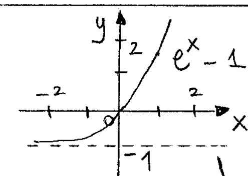
Commenti alla lezione del 16/11/2005 (12ª lezione Corso)

Riferimento bibliografico : [1] Cap. 3 Sez. 3.7 (pag. 87, pag. 88 fino a metà)

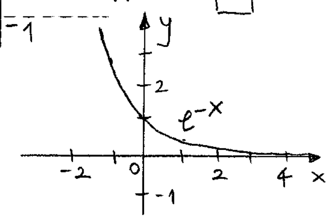
Esercizio 1. Disegnate, nei rispettivi domini di definizione, i grafici di
$e^x - 1$; e^{-x} ; $-e^x$; $e^{|x|}$; e^{x-1}.

Svolgimento:

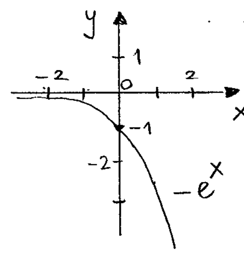
i) $f(x) = e^x - 1$ $\qquad \underline{\underline{\mathbb{R}}}$



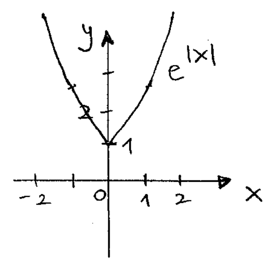
ii) $f(x) = e^{-x}$ $\left(= \frac{1}{e^x}\right)$ $\qquad \underline{\underline{\mathbb{R}}}$



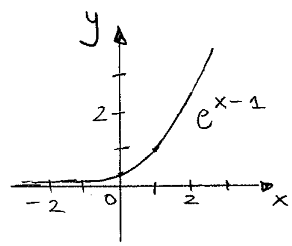
iii) $f(x) = -e^x$ $\qquad \underline{\underline{\mathbb{R}}}$



iv) $f(x) = e^{|x|}$ $\qquad \underline{\underline{\mathbb{R}}}$



v) $f(x) = e^{x-1}$ $\qquad \underline{\underline{\mathbb{R}}}$



Esercizio 2. Risolvete (in $\mathbb{R}$) le seguenti disequazioni:

i) $2^x \leq 0$; $\qquad$ ii) $2^x > 1$;

iii) $2^{x^2 - x} \leq 1$; $\qquad$ iv) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - x} \leq 1$;

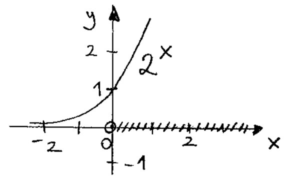
v) $e^{-x+1} > 0$;

vi) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2 - 1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Svolgimento: Nello svolgimento di questi esercizi sfrutteremo principalmente la rappresentazione grafica della funzione esponenziale a^x e la proprietà di monotonia di a^x. .

i) $2^x \leq 0$: <u>Soluzione : $\emptyset$</u> poiché $\forall x \in \mathbb{R}$, $2^x > 0$!! $\square$

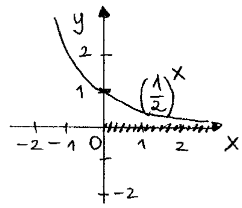
ii) $2^x > 1$:



<u>Soluzione</u> : $]0, +\infty[$ $\square$

iii) $2^{x^2-x} \leq 1$: $\iff$ $x^2 - x \leq 0$ $\Rightarrow$ <u>Soluzione</u> : $[0,1]$. $\square$

iv) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} \leq 1$:



$\iff$ $x^2 - x \geq 0$ $\Rightarrow$ <u>Soluzione</u> : $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ $\square$

v) $e^{-x+1} > 0$: <u>Soluzione</u> : $\mathbb{R}$ poiche $e^{\square} > 0$ $\forall \square \in \mathbb{R}$ $\square$

vi) $2^{x+1} \leq 2^3$: se $x + 1 \leq 3$

(ricordiamo che una funzione f è crescente se

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

inoltre $f(x) = 2^x$ è crescente su $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ <u>Soluzione</u> : $]-\infty, 2]$. $\square$

vii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x$: se $x^2 - 2 \geq x$

(ricordiamo che una funzione f è decrescente se

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

inoltre $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ è decrescente su $\mathbb{R}$)

$\iff$ $x^2 - x - 2 \geq 0$ $\iff$ $(x-2)(x+1) \geq 0$

$\Rightarrow$ <u>Soluzione</u> : $]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$ $\blacksquare$

Esercizio 3. Risolvete (in $\mathbb{R}$) le seguenti equazioni:

i) $\dfrac{e^{2x^2}\cdot e}{e^{2x}} = e^{x^2-\frac{1}{2}(x-1)}$ ii) $\dfrac{e^{x^2}}{e^3 \cdot e^{2x}} = e$.

Svolgimento:

i) Abbiamo $\dfrac{e^{2x^2}\cdot e^1}{e^{2x}} = e^{2x^2+1}\, e^{-2x} = e^{2x^2-2x+1}$.

Poichè e^x è crescente si ha $e^{x_1} = e^{x_2} \Longleftrightarrow x_1 = x_2$.

Quindi $e^{2x^2-2x+1} = e^{x^2-\frac{1}{2}(x-1)} \Longleftrightarrow$

$$2x^2-2x+1 = x^2-\frac{1}{2}(x-1) \quad ;$$

Otteniamo $x^2-2x+\frac{1}{2}x+1-\frac{1}{2} = 0$, ossia

$$2x^2-3x+1=0 \quad ,$$

da cui $x_{1/2} = \dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{4} = \dfrac{3\pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$. Quindi

l'insieme delle soluzioni dell'eq. data è $\underline{\underline{\{\frac{1}{2}, 1\}}}$. □

ii) Abbiamo $\dfrac{e^{x^2}}{e^3\cdot e^{2x}} = e \Longleftrightarrow e^{x^2-2x-3} = e^1$;

Come in i) si ottiene $e^{x^2-2x-3} = e^1 \Longleftrightarrow x^2-2x-3=1$,

ossia

$$x^2-2x-4=0 \quad ;$$

otteniamo $x_{1/2} = \dfrac{2\pm\sqrt{4+16}}{2} = \dfrac{\cancel{2}\pm\cancel{2}\sqrt{5}}{\cancel{2}}$. Quindi

l'insieme delle soluzioni dell'eq. data è $\{1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}\}$. ■

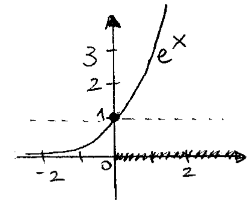
Esercizio 4. Determinate gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni:

i) $\dfrac{1}{e^x-1}$; ii) $\sqrt{e^x-1}$; iii) $\sqrt{e^{2x}-e^x}$.

Svolgimento:

i) Dobbiamo avere $e^x-1\neq 0$, ossia $e^x\neq 1$; quindi $x\neq 0$;

Allora l'insieme di definizione di $\dfrac{1}{e^x-1}$ è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. $\square$



ii) Dobbiamo avere $e^x-1\geq 0$, ossia $e^x\geq 1$.

Si ottiene subito dal grafico di e^x che

$e^x\geq 1$ se e solo se $x\geq 0$.

Quindi l'insieme di definizione di $\sqrt{e^x-1}$ è $[0,+\infty[$. $\square$

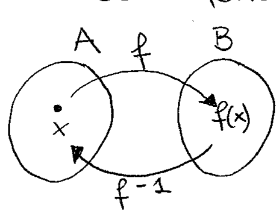
iii) Dobbiamo avere $e^{2x}-e^x\geq 0$, ossia $e^x(e^x-1)\geq 0$.

Siccome $e^x>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, basta avere $e^x-1\geq 0$. Da ii) si ha che l'insieme di definizione di $\sqrt{e^{2x}-e^x}$ è $[0,+\infty[$. $\blacksquare$

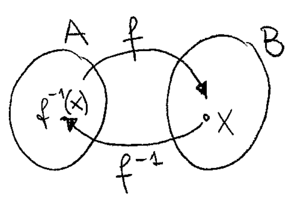
OSS. IMPORTANTE: Sia $f: A\to B$ biiettiva; allora

$\exists\ f^{-1}: B\to A$ biiettiva (funzione inversa)

Esse soddisfano allora



$$\boxed{(f^{-1}\circ f)(x)} = f^{-1}(f(x)) = \boxed{x} \quad \forall x\in A$$



$$\boxed{(f\circ f^{-1})(x)} = f(f^{-1}(x)) = \boxed{x} \quad \forall x\in B.$$

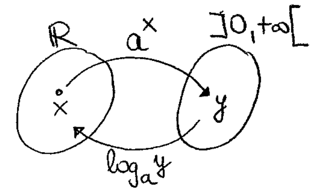
Funzione logaritmo

Notiamo che $\forall a>0,\ a\neq 1$ la funzione $a^x : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ è biiettiva; quindi esiste la funzione inversa: essa si chiama funzione logaritmo in base a. Si ha

$$\log_a x :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

e vale

$$\boxed{\begin{matrix} a^x = y \\ x\in\mathbb{R} \end{matrix} \iff \begin{matrix} x=\log_a y \\ y>0 \end{matrix}}.$$



Questo si può anche scrivere

$$\boxed{\begin{array}{lll} a^{\log_a x} = x & & \forall x>0 \\ \log_a(a^x) = x & & \forall x\in\mathbb{R}. \end{array}}$$

(vedi Oss. pag. 136)

NOTAZIONE: Se $a = e$ useremo la notazione $\boxed{\log x}$ invece della notazione $\log_e x$ (nei libri tecnici spesso viene usato la notazione $\ln x$ invece di $\log_e x$).

Dalle proprietà di a^x seguono facilmente le seguenti proprietà:

Proposizione: Posto $f(x) = \log_a x$, allora

i) $\mathrm{dom} f =]0,+\infty[$, $f(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$;

ii) $f(1) = \log_a 1 = 0$ $\quad f(a) = \log_a a = 1$;

iii) se $0<a<1$, $f(x) = \log_a x$ è decrescente;
se $a>1$, $f(x)=\log_a x$ è crescente.

Inoltre

ⓐ $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \qquad \forall x_1, x_2 > 0$;

ⓑ $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2 \qquad \forall x_1, x_2 > 0$;

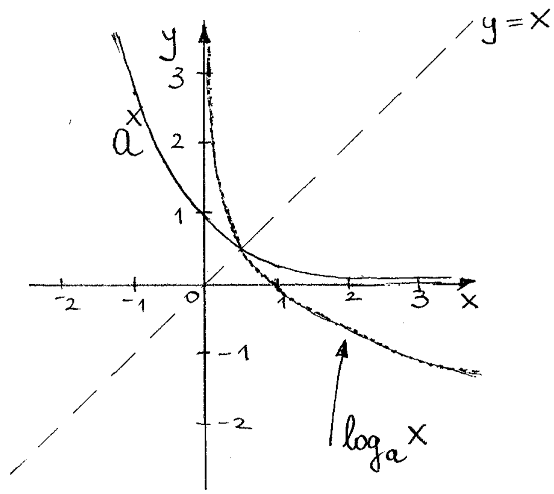
ⓒ $\log_a\left(x_1^{x_2}\right) = x_2 \log_a x_1 \qquad \forall x_1 > 0, \ \forall x_2 \in \mathbb{R}$.

Infine abbiamo la seguente regola per cambiare base nel logaritmo :

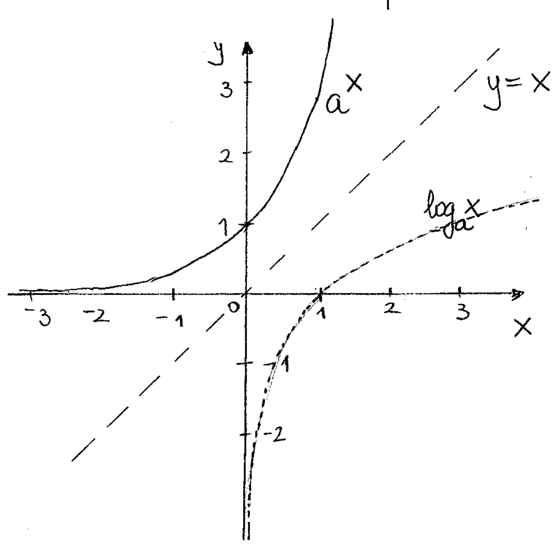
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad \forall x > 0, \quad \forall a, b > 0 \quad \begin{matrix} a \neq 1 \\ b \neq 1. \end{matrix}$$

Rappresentazione grafica:

$0 < a < 1$



$a > 1$



Esercizio 1. Calcolate il valore dei seguenti logaritmi:

$\log_2 8 =$ $\quad$ $\log_{10} 10 =$ $\quad$ $\log_7 1 =$ $\quad$ $\log_8 4 =$

$\log_{\frac{1}{8}} 4 =$ $\quad$ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} =$

Svolgimento:

$\log_2 8 = 3$: infatti $2^3 = 8$.

$\log_{10} 10 = 1$: infatti $10^1 = 10$.

$\log_7 1 = 0$: infatti $7^0 = 1$.

$\log_8 4 = \frac{2}{3}$: infatti $8^x = 4 \iff (2^3)^x = 2^2 \iff 2^{3x} = 2^2 \iff 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$.

$\log_{\frac{1}{8}} 4 = -\frac{2}{3}$: infatti $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 4 \iff 2^{-3x} = 2^2 \iff x = -\frac{2}{3}$.

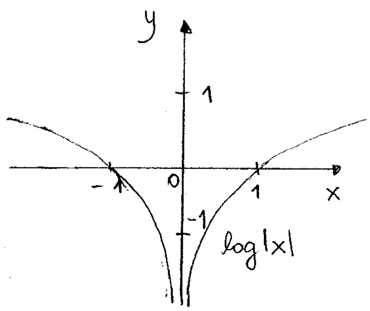
$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$: infatti $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. ■

Esercizio 2. Determinate gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni e rappresentateli graficamente:

$\log|x|$; $\quad$ $\log(x-2)$; $\quad$ $|\log x|$; $\quad$ $|\log|x||$.

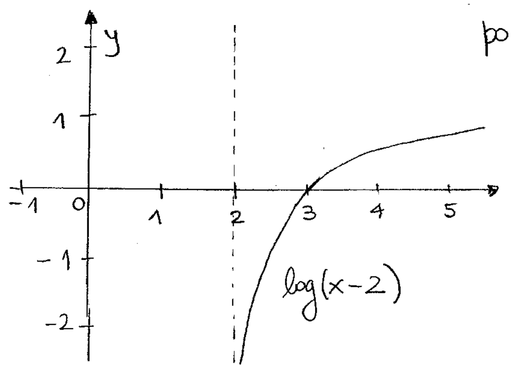
Svolgimento:

$\log|x|$ $\qquad$ $\underline{\underline{\mathbb{R}\setminus\{0\}}}$ $\qquad$ (ricordiamo che $|x| \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $= 0 \iff x = 0$; inoltre $\log x$ è definito solo per $x > 0$)

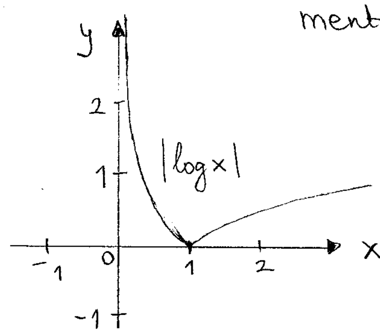


□

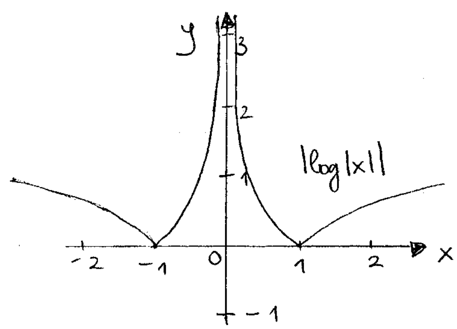
$\log(x-2)$ $\qquad \underline{\underline{]2,+\infty[}}$ $\qquad$ (l'argomento del log deve essere positivo!)



$|\log x|$ $\qquad \underline{\underline{]0,+\infty[}}$ $\qquad$ (l'argomento del log deve essere positivo, mentre $|\cdot|$ è definito su tutto $\mathbb{R}$)



$|\log|x||$ $\qquad \underline{\underline{\mathbb{R}\setminus\{0\}}}$



Esercizio 3. Determinate l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

$$\frac{1}{\log(x-2)}\ ; \qquad \frac{1}{\sqrt{\log(x-2)}}\ ; \qquad \log x^2\ ; \qquad \frac{1}{\log|x|}\ ; \qquad \frac{1}{\log(1+x^2)}.$$

Svolgimento:

$\dfrac{1}{\log(x-2)}$: deve essere $\begin{cases} x-2>0 & \text{altrimenti non è def. log} \\ \log(x-2)\neq 0 & \text{non possiamo dividere per 0!} \end{cases}$

Deve essere allora $\begin{cases} x > 2 \\ x-2 \neq 1 \end{cases}$ (ricorda $\log_a 1 = 0$ $\forall a>0\ a\neq 1$)

$\Rightarrow$ insieme definizione $= \,]2,+\infty[\, \setminus \{3\}$. $\square$

$\dfrac{1}{\sqrt{\log(x-2)}}$: deve essere $\begin{cases} x-2>0 \\ \log(x-2)>0 \end{cases}$ (altrimenti non è definito log) (l'argomento sotto la radice quadrata deve essere ≥ 0 ed inoltre non possiamo dividere per 0!)

Quindi $\begin{cases} x-2>0 \\ x-2>1 \end{cases}$ (abbiamo che log $\nearrow$)

$\Rightarrow$ insieme definizione $= \,]3,+\infty[$. $\square$

$\log x^2$: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (poiché $x^2 \geq 0$ e $=0 \Leftrightarrow x=0$). $\square$

$\dfrac{1}{\log|x|}$: deve essere $\begin{cases} |x| \neq 0 \\ \log|x| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ |x| \neq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ insieme definizione $= \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$. $\square$

$\dfrac{1}{\log(1+x^2)}$: abbiamo che $1+x^2 \geq 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$ e quindi è definito bene $\log(1+x^2)$ $\forall x \in\mathbb{R}$. Ma poiché $\log(1+x^2) = \log 1 = 0$ se $x=0$, si ha

$\Rightarrow$ insieme di definizione $= \mathbb{R}\setminus\{0\}$. $\blacksquare$

Esercizio 4. Calcolate

$\log_2 4 - \log_2 16 =$ $\qquad$ $(\log_3 9)(\log_3 27) =$ $\qquad$ $e^{\log(-10)^2} =$

$$\frac{3\log 2 - \log 10}{\frac{1}{2}(\log 4 - \log 5)} =$$

Svolgimento:

$$\log_2 4 - \log_2 16 = 2 - 4 = \underline{\underline{-2}}. \qquad \square$$

$$(\log_3 9)(\log_3 27) = 2 \cdot 3 = \underline{\underline{6}}. \qquad \square$$

$$e^{\log(-10)^2} = (-10)^2 = \underline{\underline{100}}. \qquad \square$$

$$\frac{3\log 2 - \log 10}{\frac{1}{2}(\log 4 - \log 5)} = \frac{\log 2^3 - \log 10}{\frac{1}{2}\left(\log \frac{4}{5}\right)} = 2\left(\frac{\log 8 - \log 10}{\log \frac{4}{5}}\right) = 2\,\frac{\log \frac{\cancel{8}^{\,4}}{\cancel{10}_{\,5}}}{\log \frac{4}{5}} =$$

$$= 2\,\cancel{\frac{\log 4/5}{\log 4/5}} = \underline{\underline{2}}. \qquad \blacksquare$$

Esercizio 5. Risolvete, usando le conoscente sulle funzioni elementari (e in particolare la monotonia) le seg. disequazioni:

$\log_5 x > 1$; $\qquad$ $\log_5 x \geq 2$; $\qquad$ $\log(1+x^2) \leq \log 4$;

$\log_{1/2} x^2 \leq \log_{1/2}(1+x)$.

$\log_5 x > 1$:
$$\begin{cases} x > 0 & \text{(altrimenti } \log_5 \text{ non è definito)} \\ \log_5 x > \log_5 5 & \text{(ricordare } \log_a a = 1 \text{ !!)} \end{cases}$$

Poichè $\log_5 x$ è crescente, questo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x > 0 \\ x > 5 \end{cases};$$ abbiamo allora $\{\text{Soluzione}\} = \underline{\underline{]5, +\infty[}}$.

$\square$

$\log_5 x \geq 2$:
$$\begin{cases} x > 0 & (\text{così è definito } \log_5) \\ \log_5 x \geq \log_5 25 & (\log_a a^b = b) \end{cases}$$

Poiché $\log_5 x$ è crescente, questo sistema è equivalente

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \geq 25 \end{cases}$$; abbiamo allora $\{\underline{\text{soluzione}}\} = [25, +\infty[$.

$\square$

$\log(1+x^2) \leq \log 4$:
$$\begin{cases} 1+x^2 > 0 \\ 1+x^2 \leq 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2 \leq 3 \end{cases}$$

$\{\underline{\text{soluzione}}\} = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

$\square$

$\log_{\frac{1}{2}} x^2 \leq \log_{\frac{1}{2}} (2+x)$:
$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ 2+x > 0 \\ x^2 \geq (2+x) \end{cases}$$
(ricordiamo che $\log_{1/2} x$ è decrescente, quindi $\log_{1/2} x_1 \leq \log_{1/2} x_2$ solo se $x_1 \geq x_2$)

quindi
$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x > -2 \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x > -2 \\ x \leq -1 \text{ o } x \geq 2 \end{cases}$$

$\{\underline{\text{soluzione}}\} =]-2, -1] \cup [2, +\infty[$.

$\blacksquare$