Syllabus ANALISI MATEMATICA A a.a. 2022/23 (versione italiana)

MOD_1

Obiettivi e risultati di apprendimento attesi

Essi possono essere riassunti come segue:
- Conoscenza e capacità di comprensione
- Capacità di applicare conoscenza e comprensione
- Autonomia di giudizio
- Abilità comunicative
- Capacità di apprendimento

In particolare, gli/le studenti/esse devono :
- raggiungere una conoscenza approfondita degli argomenti di base dell'Analisi matematica, come il calcolo differenziale e integrale per le funzioni di una variabile reale, e acquisire la capacità di utilizzare un linguaggio matematico corretto sia nello svolgimento di esercizi che nell'esposizione di dimostrazioni.
- acquisire capacità di ragionamento induttivo e deduttivo e la capacità di schematizzare in termini rigosi semplici problemi derivanti dalla fisica e geometria.
- essere in grado di riconoscere la correttezza di semplici dimostrazioni e di produrre semplici dimostrazioni; essere in grado di individuare i metodi più appropriati per analizzare ed affrontare problemi risolvibili con le tecniche acquisiti.
- essere in grado di esporre argomenti legati all'Analisi matematica con un linguaggio corretto.
- essere in grado di acquisire autonomamente e gestire nuove informazioni inerenti a tecniche e problemi legati all'Analisi Matematica.

Prerequisiti

Geometria euclidea piana e spaziale. Elementi di geometria analitica: equazioni di rette e piani.
I polinomi. Operazioni con i polinomi. Funzioni elementari e i loro grafici: potenze, esponenziali e logaritmi.
Trigonometria piana: funzioni seno, coseno e tangente e i loro grafici
(vedi, per esempio, F.G. Alessio,C. de Fabritiis, C. Marcelli, P. Montecchiari: "Matematica zero. Per i precorsi e i test di ingresso a Ingegneria e Scienze", Pearson 2016).

Contenuti/programma del corso

Il programma dettagliato del corso è disponibile sulla pagina web del corso all'indirizzo http://latemar.science.unitn.it/defranceschi

Logica e Insiemistica. Proposizioni, predicati, connettivi logici. Quantificatori. Terminologia sugli insiemi. Insiemi numerici.
Numeri reali. Ordinamento e non-numerabilità. Maggiorante, minorante, massimo, minimo. Estremo superiore/inferiore. La completezza dei numeri reali.
Il principio di induzione.
Numeri complessi: forma algebrica, trigonometrica e esponenziale. Potenze e radici complesse.
Funzioni generiche e funzioni reali di una variabile reale. Funzione, dominio, immagine, grafico.
Funzioni reali di una variabile reale e alcune proprietà (monotonia, simmetria, periodicità). Funzioni elementari e loro grafici. Funzioni limitate, estremo superiore/inferiore, massimo/minimo. Funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva. Funzione restrizione e funzione composta. Funzione inversa e il suo grafico. Operazioni con le funzioni. Trasformazioni. Equazioni e disequazioni: metodo grafico.

Studio di proprietà locali di funzioni reali di una variabile reale.
Limite. Limite di una funzione e di una successione. Proprietà elementari dei limiti. Limite di funzioni monotone. Convergenza e limitatezza. Teorema di permanenza del segno. Teorema del confronto. Funzioni infinitesime e infinite. Limiti notevoli. Infiniti, infinitesimi e confronti. Il simbolo o(.) e il simbolo ~. Asintoti.
Continuità. Definizione e proprietà elementari. Punti di discontinuità. Teorema di esistenza degli zeri e teorema dei valori intermedi. Continuità delle funzioni inverse. Teorema di Weierstrass.
Calcolo differenziale. Retta tangente; derivata. Derivata destra e sinistra; punti di non derivabilità. Derivabilità e continuità. Regole di derivazione. Derivate delle funzioni elementari. Derivazione della funzione composta e della funzione inversa. Estremi locali. Teorema di Fermat. Teorema di Rolle e il teorema del valor medio (di Lagrange) e applicazioni. Monotonia e derivata. Teorema di Cauchy. Teorema di de l'Hopital. Derivate successive. Convessità/concavità e derivata seconda. Studio di funzione. Polinomio di Taylor. Formula di Taylor con resto di Peano (con resto di Lagrange, con resto integrale) e sue applicazioni.

Serie numeriche. Successioni e sommatorie. Serie numeriche e proprietà elementari. Serie geometrica, serie armonica e serie armonica generalizzate. Condizioni necessarie di convergenza di una serie.
Serie numeriche a termini positivi. Criterio di convergenza: criterio del confronto, del confronto asintotico, della radice e del rapporto.
Serie a termini di segno variabile. Convergenza assoluta, criterio della convergenza assoluta.
Serie a termine di segno alterno. Criterio di Leibniz.
Serie di funzioni. Convergenza puntuale.
Serie di potenze e raggio di convergenza. Serie di Taylor. Sviluppi in serie di Taylor di funzioni elementari.

Calcolo integrale. Integrale ed area. Integrale di Riemann. Proprietà dell'integrale. Funzione di Dirichlet. Classi di funzioni integrabili. Teorema della media integrale. Funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Studio di funzioni integrali. Funzione primitiva e integrale indefinito. Teorema di Torricelli-Barrow.
Integrazione per parti e per sostituzione. Integrazione delle funzioni razionali.
Cenno agli integrali impropri. Criteri di convergenza: criterio del confronto e del confronto asintotico. Criterio di assoluta integrabilità in senso improprio.

Equazioni differenziali. Linearità e non-linearità.
Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili.
Equazioni differenziali lineari del primo ordine.
Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti (omogenee e non-omogenee).

Esercizi:
- Estremo superiore/inferiore di un sottoinsieme di **R** e di funzioni a valori reali
- Iniettività/suriettività di funzioni di variabile reale. Funzione inversa e funzione composta
- Principio di induzione
- Numeri complessi: calcoli algebrici, risoluzione di equazioni in **C**, radici n-esime e potenze. Rappresentazione grafica di semplici regioni del piano complesso individuate da equazioni o disequazioni
- Limiti di funzioni. Ordine di infinitesimo o di infinito. Comportamento asintotico
- Teorema degli zeri o del valor intermedio: esistenza di soluzioni di equazioni
- Continuità e derivabilità. Punti di non continuità e di non derivabilità. Derivate delle funzioni elementari. Equazione retta tangente/normale al grafico di una funzione in un punto del suo grafico

- Max/min di una funzione (uso del teorema di Fermat e i test di monotonia per trovare punti di massimo/minimo locale di una funzione e per determinarne la natura). Studio di funzioni o di una famiglia di funzioni di variabile reale dipendente da un parametro
- Studio del carattere di una serie (convergenza o non convergenza) usando i criteri di convergenza
- Serie di potenze. Insieme di convergenza (assoluta convergenza)
- Limiti usando de l'Hopital e gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari
- Integrali. Integrali definiti o primitive di funzioni elementari con l'uso, se necessarie, delle formule di integrazione per parti, per sostituzioni. Integrale di funzioni razionali semplici
- Area di semplici regioni piane
- Andamento e rappresentazione grafica di semplici funzioni integrali
- Integrali impropri. Studio della convergenza di un integrale improprio usando i criteri di convergenza
- Equazioni differenziali (a variabili separabili; lineari del primo ordine, lineari del secondo ordine a coefficienti costanti). Problema di Cauchy

MOD_2

Obiettivi e risultati di apprendimento attesi
Essi possono essere riassunti come segue:
- Conoscenza e capacità di comprensione
- Capacità di applicare conoscenza e comprensione
- Autonomia di giudizio
- Abilità comunicative
- Capacità di apprendimento

In particolare, gli/le studenti/esse devono :
- raggiungere una conoscenza approfondita degli argomenti di base dell'Analisi matematica, come il calcolo differenziale e integrale per le funzioni reali (o vettoriali) di una o più variabile reale, e acquisire la capacità di utilizzare un linguaggio matematico corretto sia nello svolgimento di esercizi che nell'esposizione di dimostrazioni.
- acquisire capacità di ragionamento induttivo e deduttivo e la capacità di schematizzare in termini rigosi semplici problemi derivanti dalla fisica e geometria.
- essere in grado di riconoscere la correttezza di semplici dimostrazioni e di produrre semplici dimostrazioni; essere in grado di individuare i metodi più appropriati per analizzare ed affrontare problemi risolvibili con le tecniche acquisiti.
- essere in grado di esporre argomenti legati all'Analisi matematica con un linguaggio corretto.
- essere in grado di acquisire autonomamente e gestire nuove informazioni inerenti a tecniche e problemi legati all'Analisi Matematica.

Prerequisiti
Questo è il secondo modulo di un corso unico.

I prerequisiti sono chiaramente i prerequisiti per il Primo Modulo, cioè:
Geometria euclidea piana e spaziale. Elementi di geometria analitica: equazioni di rette e piani.
I polinomi. Operazioni con i polinomi. Funzioni elementari e i loro grafici: potenze, esponenziali e logaritmi.
Trigonometria piana: funzioni seno, coseno e tangente e i loro grafici;

e gli argomenti svolti nel Primo Modulo di Analisi Matematica A, il cui programma dettagliato si trova sul sito http://latemar.science.unitn.it/defranceschi

Contenuti/programma del corso
Il programma dettagliato del corso è disponibile sulla pagina web del corso all'indirizzo http://latemar.science.unitn.it/defranceschi

Spazi $\boldsymbol{R^n}$*: proprietà vettoriali, metriche e topologiche.*
Struttura vettoriale di $\mathbf{R}^n$. Operazioni sui vettori. Insiemi convessi. Prodotto scalare e norma in $\mathbf{R}^n$. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz..
Struttura metrica/topologica di $\mathbf{R}^n$. Intorni circolari (sferici). Punti interni, esterni, di frontiera. Punti di accumulazione e punti isolati. Insiemi aperti, chiusi e limitati. Insiemi compatti e connessi.

Limiti. Massimo limite, minimo limite e valore limite di una successione a valori in **R**. Esistenza del limite finito: criterio di Cauchy. Successione fondamentale. Criterio di convergenza di Cauchy.
Limiti in C e in $\boldsymbol{R^n}$. Funzioni da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ e loro limiti. Esempi di non esistenza del limite. Convergenza di successioni in $\mathbf{R}^n$. Sottosuccessioni. Caratterizzazione degli insiemi chiusi e compatti usando le successioni. Il criterio di Cauchy.

Funzioni continue:
*Funzioni continue da **R** in **R**.* La nozione di uniforme continuità. Esempi di funzioni continue non uniformemente continue. Funzioni lipschitziane.
Funzioni continue da $\boldsymbol{R^n}$ *a* $\boldsymbol{R^m}$ Caratterizzazione delle funzioni continue (mediante controimmagine degli aperti (chiusi). Funzioni continue su un compatto o su un connesso. Teorema di Heine-Cantor (uniforme continuità di una funzione continua su un compatto).

Calcolo differenziale per funzioni di più variabili:
- *Funzioni reali.* Derivate parziali, gradiente. Derivabilità e continuità. Derivate direzionali. Interpretazione geometrica nel caso bidimensionale (pendenza delle linee sezione). Differenziabilità. Piano tangente al grafico di una funzione in due variabili. Differenziabilità, derivabilità e continuità. Teorema del differenziale totale. Derivate di ordine superiore. Teorema di Schwarz. Matrice hessiana. Formula di Taylor.
- *Funzioni vettoriali.* Esempi di applicazioni fra spazi euclidei: curve continue e interpretazione cinematica (vettore tangente, vettore velocità); superficie parametriche; campi di vettori; cambiamenti di coordinate.
Differenziabilità per funzioni vettoriali. Matrice jacobiana. Differenziabilità di funzioni composte. Differenziabilità delle funzioni di classe C^1.
Teorema del Dini (o della funzione implicita) e della funzione inversa. Esempi di funzioni definite implicitamente. Teorema del Dini in due variabili. Insiemi di livello e punti singolari. Ortogonalità di gradiente e linee di livello. Estensione al caso di più variabili; estensione al caso dei sistemi di equazioni.
Il teorema di inversione locale nel caso unidimensionale dedotto dal Teorema del Dini. Estensione al caso bidimensionale.

Estremi liberi per funzioni di più variabili. Punti di estremo (massimi e minimi) locali. Punti di estremo come punti critici interni, punti singolari o punti di frontiera.
Punti critici interni: teorema di Fermat in più variabili. Forme quadratiche. Forme quadratiche definite positive o negative; forme quadratiche indefinite; forme quadratiche semidefinite.
Condizioni sufficienti per l'esistenza di un estremo libero. Formula di Taylor e studio della natura di un punto critico.
Estremi vincolati. Vincoli di uguaglianza in due variabili. Punto critico condizionato al vincolo g(x,y)=0. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange in presenza di un vincolo (o di più vincoli).

Esercizi:
- Riconoscere se un sottoinsieme di $\mathbf{R}$ ($\mathbf{R}^2$) è aperto, è chiuso. Individuare eventuali punti di frontiera, punti di accumulazione
- Individuare se un insieme è convesso, connesso, compatto, limitato
- Domini, curve di livello per funzioni in più variabili
- Limiti e continuità per funzioni in più variabili
- Derivate parziali, differenziale, piano tangente
- Calcolo infinitesimale per funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}^2$ ($\mathbf{R}^3$), da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$
- Lunghezza di una curva (integrali di linea)
- Polinomio di Taylor per funzioni in più variabili
- Massimi/minimi per funzioni in più variabili
- Teorema del Dini; retta tangente al grafico di una funzione definita implicitamente
- Massimi/minimi vincolati per funzioni in più variabili

Metodi Didattici utilizzati e attività di apprendimento richieste allo/a studente/essa
Il corso è articolato in lezioni frontali ed esercitazioni svolte dal docente, in cui viene esposta la teoria e viene applicata a svariati esempi e alla risoluzione di esercizi illustrativi. Per tutto il tempo, per quanto possibile, lo/la studente/essa viene coinvolto e stimolato a partecipare attivamente. Se la situazione medico-sanitaria nazionale non permette di svolgere le lezioni frontali in presenza, esse saranno svolte in remoto. Saranno comunque disponibili sul sito del corso le registrazioni delle lezioni.
Affiancati ad esercizi standard ci saranno sempre esercizi più complessi (anche teorici) la cui risoluzione richiederà maggiore rielaborazione da parte dello/a studente/essa. Questo per cercare nello stesso tempo di avere una parte di training sui vari argomenti e di essere meno schematici e più creativi.
Gli esercizi saranno simili a quelli presenti nelle prove scritte d'esame.

Per stimolare la partecipazione attiva degli/delle studenti/esse, fondamentale per una adeguata comprensione della materia, il corso mette a loro disposizione anche un sito web dove vengono inserite puntualmente le informazioni di carattere generale, fogli di esercizi sui temi trattati e le rispettive soluzioni con svolgimento, con il consiglio di guardare queste ultime solo come verifica di quanto da loro svolto o come ultima possibilità nel caso non riuscissero ad affrontarli. Lo svolgimento è anche una guida di come si richiede a loro lo svolgimento nelle verifiche d'esame.

Sul sito ci sono anche le note del corso, in modo che lo/la studente/essa possa confrontare e rivedere i propri appunti. Anche se è fortemente consigliato la consultazione dei libri consigliati, le note sono importanti, poiché descrivono in grande linee ciò che si vuole che lo/la studente/essa apprenda.

Inoltre il docente è disponibile per ricevimento studenti. Esiste anche un ricevimento studenti collettivo settimanale tenuto da tutors, studenti/esse più grandi e laureati/e che mettono a disposizione il loro tempo per aiutare gli/le studenti/esse nello svolgimento degli esercizi proposti dal docente o proposti da loro, per ogni eventuale richiesta o difficoltà che lo/la studente/essa incontri nel corso.

Se la situazione medico-sanitaria nazionale non permette di svolgere queste attività in presenza, esse saranno svolte in remoto usando il client ZOOM. Saranno comunque disponibili le registrazioni delle lezioni.

Come negli a.a. passati, anche quest'anno sarà attiva una piattaforma online (PIAZZA) dove il docente mette esercizi su tutti gli argomenti trattati nel corso e gli/le studenti/esse possono interagire tra loro scrivendo anche in linguaggio matematico: chi propone una soluzione, chi un’altra, chi chiede aiuto e chi lo dà. Il docente o l’esercitatore intervengono solo dopo un certo tempo per confermare, correggere o aiutare sugli esercizi scelti o dubbi segnalati dagli/dalle studenti/esse.

In definitiva, l’atteggiamento è tutto in funzione di un apprendimento efficace e molto personale dello/a studente/essa che, pur sentendosi spronato ed assistito è lasciato però libero di strutturare il suo percorso come meglio creda.

Metodi di accertamento e criteri di valutazione

La modalità di accertamento delle conoscenze e competenze acquisite consiste nell’esame finale, dato da una prova scritta che serve a valutare le capacità dello/a studente/essa di operare con i concetti appresi e una prova orale in cui si verifica la conoscenza dello/a studente/essa dei risultati teorici presentati durante il corso, delle loro relative dimostrazioni nonché la capacità dello/a studente/essa di utilizzare un linguaggio matematico corretto e di applicare e collegare tra di loro vari argomenti visti a lezione.

La prova scritta della durata di circa 3 ore si divide in due parti.

La prima consta di 10 o più esercizi, che spaziano sui vari argomenti del corso. Essi saranno sotto forma di Vero/Falso oppure può essere richiesto l'inserimento di una breve risposta, di un numero, di una formula, di un'equazione o di una coppia/coppie di punti; per alcuni dei quesiti viene richiesta una breve spiegazione della risposta data; non viene richiesto uno svolgimento dettagliato, ma solo una chiara e precisa breve motivazione (un breve conto; l'indicazione di un risultato/teorema...)

La seconda parte consta di 2 o più esercizi che possono riguardare qualunque argomento del corso e dei quali si chiede lo svolgimento dettagliato. Tali esercizi possono essere anche di tipo teorico e riguardare domande di teoria. La seconda parte del compito viene corretto in maniera molto dettagliata, dando ad ogni esercizio uno specifico punteggio, nel quale la correttezza concettuale influisce maggiormente di un mero errore di conto.

La prova orale consta di un colloquio in cui lo studente deve mostrare di conoscere anche la parte teorica del corso, in particolare le definizioni ed enunciati dei teoremi visti durante il corso. Viene richiesta la conoscenza delle dimostrazioni solo di numero limitato di teoremi, che saranno comunicati all'inizio del corso sul sito del corso.

Il voto finale tiene conto della valutazione della prova scritta (che comunque deve essere sufficiente per poter svolgere la prova orale) e della prova orale.

Il risultato, se positivo, sarà certificato con firma digitale.

NOTA: la struttura dell'esame potrebbe subire modifiche, come è avvenuto negli a.a. 2020/21 e 2021/22, se la situazione medico-sanitaria dovesse imporre gli esami a distanza o quasi. Durante l’anno si svolgono cinque appelli nei periodi fissati dal Consiglio di Dipartimento.

Sono previste anche delle prove intermedie (simili alle prove scritte) svolte durante il periodo di lezione, che, se sufficienti, sostituiscono la prova scritta finale.

Come in tutti gli altri appelli, lo/la studente/essa può accettare l’esito o dichiarare invece di voler sostenere nuovamente l’esame.

Si specifica che durante gli scritti non è permesso l'uso di libri, formulari, calcolatrici o appunti, così come qualsiasi device elettronico. Le modalità d'esame verranno comunque comunicate in maniera dettagliata sia a voce durante il corso che sul sito.

Testi di riferimento/Bibliografia

Note delle lezioni saranno disponibili sul sito http://latemar.science.unitn.it/defranceschi
Note delle lezioni dell'a.a. 2020/21 e dell'a.a. 2021/22 sono disponibili sul sito http://latemar.science.unitn.it/defranceschi

a) - C.D. Pagani, S. Salsa: Analisi matematica 1, Zanichelli , Milano 2015.
- C.D. Pagani, S. Salsa: Analisi matematica 2, Zanichelli , Milano 2016.
- M. Bertsch, A. Dall'Aglio, L. Giacomelli: Epsilon 1. Primo corso di Analisi Matematica. Mc Graw Hill 2021.

b) - M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa: Analisi matematica 1. Zanichelli, Milano 2012.
- M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa: Analisi matematica 2. Zanichelli, Milano 2015.

I testi indicati in b) sono meno ampi e approfonditi a quelli in a)

Altri libri di utile consultazione sono:

c) - M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli: Analisi Matematica. Seconda Edizione, McGraw-Hill, 2011.
- F. Conti, P. Acquistapace, A. Savojni: Analisi matematica, Teoria e applicazioni, McGraw-Hill, 2003.
- M. Giaquinta, G. Modica: Analisi Matematica 1. Funzioni di una variabile, Pitagora Editrice, Bologna 1999.
- G. Prodi: Lezioni di Analisi Matematica vol.1 e vol. 2, Boringhieri 1972.

Eserciziari:
- Fogli di esercizi (con soluzioni) assegnati durante il corso
-Tutti gli esercizi (con soluzioni) assegnati nei test/prove intermedie/compiti d'esame del mio corso di Analisi Matematica A negli a.a. 2020/21 e 2021/22 disponibili sul sito http://latemar.science.unitn.it/defranceschi.
- S. Salsa, A. Squellati: Esercizi di Analisi Matematica 1, Zanichelli, Milano 2012
- S. Salsa, A. Squellati: Esercizi di Analisi Matematica 2, Zanichelli, Milano 2012

Sono a disposizione degli/delle studenti/esse anche gli esercizi, le prove intermedie e le prove scritte dei Corsi di Analisi Matematica A/Analisi Matematica 1 (per Matematici e Fisici) tenuti dal prof. Raul Serapioni negli ultimi anni fino all'a.a. 2019/20. Essi si trovano nella sezione "Materiali Didattici" all'indirizzo http://www.science.unitn.it/~serapion, oltre ad una vasta bibliografia riguardante curiosità matematiche e notizie storiche sullo sviluppo dell'Analisi (vedi, per esempio, E. Hairer, G Wanner, 2008; H. D. Ebbinghaus & altri 1991).

Altre Informazioni: Gli/Le studenti/esse mi possono contattare sempre mediante l'e-mail anneliese.defranceschi@unitn.it. Ulteriori informazioni saranno pubblicati in itinere sul sito http://latemar.science.unitn.it/defranceschi.