Commenti alla lezione del 4/10/05 (7ª lezione Precorso)

Riferimento bibliografico: [1] Sez. 2.7 (pag. 45-48)

NOTA 1. Dato $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ abbiamo studiato l'equazione di 2° grado

$$\boxed{ax^2+bx+c=0} \quad (*)$$

Abbiamo visto che

se $b^2-4ac>0$, allora $(*)$ ha le 2 soluzioni $x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

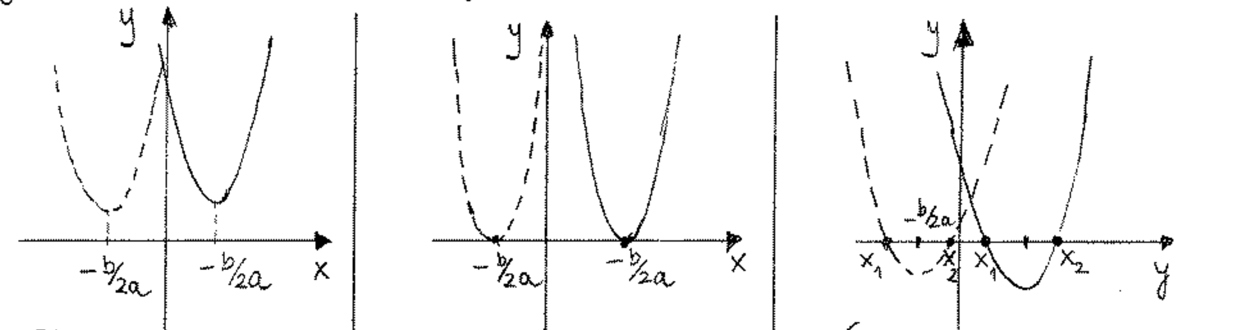
se $b^2-4ac=0$, allora $(*)$ ha solo la soluzione $x = -\dfrac{b}{2a}$;

se $b^2-4ac<0$, allora $(*)$ non ha soluzioni.

NOTA 2: Dato $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, possiamo scrivere

$$y = ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Abbiamo allora, se $\boxed{a>0}$, le seguenti possibili rappresentazioni grafiche: (disegni qualitativi !!)

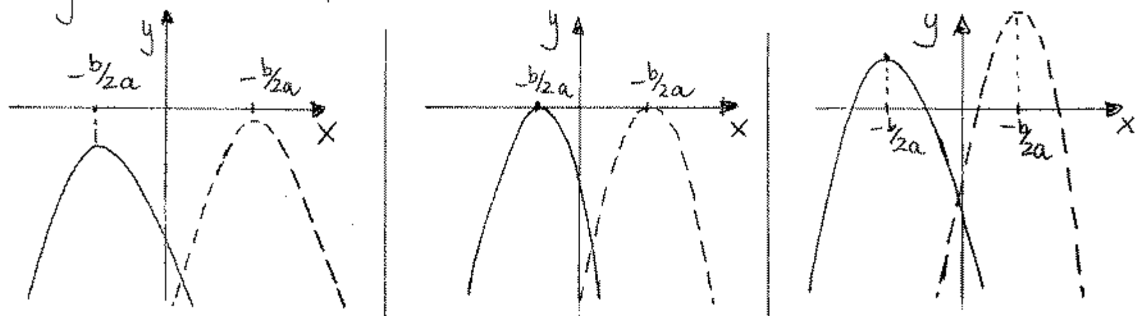


se $b^2-4ac<0$ (1)

se $b^2-4ac=0$ (2)

se $b^2-4ac>0$. (3)

Invece, se $\boxed{a<0}$, le possibili rappresentazioni grafiche di $y=ax^2+bx+c$, sono



se $b^2-4ac<0$ (4)

se $b^2-4ac=0$ (5)

se $b^2-4ac>0$ (6)

Avere presente questi grafici è di grande aiuto nella risoluzione di disequazioni di secondo grado.

Esercizio 1. Risolvete in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni di 2° grado:

i) $x^2-2x+2=0$;

ii) $x^2-2x+1=0$;

iii) $x^2-5x+6=0$.

<u>Svolgimento</u>:

i) Abbiamo $x_{1/2}=\cancel{\dfrac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}}$ non possibile poichè $b^2-4ac=4-8<0$!!

quindi <u>l'insieme delle soluzioni dell'eq. è vuoto</u> !! (geometricamente questo significa che la parabola $y=x^2-2x+2$ non interseca mai l'asse delle x (ossia, la retta $y=0$).

Essendo $a=1>0$, la rappresentazione grafica di

$y = x^2 - 2x + 2$ è del tipo ① nella Nota 2, pag. 32). $\square$

ii) Abbiamo $x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$ e quindi l'insieme delle soluzioni dell'eq. è $\underline{S = \{1\}}$.

(geometricamente ciò significa che la parabola $y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ interseca in un solo pt. $(x = 1)$, l'asse delle x. Essendo $a = 1 > 0$, la rappresentazione grafica di $y = x^2 - 2x + 1$ è del tipo ② nella Nota 2, pag. 32). $\square$

iii) Abbiamo $x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$;

quindi l'insieme delle soluzioni dell'eq. è $\underline{\underline{S = \{2, 3\}}}$.

(la parabola $y = x^2 - 5x + 6$ interseca l'asse delle x nei punti $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. Essendo $a = 1 > 0$, la rappresentazione grafica di $y = x^2 - 5x + 6$ è del tipo ③ nella Nota 2, pag. 32).

$\blacksquare$

Esercizio 2. Risolvete in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni di 2° grado:

i) $5x^2 + 2x - 3 \leq 0$;

ii) $5x^2 + 2x - 3 > 0$;

iii) $4x - 2 < 4x^2 - 1$;

iv) $4x - 3 \geq 4x^2 - 1$.

Svolgimento:

i) Abbiamo innanzitutto che l'eq. $5x^2 + 2x - 3 = 0$ ha due radici (= soluzioni dell'equazione)

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{10} = \frac{-2 \pm 8}{10} = \begin{cases} -1 \\ 3/5 \end{cases}.$$

Poichè $a = 5 > 0$ (coefficiente di x^2), la parabola $y = 5x^2+2x-3$ ha una rappresentazione grafica del tipo (3) in Nota 2, pag. 32. Quindi possiamo subito dedurre che

$$5x^2+2x-3 \leq 0 \iff \underset{x_1}{\underset{\parallel}{-1}} \leq x \leq \underset{x_2}{\underset{\parallel}{3/5}},$$

ossia $\underline{\underline{x \in \left[-1, 3/5\right]}}$. $\square$

ii) Da quanto visto in i) possiamo subito anche dire che

$$5x^2+2x-3 > 0 \iff x < -1 \text{ o } x > 3/5,$$

ossia $\underline{\underline{x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]3/5, +\infty\right[}}$.

$\square$

iii) $4x-2 < 4x^2-1 \iff 4x^2-4x+1 > 0.$

Notiamo che $4x^2-4x+1 = 0 \iff x_1 = \frac{4 \pm \sqrt{\cancel{16-16}}}{8} = \frac{1}{2}.$

Poichè $a = 4 > 0$ (coeff. di x^2), la parabola $y = 4x^2-4x+1$ ha una rappresentazione grafica del tipo (2) in Nota 2, pag. 32. Quindi possiamo dedurre che

$$4x^2-4x+1 > 0 \iff x < \tfrac{1}{2} \text{ o } x > \tfrac{1}{2},$$

ossia $\underline{\underline{x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{1}{2}\}}}$. $\square$

iv) $4x-3 \geq 4x^2-1 \iff 4x^2-4x+2 \leq 0$.

Notiamo che $4x^2-4x+2=0 \iff \cancel{x_{1/2} = \dfrac{4\pm\sqrt{16-32}}{8}}$

non possibile poichè
$b^2-4ac = 16-32<0$!!

Poichè $a=4>0$ (coeff. di x^2), la parabola $y=4x^2-4x+2$ ha una rappresentazione grafica del tipo ① in Nota 2, pag. 32. Quindi l'insieme delle soluzioni della diseq.

$$4x^2-4x+2 \leq 0$$

è vuoto. $\blacksquare$

Esercizio 3. Risolvete in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni di 2° grado:

i) $3x(x+1) < 4x^2+1$;

ii) $10x^2-2x+5 > 0$;

iii) $\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x \leq 0$

<u>Svolgimento</u>:

i) $3x(x+1)<4x^2+1 \iff 3x^2+3x < 4x^2+1$
$\iff 0< x^2-3x+1$.

Abbiamo che $x^2-3x+1=0 \iff x_{1/2} = \dfrac{3\pm\sqrt{9-4}}{2} =$
$= \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

Poichè $a=1>0$ (coeff. di x^2), la parabola di equazione $y=x^2-3x+1$ ha una rappresentazione grafica del tipo ③ in Nota 2, pag. 32. Quindi l'insieme delle soluzioni della diseq. in i) è $S = \left]-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$. $\square$

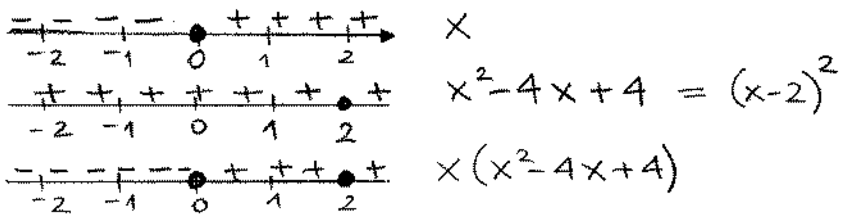
ii) Abbiamo innanzitutto che l'eq. $10x^2-2x+5=0$ non ha soluzioni, poichè $b^2-4ac = 4-200<0$. Poichè $a = 10>0$ (coeff. di x^2), la parabola di eq. $y=10x^2-2x+5$ ha una rappresentazione grafica del tipo (1) in Nota 2, pag. 32. Quindi l'insieme delle soluzioni della diseq. $10x^2-2x+5>0$ è $\underline{\underline{S=\mathbb{R}}}$.

□

iii) Abbiamo

$$\frac{1}{2}x^3-2x^2+2x\leq 0 \iff x\left(\frac{1}{2}x^2-2x+2\right)\leq 0$$
$$\iff x(x^2-4x+4)\leq 0$$

Studiamo il segno di $x(x^2-4x+4)$:



Allora $x(x^2-4x+4)\leq 0 \iff x\leq 0$ o $x=2$,

ossia $\underline{\underline{S=\,]-\infty,0]\cup\{2\}}}$

■

Esercizio 4. Risolvete in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni

i) $\dfrac{2x^2}{x^2+x-2}\geqslant 0$;

ii) $\dfrac{x+1}{(x-2)^2} > \dfrac{1}{x-2}$;

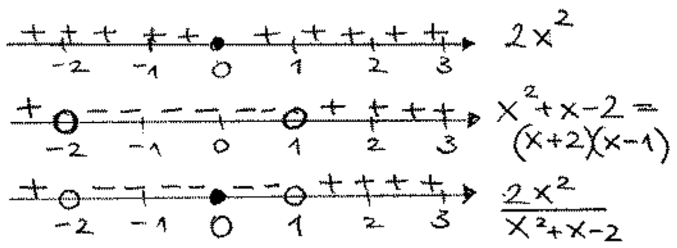
iii) $\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x+1}{x-1} < 2$.

Svolgimento:

i) $\dfrac{2x^2}{x^2+x-2} \geq 0$

$\Longleftrightarrow$

$\underline{\underline{x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \{0\} \cup \left]1,+\infty\right[.}}$



$\square$

ii) $\dfrac{x+1}{(x-2)^2} > \dfrac{1}{x-2} \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{x+1}{(x-2)^2} - \dfrac{1}{x-2} > 0$

$\Longleftrightarrow \quad \dfrac{x+1-(x-2)}{(x-2)^2} > 0$

$\Longleftrightarrow \quad \dfrac{3}{(x-2)^2} > 0$

$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}.}}$

$\square$

iii) $\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x+1}{x-1} < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{x+1}{x-1} - 2 < 0$

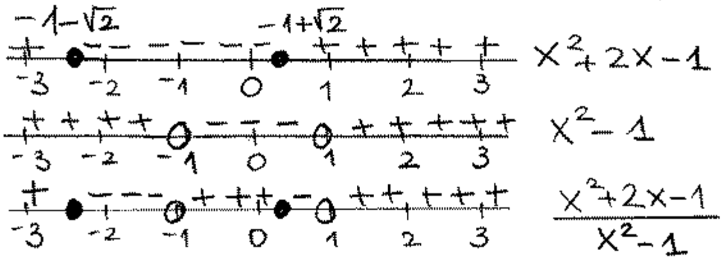
$\Longleftrightarrow \quad \dfrac{(x-1)^2-(x+1)^2-2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} < 0$

$\Longleftrightarrow \quad \dfrac{(x^2-2x+1)-(x^2+2x+1)-2(x^2-1)}{x^2-1} < 0$

$\Longleftrightarrow \quad \dfrac{-2x^2-4x+2}{x^2-1} < 0$

$\Longleftrightarrow \quad \dfrac{2x^2+4x-2}{x^2-1} > 0$

$\Longleftrightarrow \quad \dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1} > 0 \quad \Longleftrightarrow$



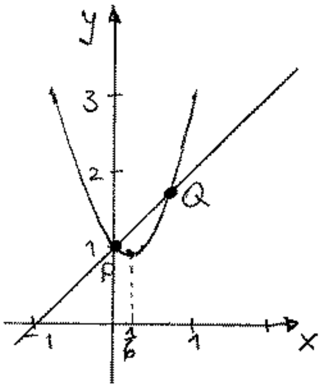
$\underline{\underline{x \in \left]-\infty,-1-\sqrt{2}\right[\cup \left]-1,-1+\sqrt{2}\right[\cup \left]1,+\infty\right[}}$

$\blacksquare$

<u>Esercizio 5.</u> Disegnate la parabola di equazione $y = 3x^2 - x + 1$, e determinate i punti di intersezione della parabola con la retta di eq. $y = x + 1$.

<u>Svolgimento:</u> Abbiamo

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 - x + 1 \\ &= 3\left(x^2 - \frac{x}{3}\right) + 1 \\ &= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} + 1 \\ &= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12} \end{aligned}$$



una parabola con asse di simmetria parallela all'asse y e con vertice $V = \left(\frac{1}{6}, \frac{11}{12}\right)$.

Per trovare eventuali punti di intersezione della parabola con la retta dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} 3x^2 - x + 1 = x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}.$$

Abbiamo

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x(3x-2) = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$\iff \underline{\underline{P = (0, 1)}}, \quad \underline{\underline{Q = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{5}\right)}}.$$

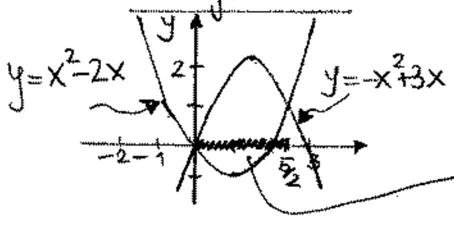
■

<u>Esercizio 6.</u> Risolvete in $\mathbb{R}$ la seguente disequazione di 2° grado; interpretate geometricamente tale disequazione.

$$x^2 - 2x \le -x^2 + 3x$$

<u>Svolgimento:</u> $x^2 - 2x \le -x^2 + 3x \iff$

$$2x^2 - 5x \le 0 \iff x(2x - 5) \le 0$$



$$\iff \underline{\underline{x \in \left[0, \frac{5}{2}\right]}}.$$

■