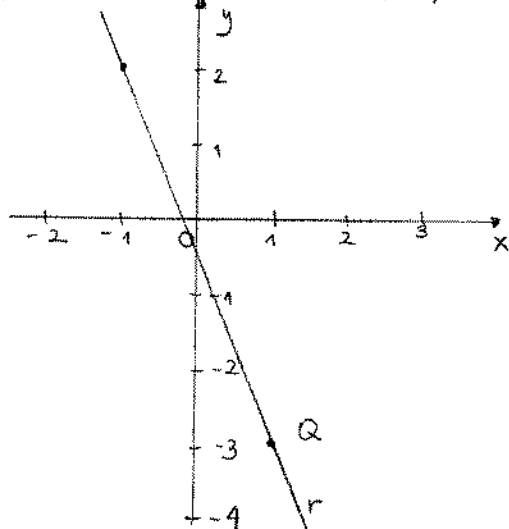


Esame scritto di ANALISI MATEMATICA - Università degli Studi di Trento
2.2.2006/07 - Rovereto, 30 ottobre 2007

1) i) $P = (-1, 2)$ $Q = (1, -3)$



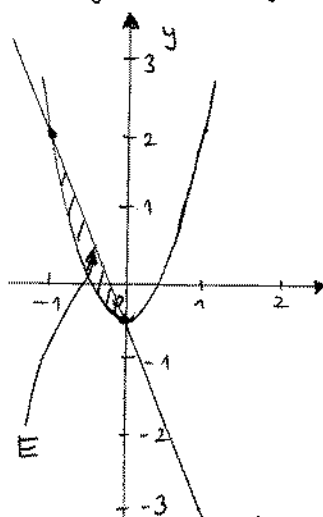
$$\frac{y-2}{-3-2} = \frac{x+1}{1+1}$$

$$y-2 = -\frac{5}{2}(x+1)$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}}} \quad \text{eq. della retta } r$$

□

ii) $y = \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}$



$V = (0, -\frac{1}{2})$ vertice della parabola

intersezione con la retta r :

$$\begin{cases} \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = 0 \\ y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ oppure } x = -1 \\ y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi i pt. di intersezione di r con la parabola data sono

$$(0, -\frac{1}{2}) \text{ e } (-1, 2)$$

$$\begin{aligned} \text{area } E &= \int_{-1}^0 \left(-\frac{5}{2}x - \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) \right) dx = -\frac{5}{2} \int_{-1}^0 (x + x^2) dx = \\ &= -\frac{5}{2} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = +\frac{5}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{5}{12}}} \end{aligned}$$

□

iii) $\text{dist}(P, V) = \sqrt{(-1-0)^2 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{29}{4}}$

Eq. della circonferenza di centro V e passante per il punto P :

$$\underline{\underline{x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}}}$$

■

$$2) i) \quad \frac{e^{x^2+2x}}{e^{x+1}} = e \quad \Leftrightarrow \quad e^{x^2+2x-x-1} = e$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+2x-x-1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x=-2} \text{ o } \underline{x=1.} \quad \square$$

$$\log(x^3+x) = \log x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^3+x > 0 \\ x \neq 0 \\ x^3+x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2+1) > 0 \\ x \neq 0 \\ x(x^2-x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x^2-x+1 = 0 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è vuoto, $\square$

$$ii) \quad 2^{|x-1|} \cdot 2^x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| + x > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1+x > 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ -(x-1)+x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 1 \\ 2x > 1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \leq 1 \\ 1 > 0 \end{cases}$$

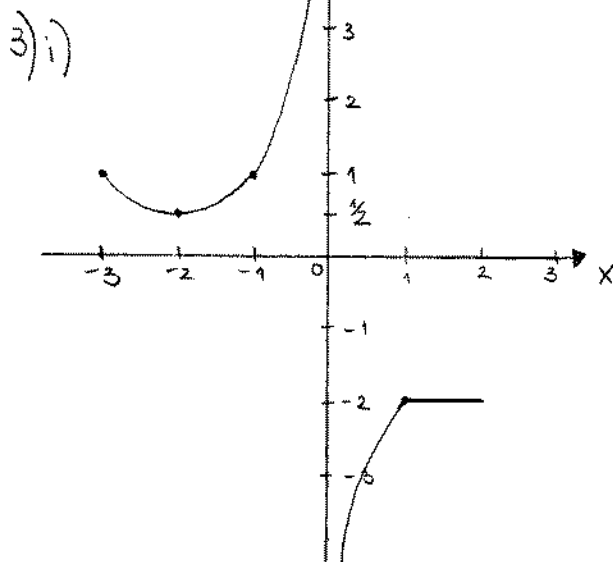
$$\Rightarrow \quad \text{L'insieme delle soluzioni è dato da } \underline{S = \mathbb{R}}. \quad \square$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} (x^2+1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \leq x^2+1 \end{cases} \quad (\text{nota: } \log_{\frac{1}{2}} x \text{ è decrescente!})$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ 0 \leq x^2-x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ L'insieme delle soluzioni è dato da $]0, +\infty[$. $\blacksquare$



$$\text{dom } \frac{1}{f(x)} = [-3, 2] \setminus \{0\}$$

grafico qualitativo di $\frac{1}{f(x)}$.

$\square$

ii) pt. minimo locale di $f(x)$: $x = -3$, $x \in [1, 2]$

pt. minimo globale di $f(x)$: $x \in [1, 2]$.

pt. di max locale (= globale) di $f(x)$: $x = -2$.

pt. minimo locale di $\frac{1}{f(x)}$: $x = -2$

pt. massimo locale di $\frac{1}{f(x)}$: $x = -3$, $x \in [1, 2]$.

Nono pt. di minimo (di massimo) globale per $\frac{1}{f(x)}$. ■

4) Possiamo $f(x) = -x^4 + 1 - 4x$ su $[0, 1]$. f è una funzione continua e $f(0) = 1 (> 0)$ $f(1) = -4 (< 0)$. Per il teorema di Weierstrass degli zeri esiste un $x_0 \in]0, 1[$: $f(x_0) = 0$ (e quindi x_0 è soluzione dell'eq. $-x^4 + 1 = 4x$). Inoltre x_0 è unico poiché $f(x)$ è strettamente decrescente su $[0, 1]$.

Osserviamo che $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{16} + 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{17}{16} (< 0)$. Quindi tale x_0 deve venire a trovarsi nell'intervallo $]0, \frac{1}{2}[$.

Notiamo inoltre che $f(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{16^2} + 1 - 4 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{16^2} (< 0)$.

Possiamo allora concludere che l'intervallo $]a, b[=]0, \frac{1}{4}[$ contiene x_0 . Inoltre $b - a = \frac{1}{4}$. Quindi $]0, \frac{1}{4}[$ può essere considerato il nostro intervallo cercato. ■

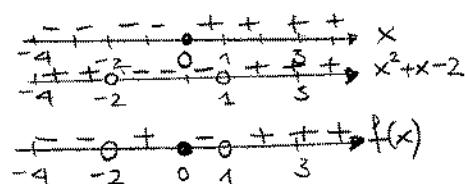
5) $f(x) = \frac{x}{(x+2)(x-1)}$ • $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} =]-\infty, -2[\cup]-2, 1[\cup]1, +\infty[$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

• segno di f



• $\text{dom } f' = \text{dom } f$

$$f'(x) = \frac{(x^2+x-2) - x(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = \frac{-x^2-2}{(x^2+x-2)^2}$$

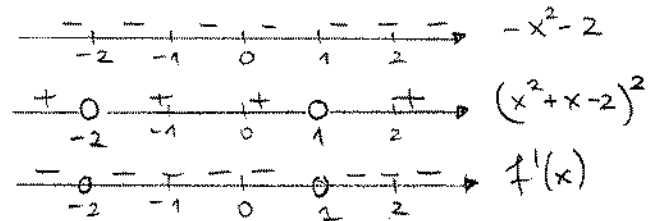
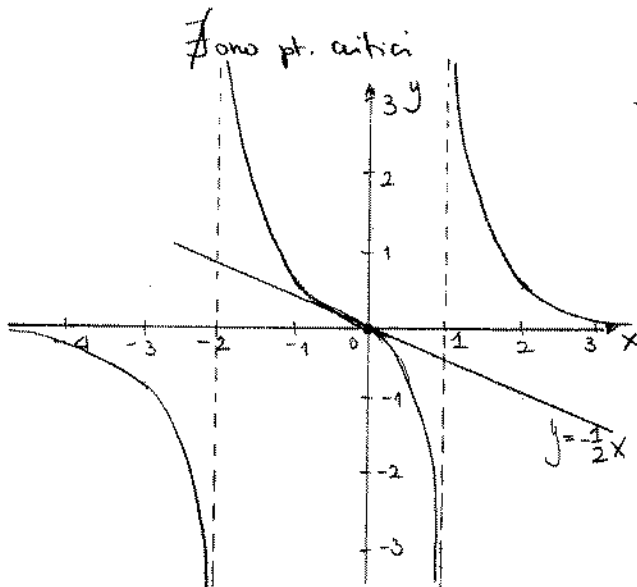


grafico qualitativo di f .

□

ii) eq. retta tg. al grafico di f nel pt. $(0,0)$: $y = 0 - \frac{1}{2}(x-0)$

$\Rightarrow \underline{y = -\frac{1}{2}x}$

□

iii) $\int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx = \int_1^2 \frac{(x+2)(x-1)}{x} dx = \int_1^2 \frac{x^2+x-2}{x} dx =$

$$= \int_1^2 \left(x + 1 - \frac{2}{x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x - 2 \log x \right]_1^2 = \left[\left(2 + 2 - 2 \log 2 \right) - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right] = \underline{\underline{\frac{5}{2} - 2 \log 2}}$$

■

6) $C_{25,6} = \underline{\underline{\frac{25!}{6! 19!}}}$

■