

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

| | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|

NON SCRIVERE QUI

A

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL DI SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA APPLICATA

TERZA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2007-2008 — ROVERETO, 21 DICEMBRE 2007

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. **È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti**; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti equazioni e/o disequazioni:

i) $|3^{x-1} - 1| < 2$; $|x^2 - x + 1| > 3$;

ii) $\log_2(x+1) + \log_2(1-x) \leq 0$; $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 1) \geq -1$;

iii) $4^{|x-1|-x^2} < 1$; $3^{-|x|} > 0$.

2) i) Scrivete, usando il simbolo di sommatoria, la seguente espressione

$$2 + 6 + 12 + 20 + \cdots + 110.$$

ii) Calcolate $\sum_{n=1}^5 \text{area}(T_n)$, dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, T_n denota un triangolo rettangolo di base n e altezza $\frac{1}{n^2}$.

iii) Calcolate $\sum_{k=1}^4 \frac{(-1)^k}{k!}$.

iv) Calcolate i seguenti integrali definiti:

$$\int_2^3 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx; \quad \int_1^2 \frac{x^4+2x}{x^3} dx; \quad \int_0^1 \left(e^{3x} + \frac{1}{2x+1}\right) dx; \quad \int_{-2}^1 |e^x - 1| dx.$$

- 3) Sia $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = (x^2 - 1) \log(2 + x^2)$. Sia $F : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la sua funzione integrale definita da $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$. Determinate gli eventuali punti critici di F , e determinate la loro natura.
-

- 4) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di f nel punto $(2, 0)$, e rappresentatela nello stesso sistema di riferimento della f .

iii) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f , dalla retta r e dalla retta di equazione $x = 4$.

iv) Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x) = \begin{cases} (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} & \text{se } -1 \leq x \leq 2 \\ f(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Rappresentate graficamente g e determinate, se esistono, il massimo e/o il minimo (e gli eventuali punti di massimo e/o di minimo) di g su $[-1, 3]$.

- 5) i) Tracciate il grafico di una funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sapendo che

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(x) < 0 \text{ per } x \in]-\infty, 0[\text{ e } f''(x) > 0 \text{ per } x \in]0, +\infty[.$$

- ii) Tracciate il grafico di una funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sapendo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \quad f'(0) = -1 \text{ e } f'(x) > 0 \text{ per } x > 3.$$

- 6) Dite quanti sono i numeri di 3 cifre che potete formare con le cifre 1,2,6,7,8 (senza che alcuna cifra venga ripetuta) se i numeri non possono cominciare con 2 oppure non possono terminare con 8?
-

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

| | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|

NON SCRIVERE QUI

B

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL DI SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA APPLICATA

TERZA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2007-2008 — ROVERETO, 21 DICEMBRE 2007

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. **È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti**; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti equazioni e/o disequazioni:

i) $|4^{x-2} - 1| < 3$; $|x(x-2)| > 3$;

ii) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(2-x) > 0$; $\log_4(x^2-2) \leq \frac{1}{2}$;

iii) $e^{|x+2|-x^2} > 1$; $3^{-|x+2|} > 0$.

2) i) Scrivete, usando il simbolo di sommatoria, la seguente espressione

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{110}.$$

ii) Calcolate $\sum_{n=1}^5 \text{area}(T_n)$, dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, T_n denota un triangolo rettangolo di base $\frac{n}{2}$ e altezza $\frac{1}{n^3}$.

iii) Calcolate $\sum_{k=1}^4 \frac{1}{(k-1)!}$.

iv) Calcolate i seguenti integrali definiti:

$$\int_2^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx; \quad \int_1^3 \frac{x^5-3x}{x^2} dx; \quad \int_0^1 \left(2^x + \frac{x^2}{x^3+1}\right) dx; \quad \int_{\frac{1}{2}}^3 \left|\frac{1}{x^2} - 1\right| dx.$$

- 3) Sia $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x(x+1) \log(e+x^2)$. Sia $F : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la sua funzione integrale definita da $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$. Determinate gli eventuali punti critici di F , e determinate la loro natura.
-

- 4) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di f nel punto $(1, 0)$, e rappresentatela nello stesso sistema riferimento della f .

iii) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f , dalla retta r e dalla retta di equazione $x = 4$.

iv) Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x) = \begin{cases} (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ f(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Rappresentate graficamente g e determinate, se esistono, il massimo e/o il minimo (e gli eventuali punti di massimo e/o di minimo) di g su $[-\frac{1}{2}, 3]$.

- 5) i) Tracciate il grafico di una funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sapendo che

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 0, \quad f''(x) > 0 \text{ per } x \in]-\infty, 1[\text{ e } f''(x) < 0 \text{ per } x \in]1, +\infty[.$$

- ii) Tracciate il grafico di una funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sapendo che

$$f'(-1) = f'(0) = f'(1) = 0 \text{ e } f'(x) < 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

- 6) In quanti modi si possono disporre in fila 12 biglie di grandezza uguale, 5 rosse, 3 blu e 4 gialle, con la condizione che sia al primo che all'ultimo posto vanno palline dello stesso colore?
-

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

| | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|

NON SCRIVERE QUI

C

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL DI SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA APPLICATA

TERZA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2007-2008 — ROVERETO, 21 DICEMBRE 2007

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. **È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti**; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti. **Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

1) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti equazioni e/o disequazioni:

i) $|2^{x-3} - 1| \geq 1$; $|x(x-3)| < 4$;

ii) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(3-x) \geq 0$; $\log_4(x^2-2) \leq \frac{1}{2}$;

iii) $4^{-|x-2|+x^2} \leq 1$; $3^{-|x+2|} \leq 0$.

2) i) Scrivete, usando il simbolo di sommatoria, la seguente espressione

$$2 - 6 + 12 - 20 + \cdots - 110.$$

ii) Calcolate $\sum_{n=1}^4 \text{area}(C_n)$, dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, C_n denota una circonferenza di raggio $\frac{1}{n}$.

iii) Calcolate $\sum_{k=1}^4 \frac{1}{k^k}$.

iv) Calcolate i seguenti integrali definiti:

$$\int_3^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx; \quad \int_1^3 \frac{x^4-2x}{x^2} dx; \quad \int_0^1 \left(3^x + \frac{x^3}{x^4+1}\right) dx; \quad \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left|\frac{1}{x^2} - 1\right| dx.$$

- 3) Sia $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = (x^2 - x)e^{-x}$. Sia $F : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la sua funzione integrale definita da $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$. Determinate gli eventuali punti critici di F , e determinate la loro natura.
-

- 4) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x^2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di f nel punto $(2, 0)$, e rappresentatela nello stesso sistema riferimento della f .

iii) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f , dalla retta r e dalle rette di equazione $x = 1$ e $x = 4$.

iv) Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x) = \begin{cases} (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} & \text{se } -1 \leq x \leq 2 \\ f(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Rappresentate graficamente g e determinate, se esistono, il massimo e/o il minimo (e gli eventuali punti di massimo e/o di minimo) di g su $[-2, 3]$.

- 5) i) Tracciate il grafico di una funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sapendo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad f(1) = -1, \quad f'(2) = 1, \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

- ii) Tracciate il grafico di una funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sapendo che

$$f'(-1) = f'(0) = f'(1) = 0 \quad \text{e} \quad f'(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

- 6) In quanti modi si possono disporre in fila 15 biglie di grandezza uguale, 5 rosse, 6 blu e 4 gialle, con la condizione che sia al primo che all'ultimo posto vanno palline dello stesso colore?
-

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

| | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|

NON SCRIVERE QUI

D

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL DI SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA APPLICATA

TERZA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2007-2008 — ROVERETO, 21 DICEMBRE 2007

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. **È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti**; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti equazioni e/o disequazioni:

i) $|3^{x+1} - 1| < 8$; $|x^2 + x + 1| \geq 3$;

ii) $\log_2(x+2) + \log_2(1-x) \leq 0$; $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4) \geq -2$;

iii) $e^{|2x-3|-x^2} \geq 1$; $4^{-|x|} > 0$.

2) i) Scrivete, usando il simbolo di sommatoria, la seguente espressione

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{20} - \cdots + \frac{1}{110}.$$

ii) Calcolate $\sum_{n=1}^6 \text{area}(C_n)$, dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, C_n denota una circonferenza di raggio $\frac{2}{n}$.

iii) Calcolate $\sum_{k=0}^4 \frac{1}{k!}$.

iv) Calcolate i seguenti integrali definiti:

$$\int_3^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx; \quad \int_1^2 \frac{x^4+3x}{x^3} dx; \quad \int_0^1 \left(e^{4x} + \frac{1}{x+e}\right) dx; \quad \int_{-1}^2 |e^x - 1| dx.$$

- 3) Sia $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = (x - x^3)e^{-x}$. Sia $F : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la sua funzione integrale definita da $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$. Determinate gli eventuali punti critici di F , e determinate la loro natura.
-

- 4) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{x^2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di f nel punto $(1, 0)$, e rappresentatela nello stesso sistema di riferimento della f .

iii) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f , dalla retta r e dalla retta di equazione $x = 3$.

iv) Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x) = \begin{cases} -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4} & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ f(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Rappresentate graficamente g e determinate, se esistono, il massimo e/o il minimo (e gli eventuali punti di massimo e/o di minimo) di g su $[-3, -1]$.

- 5) i) Tracciate il grafico di una funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sapendo che

$$f(0) = -2, \quad f'(0) = 0, \quad f''(x) > 0 \text{ per } x \in]-\infty, 0[\text{ e } f''(x) < 0 \text{ per } x \in]0, +\infty[.$$

- ii) Tracciate il grafico di una funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sapendo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad f'(0) = 1 \text{ e } f'(x) < 0 \text{ per } x > 2.$$

- 6) Dite quanti sono i numeri di 4 cifre che potete formare con le cifre 1,2,4,5,7,8,9 (senza che alcuna cifra venga ripetuta) se i numeri non possono cominciare con 5 oppure non possono terminare con 8?
-