della natura di un punto stazionario.
Estremi vincolati. Vincoli di uguaglianza in due variabili. Punto critico condizionato al vincolo $g(x, y) = 0$.

Esercizi: MOD1

- Estremo superiore/inferiore di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e di funzioni a valori reali
- Iniettvità/suriettività di funzioni di variabile reale. Funzione inversa e funzione composta
- Principio di induzione
- Numeri complessi: calcoli algebrici, risoluzione di equazioni in $\mathbb{C}$, radici n-esime e potenze. Rappresentazione grafica di semplici regioni del piano complesso individuate da equazioni o disequazioni
- Limiti di funzioni. Ordine di infinitesimo o di infinito. Comportamento asintotico
- Teorema degli zeri o del valor intermedio: esistenza di soluzioni di equazioni
- Continuità e derivabilità. Punti di non continuità e di non derivabilità. Derivate delle funzioni elementari. Equazione retta tangente/normale al grafico di una funzione in un punto del suo grafico
- Max/min di una funzione (uso del teorema di Fermat e i test di monotonia per trovare punti di massimo/minimo locale di una funzione e per determinarne la natura). Studio di funzioni o di una famiglia di funzioni di variabile reale dipendente da un parametro
- Studio del carattere di una serie (convergenza o non convergenza) usando i criteri di convergenza
- Limiti usando de l'Hôpital e gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari
- Integrali. Integrali definiti o primitive di funzioni elementari con luso, se necessarie, delle formule di integrazione per parti, per sostituzioni. Integrale di funzioni razionali semplici
- Area di semplici regioni piane.
- Andamento e rappresentazione grafica di semplici funzioni integrali
- Integrali impropri. Studio della convergenza di un integrale improprio usando i criteri di convergenza

- Equazioni differenziali. Problema di Cauchy

Esercizi: MOD2

- Riconoscere se un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2$) è aperto, è chiuso. Individuare eventuali punti di frontiera, punti di accumulazione
- Individuare se un insieme è convesso, connesso per poligonali, compatto, limitato
- Domini, curve di livello per funzioni in più variabili
- Limiti e continuit per funzioni in più variabili
- Derivate parziali, differenziale, piano tangente
- Calcolo infinitesimale per funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$
- Polinomio di Taylor per funzioni in più variabili
- Massimi/minimi per funzioni in più variabili
- Teorema del Dini; retta tangente al grafico di una funzione definita implicitamente; il suo polinomio di Taylor
- Massimi/minimi vincolati per funzioni in più variabili