Commenti alla lezione del 15/11/2005 (11^a lezione Corso)

Riferimento bibliografico [1] Cap. 2 Sez. 2.6 (potenze) pag. 42–43
Cap. 3 Sez. 3.7 (pag. 86 e Fig. 3.20 – 3.22 pag. 87).

Esercizio 1. Determinate gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni (conoscendo gli insiemi di definizione e le immagini delle funzioni elementari) e rappresentatele graficamente:

$$|\sqrt{x}-1| \; ; \quad |\sqrt[3]{x}-1| \; ; \quad |\sqrt[3]{x-1}| \; ; \quad |x^3-1| \; ; \quad \left|\frac{1}{x-1}\right| .$$

Svolgimento:

(i) $|\sqrt{x}-1|$ $\qquad \underline{\underline{x\in[0,+\infty[}}$

(poiché $\sqrt{x}$ è definita solo su $[0,+\infty[$, e $|x|$ è definita su $\mathbb{R}$)

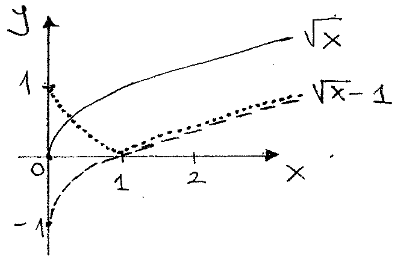


grafico di $\sqrt{x}$ ———

grafico di $\sqrt{x}-1$ - - - - - -

grafico di $|\sqrt{x}-1|$ ·········

$\square$

(ii) $|\sqrt[3]{x}-1|$ $\qquad \underline{\underline{x\in\mathbb{R}}}$

(poiché $\sqrt[3]{x}$ è definita su $\mathbb{R}$ e $|x|$ è definita su $\mathbb{R}$)

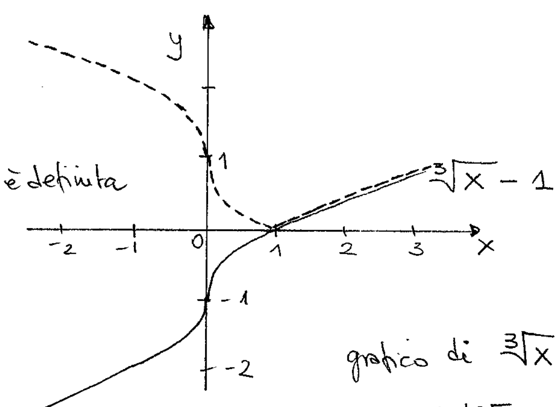


grafico di $\sqrt[3]{x}-1$ ———

grafico di $|\sqrt[3]{x}-1|$ - - - -

$\square$

(iii) $\left|\sqrt[3]{x-1}\right|$ $\quad\underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}$

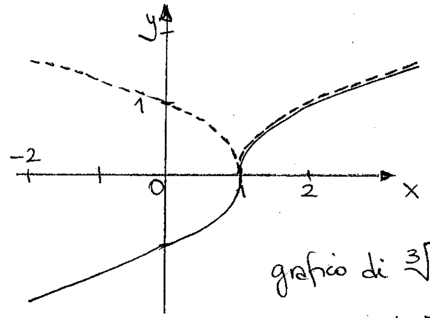


grafico di $\sqrt[3]{x-1}$ ———

grafico di $\left|\sqrt[3]{x-1}\right|$ - - - -

(iv) $|x^3-1|$ $\quad\underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}$

(x^3 è definita $\forall x \in \mathbb{R}$
e $|x|$ è definita
$\forall x \in \mathbb{R}$)

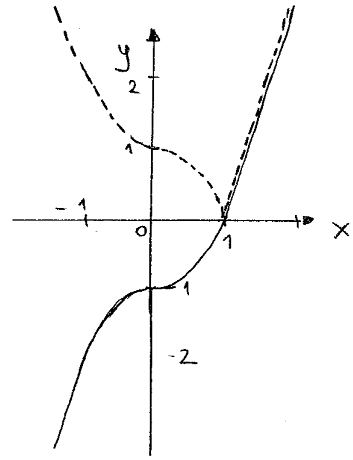
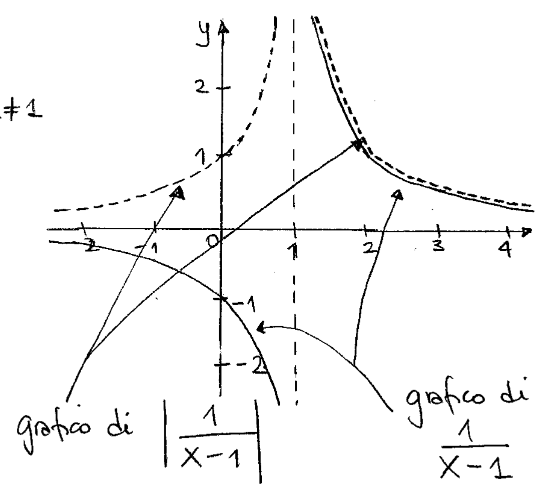


grafico di x^3-1 ———

grafico di $|x^3-1|$ - - - -

(v) $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|$ $\quad\underline{\underline{x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}}}$

($\dfrac{1}{x-1}$ è definita per $x \neq 1$
e $|x|$ è definita su $\mathbb{R}$)



Potenze

ⓐ Potenze ad esponente intero positivo : sia $m = 1, 2, 3, \dots$; $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{x^m \doteq \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{m\text{-volte}}}$$

(potenza di base x ed esponente m)

(vedi pag. 91 ⓒ, pag. 92 ⓕ per rappresentazione grafica di $x \longmapsto x^m$)

Inoltre, per $m=0$, si definisce

$$\boxed{x^0 = 1}$$

(in particolare, $0^0 = 1$)

Segue facilmente che valgono le seguenti proprietà:

$$\boxed{\left.\begin{array}{ll} i) & x^m \cdot x^n = x^{m+n} \\ ii) & (x^m)^n = x^{mn} \\ iii) & (xy)^m = x^m y^m \end{array}\right\} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \ \forall m, n \in \mathbb{N}}$$

Esempio: $(x^3 y^5)^2 (x^2 y)^3 = x^{3 \cdot 2} y^{5 \cdot 2} x^{2 \cdot 3} y^3 =$

$= x^6 y^{10} x^6 y^3 = x^{6+6} y^{10+3} =$

$= x^{12} y^{13}$

e questo è vero $\forall x, y \in \mathbb{R}$. ■

ⓑ Potenze ad esponente intero negativo : sia $m = -1, -2, -3, \dots$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

si definisce

$$\boxed{x^m \doteq \left(\frac{1}{x}\right)^{-m} = \frac{1}{x^{-m}}}$$

$\Big(= \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdots \frac{1}{x}}_{-m \text{ volte}} \Big)$ NOTA: $-m > 0$!!

(vedi pag. 91 ⓓ, pag. 93 ⓖ per rappresentazione grafica di $x \longmapsto \frac{1}{x^{-m}}$ $(-m>0)$)

Esempio: $x^{-2} \doteq \dfrac{1}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\};$

$x^{-5} \doteq \dfrac{1}{x^5} \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$ $\square$

Valgono ancora le seguenti proprietà:

$$\boxed{\left.\begin{array}{ll} i) & x^m \cdot x^n = x^{m+n} \\ ii) & (x^m)^n = x^{mn} \\ iii) & (xy)^m = x^m y^m \end{array}\right\} \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \forall\, m,n \in \mathbb{Z}}$$

Esempio: $(x^{-3}y^5)^2 (x^2 y^{-1})^{-3} = x^{-3\cdot 2} y^{5\cdot 2} x^{2(-3)} y^{(-1)\cdot(-3)}$

$= x^{-6} y^{10} x^{-6} y^3$

$= x^{-12} y^{13}$

e questo è vero $\forall\, x,y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. $\blacksquare$

Ⓒ Potenze ad esponente frazionario: Sia $n = 1, 2, 3, \ldots$ allora

se n è pari $\boxed{x^{1/n}}$ $(= \sqrt[n]{x})$ è l'unico numero reale ≥ 0 t.c. $(x^{1/n})^n = x$.

Se n è dispari $\boxed{x^{1/n}}$ $(= \sqrt[n]{x})$ è l'unico numero reale t.c. $(x^{1/n})^n = x$.

(vedi pag. 92 ⓔ, pag. 93 ⓗ per rappresentazione grafica di $x \longmapsto x^{1/n}$).

Esempio: $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$; infatti $2^3 = 8$.

$(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$; infatti $(-2)^3 = -8$.

$4^{1/2} = \sqrt[2]{4} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Convenzione usuale}}}{=} \sqrt{4} = 2$; infatti $2^2 = 4$.

$16^{1/4} = \sqrt[4]{16} = 2$; infatti $2^4 = 16$.

$(-16)^{1/4}$ non ha senso!! $\nexists\, x : x^4 = -16$!! $\blacksquare$

Sia ora $\boxed{q = \frac{m}{n} > 0}$ $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, primi tra loro.

Per poter dare una buona definizione di $x^{\frac{m}{n}}$, cioè tale che

$$\boxed{x^{\frac{m}{n}} \doteq \left(x^{1/n}\right)^m = \left(x^m\right)^{1/n}}$$

qualunque siano $m, n \in \mathbb{N}$

conviene restringerci agli $\underline{x \geq 0}$.

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

<u>Esempio</u>: $16^{3/4} = \left(16^{1/4}\right)^3 = 2^3 = 8$.

$$49^{3/2} = \left(49^{1/2}\right)^3 = 7^3 = 343. \qquad \blacksquare$$

<u>NOTA</u>: Se m e n sono dispari, oppure m pari e n dispari, allora

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{1/n}\right)^m = \left(x^m\right)^{1/n} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

<u>Esempio</u>: $(-8)^{2/3} = \left[(-8)^{1/3}\right]^2 = (-2)^2 = 4$

$$= \left[(-8)^2\right]^{1/3} = (64)^{1/3} = 4. \qquad \square$$

$$(-8)^{5/3} = \left[(-8)^{1/3}\right]^5 = (-2)^5 = -32$$

$$= \left[(-8)^5\right]^{1/3} = (-32.768)^{1/3} = -32.$$

$\blacksquare$

Sia infine $\boxed{q = -\frac{m}{n} < 0}$ $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ primi tra loro.

Poniamo

$$\boxed{x^{-\frac{m}{n}} \doteq \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}}} \quad \forall x > 0.$$

Si ha

$$\left.\begin{array}{ll} i) & x^{\frac{m}{n}}\, x^{\frac{p}{r}} = x^{\frac{m}{n}+\frac{p}{r}} \\ ii) & \left(x^{m/n}\right)^{p/r} = x^{mp/nr} \\ iii) & (xy)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}}\, y^{\frac{m}{n}} \end{array}\right\} \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R},\ x,y>0 \quad \forall\, \frac{m}{n}, \frac{p}{r} \in \mathbb{Q}.$$

Esercizio 1. Dati $x, y, z > 0$, utilizzando le proprietà delle potenze, semplificate le seguenti espressioni:

i) $\left(\left(x^4\right)^{3/2} \cdot x^{-1}\right)^{1/2} =$

ii) $\dfrac{x^2 + x^3}{\sqrt{x}} =$

iii) $\left(\dfrac{x^{4/3}\, y^{3/2}}{zx}\right)^2 =$

Svolgimento:

i) $\left(\left(x^4\right)^{3/2} \cdot x^{-1}\right)^{1/2} = \left(x^{4\cdot\frac{3}{2}}\, x^{-1}\right)^{1/2} = \left(x^6 \cdot x^{-1}\right)^{1/2} = x^{5/2}.$ $\square$

ii) $\dfrac{x^2 + x^3}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^2}{x^{1/2}} + \dfrac{x^3}{x^{1/2}} = x^{2-\frac{1}{2}} + x^{3-1/2} = x^{3/2} + x^{5/2}.$ $\square$

iii) $\left(\dfrac{x^{4/3}\, y^{3/2}}{zx}\right)^2 = \dfrac{x^{8/3}\, y^3}{zx} = \dfrac{x^{8/3-1}\, y^3}{z} = \dfrac{x^{5/3}\, y^3}{z} = x^{5/3} y^3 z^{-1}.$ $\blacksquare$

Esercizio 2. Dati $x, y, z > 0$, utilizzando le proprietà delle potenze, semplificate le seguenti espressioni:

i) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[6]{x^5}} =$ ii) $\left(4\, \dfrac{x^{1/3}\, y^{1/2}}{z\, y^{1/4}}\right)^{3/2} =$

Svolgimento:

i) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[6]{x^5}} = \dfrac{\left(x^{1/2}\, x^{1/3}\right)^{1/2}}{x^{5/6}} = \dfrac{x^{1/4}\, x^{1/6}}{x^{5/6}} = x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{5}{6}} = x^{-5/12}$

$= \dfrac{1}{x^{5/12}} = \dfrac{1}{\sqrt[12]{x^5}}.$ $\square$

ii) $$\left(4\,\frac{x^{\frac{1}{3}}\,y^{\frac{1}{2}}}{z\,y^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8\,x^{\frac{1}{2}}\,y^{\frac{3}{4}}}{z^{\frac{3}{2}}\,y^{\frac{3}{8}}} = 8\,\frac{x^{\frac{1}{2}}\,y^{\frac{3}{4}-\frac{3}{8}}}{z^{\frac{3}{2}}} = 8\,\frac{x^{\frac{1}{2}}\,y^{\frac{3}{8}}}{z^{\frac{3}{2}}}$$
$$= 8\,\frac{\sqrt{x}\,\sqrt[8]{y^3}}{\sqrt{z^3}}\,.$$

■

NOTA:

Se fissiamo ora un certo numero reale $a>0$, per quanto visto sopra, risulta ben determinato il valore

$$a^m \quad \forall m\in\mathbb{Z} \qquad \text{(vedi pag. 127)}$$

$$a^{\frac{m}{n}} \quad \forall m,n\in\mathbb{Z}\ \ n\neq 0 \qquad \text{(vedi pag. 129)};$$

quindi rimane ben definita la funzione

$$x \longmapsto a^x \qquad \forall x\in\mathbb{Q}\,.$$

Se $a=1$ si ha $x\longmapsto 1^x=1$ $\forall x\in\mathbb{Q}$ e si estende la funzione a tutto $\mathbb{R}$ ponendo $1^x=1$ $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

Se $a>0$, $a\neq 1$ (caso generale), allora si può estendere la funzione a^x (definita per ora solo per $x\in\mathbb{Q}$) a tutti $x\in\mathbb{R}$. Per fare questo si ha bisogno della <u>completezza dei numeri reali</u> (che noi non abbiamo visto!!!; questa proprietà dei numeri reali non viene goduta dai numeri razionali $\mathbb{Q}$). Noi non ci preoccupiamo della definizione di a^x per $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, ma semplicemente enunciamo le proprietà di a^x, $\forall x\in\mathbb{R}$, e rappresentiamo il suo grafico come segue.

Funzione esponenziale

Come enunciato sopra si può definire la funzione

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto a^x \qquad \text{funzione esponenziale in base } a$$

$$(a>0, \; a \neq 1 \text{ fissato})$$

che verifica le seguente proprietà:

Proposizione: Posto $f(x) = a^x$, allora

i) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ $\qquad f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$;

ii) $f(0) = a^0 = 1$ $\qquad f(1) = a^1 = a$;

iii) se $0 < a < 1$, $\quad f(x) = a^x$ è decrescente;
se $a > 1$, $\quad f(x) = a^x$ è crescente.

ⓐ $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2} \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;

ⓑ $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2} \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

$0 < a < 1$

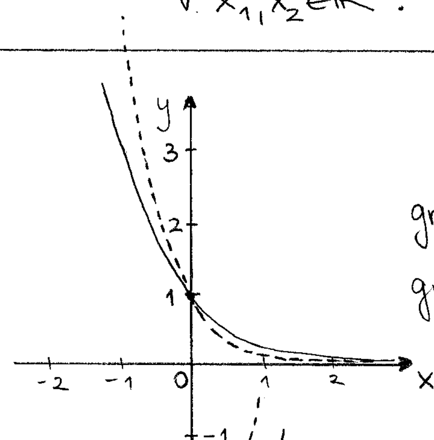


grafico di $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ ——

grafico di $\left(\frac{1}{5}\right)^x$ - - - -

$a > 1$

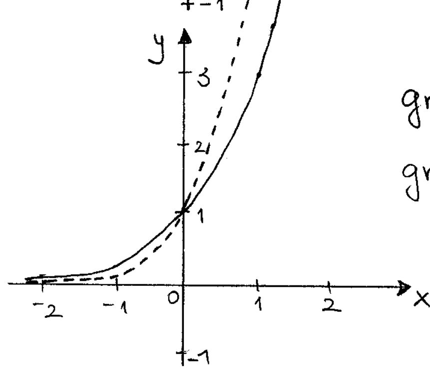


grafico di 3^x ——

grafico di 5^x - - - -

<u>Caso speciale</u>: $a = e = 2.71828\ldots$ <u>numero di Nepero</u>. La cosa importante da ricordare di e è il fatto che $e > 1$!! $\square$