Commenti alla lezione del 14/12/2005 (24ª lezione Corso)

Riferimento bibliografico: [2] Cap. 2 Sez. 2.2 (pag. 25 - 26).

Ancora qualche primitiva "immediata": dalla regola di derivazione di una funzione composta seguono immediatamente le seguenti primitive:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} \quad (+c) \\ &\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| \quad (+c). \end{aligned}}$$

**Esercizio 1.** Calcolate i seguenti integrali

i) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx$ ; ii) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx$ ; iii) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{3x+1}\,dx$ ;

iv) $\displaystyle 2\int_0^1 e^{x^2} x\,dx$ ; v) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x}{x^2+1}\,dx$ .

Svolgimento:

i) $$\int_0^1 e^{-x}\,dx = -\int_0^1 \underbrace{-}_{f'(x)} e^{\overbrace{-x}^{f(x)}}\,dx = -\left[e^{-x}\right]_0^1 = -\left[e^{-1} - e^0\right] = -\frac{1}{e} + 1. \quad \square$$

ii) $$\int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{2}_{f'(x)}\, e^{\overbrace{2x}^{f(x)}}\,dx = \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - e^0\right) = \frac{1}{2}(e^2-1). \quad \square$$

iii) $$\int_1^2 \frac{1}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{\overset{f'(x)}{3}}{\underbrace{3x+1}_{f(x)}}\,dx = \frac{1}{3}\Big[\log|3x+1|\Big]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\log 7 - \log 4\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}\log\left(\frac{7}{4}\right)}}.$$

iv) $$2\int_0^1 e^{x^2} x\,dx = \int_0^1 e^{\overset{f(x)}{x^2}}\underbrace{(2x)}_{f'(x)}\,dx = \Big[e^{x^2}\Big]_0^1 = \underline{\underline{e-1}}.$$

v) $$\int_1^2 \frac{3x}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\int_1^2 \frac{\overset{f'(x)}{2x}}{\underbrace{x^2+1}_{f(x)}}\,dx = \frac{3}{2}\Big[\log\left(x^2+1\right)\Big]_1^2 =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\log 5 - \log 2\right) = \underline{\underline{\frac{3}{2}\log\frac{5}{2}}}.$$

---

**Esercizio 2.** Calcolate l'area della regione piana compresa tra i grafici delle

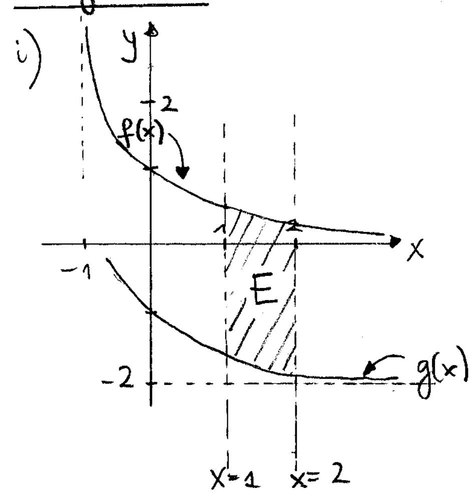
i) funzioni $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ , $g(x) = e^{-x} - 2$ e le rette $x = 1$, $x = 2$;

ii) funzioni $f(x) = \sqrt{|x|}$ , $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ e le rette $x = -1$, $x = 0$.

---

**Svolgimento:**

i)




$$\text{area}(E) = \int_1^2 \left(f(x) - g(x)\right)dx =$$

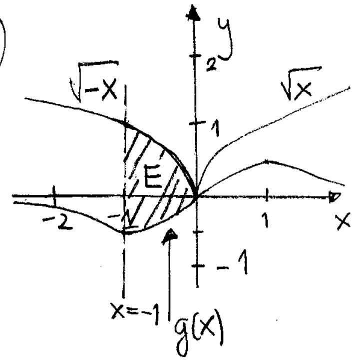
$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - e^{-x} + 2\right)dx =$$

$$= \Big[\log(x+1)\Big]_1^2 + \Big[e^{-x}\Big]_1^2 + \Big[2x\Big]_1^2$$

$$= \log\frac{3}{2} + e^{-2} - e^{-1} + 4 - 2$$

$$= \underline{\underline{\log\frac{3}{2} + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e} + 2}}.$$

ii)




$$\text{area}(E) = \int_{-1}^{0} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(\sqrt{-x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \left((-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \left[\frac{(-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}(-1) - \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right)\right]_{-1}^{0}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\log 2.}}$$

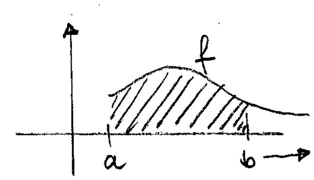
■

## Integrali generalizzati (cenno)

La nozione di integrale può essere estesa al caso di intervalli illimitati, per esempio, $[a,+\infty[$, oppure $]-\infty,a]$, oppure $]-\infty,+\infty[$.

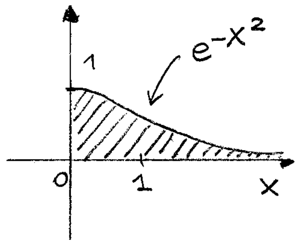
Consideriamo, per esempio, $f : [a,+\infty[ \to \mathbb{R}$ continua. Poniamo

$$(*) \quad \boxed{\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx}$$




Se il limite in $(*)$ esiste finito, allora $f$ si dice integrabile su $[a,+\infty[$, oppure l'integrale $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente.

Vogliamo osservare che $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ è convergente:




Notiamo che, per $x > 1$ si ha $x^2 > x$

e quindi $-x^2 < -x$

e dalla monotonia della funzione esponenziale segue che

$$e^{-x^2} < e^{-x} \qquad \text{per } x>1.$$

Dalla monotonia dell'integrale segue

$$0 < \int_1^b e^{-x^2}\,dx < \int_1^b e^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}\Big]_1^b$$

$$= \left[-e^{-b} + \frac{1}{e}\right] \xrightarrow[b\to+\infty]{} \frac{1}{e}$$

Quindi

$$0 < \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx < \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}dx$$

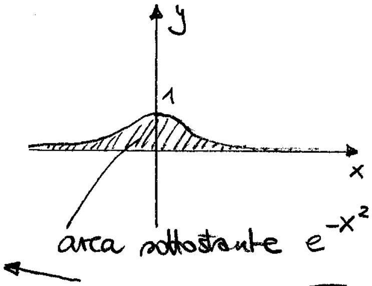
$$< \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2}dx + \frac{1}{e}}_{\text{e questo è un numero finito !}} ;$$

Si dimostra che, non solo $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ è convergente, ma

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad ;$$

quindi (per simmetria)

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}}$$



**Esercizio 3.** Determinate $a, b > 0$ tali che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-bx^2} = 1.$$

Svolgimento:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-bx^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-(\sqrt{b}x)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-t^2} \frac{1}{\sqrt{b}} dt =$$

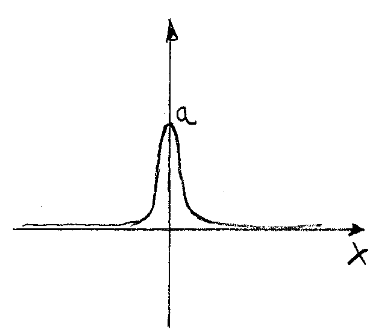
$$\sqrt{b}x = t \qquad x = \frac{t}{\sqrt{b}} \qquad dx = \frac{1}{\sqrt{b}} dt$$

$$= \frac{a}{\sqrt{b}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{a}{\sqrt{b}} \sqrt{\pi}.$$

Dobbiamo allora imporre $\frac{a}{\sqrt{b}}\sqrt{\pi} = 1$, ossia $\underline{\underline{a^2 \pi = b}}$.

■

NOTA: Se $a$ cresce ($\Rightarrow$ la campana si alza sempre di più)
anche $b$ cresce ($\Rightarrow$ la campana diventa sempre più stretta!)




□

## Elementi di Calcolo combinatorio

### Permutazioni semplici :

dati n oggetti distinti, disposti in fila in un certo ordine, ogni altro modo di disporli in fila si chiama permutazione della disposizione di partenza; se indichiamo con

$P_n$ = numero totale di permutazioni di n-oggetti, cioè il numero di modi diversi in cui questi oggetti possono essere disposti in fila, si ha

$$\boxed{P_n = n!}$$

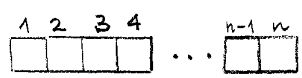
( $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$

così $7! = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ )

Poniamo $0! = 1$. □

Dim. Consideriamo n scatole come in figura




Il numero delle permutazioni di n oggetti è uguale al numero dei modi in cui si possono mettere gli oggetti nelle scatole. La 1ª scatola si può riempire in n modi. Riempita la 1ª scatola, si può riempire la 2ª in (n-1) modi con i restanti oggetti. Così, il complesso delle prime 2 scatole si può riempire in $n(n-1)$ modi. Il complesso delle prime 3 scatole si può riempire in $n(n-1)(n-2)$ modi. Procedendo in questo modo si ottiene che il complesso delle n scatole si può riempire in $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ modi. □

<u>Esercizio 1</u>: In quanti modi si possono disporre 7 persone in fila indiana?

<u>Svolgimento</u>: $P_7 = \underline{\underline{7!}} \; (= 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)$ ■

<u>Permutazioni con ripetizioni</u>:

dati $n$ oggetti di cui

$k_1$ uguali tra loro

$k_2$ uguali tra loro e distinti dai precedenti

⋮

$k_m$ uguali tra loro e distinti dai precedenti

con

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n ,$$

il numero totale di permutazioni distinte di questi oggetti, indicato con $P_n^{k_1,\dots,k_m}$, è

$$\boxed{P_n^{k_1,\dots,k_m} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdots k_m!}}$$

Cerchiamo di spiegare la validità di questa formula mediante un esempio. Consideriamo 5 oggetti $aaabb$ di cui tre uguali tra loro e due uguali fra loro e distinti dai precedenti. È evidente che, non distinguendo più gli $a$ fra loro, ecc., il numero delle permutazioni sui 5 oggetti sarà minore di $5!$. Per calcolarlo, distinguiamo con un indice gli oggetti uguali: $a_1 a_2 a_3 b_1 b_2$; consideriamo una qualsiasi delle $5!$ permutazioni di questi oggetti distinti, per esempio, $b_2 a_1 a_2 b_1 a_3$. Se ora togliamo l'indice delle tre lettere $a$, esse possono essere permutate in uno qualunque dei $3!$ modi della terna dei posti da esse occupati senza che le permutazioni si distinguano tra loro ; ciò significa che le permutazioni con gli elementi $a_1\, a_2\, a_3$ non distinti tra loro risultano ora $\frac{5!}{3!}$ . Con analogo ragionamento, se ora togliamo gli indici anche alla lettera b, concludiamo che le permutazioni sono $\frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\, \cancel{2}} = 10$ □

---

Esercizio 2: Quanti sono i possibili anagrammi della parola STUDENTE ?

---

Svolgimento : $P_8^{1,2,1,1,2,1} = \frac{8!}{2!\,2!}$ ■

NOTA: Se $k_i = 1$, delle volte, per brevità, omettiamo la sua scrittura. In questo caso, $P_8^{1,2,1,1,2,1}$ scriviamo $P_8^{2,2}$ □

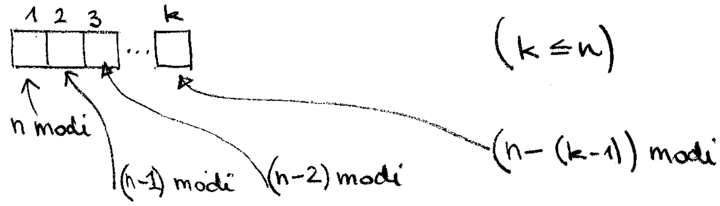
Disposizioni semplici :

(distinti !)

Studiamo ora il problema delle disposizioni di n oggetti presi a k per volta, dove $k \leq n$ : queste, il cui numero è indicato con $D_{n,k}$, sono i modi distinti in cui possiamo disporre in fila k oggetti scelti tra un gruppo di n (Attenzione : importa l'ordine !!). Si ha

$$\boxed{D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Per provare tale formula possiamo procedere in modo analogo a quello visto per $P_n$. Consideriamo $k$ scatole come in figura




$(k \leq n)$

Il complesso delle $k$ scatole si può riempire in $n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ modi; quindi il numero di modi distinti in cui possiamo disporre in fila $k$ oggetti scelti da $n$ oggetti distinti è $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

**Esercizio 3.** Quante sono le possibili premiazioni (primi 3 arrivati, nell'ordine di arrivo) in una gara di 8 partecipanti?

Svolgimento: $D_{8,3} = \dfrac{8!}{(8-3)!} = \dfrac{8!}{5!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 336.$

## Combinazioni semplici:

Un altro problema è quello delle combinazioni di $n$ oggetti a $k$ per volta, vale a dire i modi diversi in cui possiamo scegliere (senza badare all'ordine) $k$ oggetti da un insieme di $n$ oggetti (distinti). Osserviamo subito che se $C_{n,k}$ indica tale numero, per ciascuna di queste combinazioni (scelte di $k$ oggetti) possiamo ottenere $k!$ disposizioni diverse, permutando i $k$ oggetti scelti; questo vuol dire che $D_{n,k} = C_{n,k} \cdot k!$, da cui ricaviamo

$$\boxed{C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

**Esercizio 4.** Qual è il numero di modi in cui possiamo essere serviti durante una partita di poker (32 carte prese a 5 per volta)?

Svolgimento: $C_{32,5} = \dfrac{32!}{27!\,5!} = \dfrac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot \cancel{27!}}{\cancel{27!}\,5!}$

$= 201.376.$ ■

NOTA: Per indicare le combinazioni si usa, oltre a $C_{n,k}$, un altro simbolo: poniamo per $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} \quad ;$$

questi numeri si chiamano anche "coefficiènti binomiali". ■

OSS: $C_{n,n} = \dfrac{n!}{n!\,(n-n)!} = 1$ (ricorda: abbiamo posto $0! = 1$)

$$D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = n! = P_n .$$ ■

**Esercizio 5.** Quanti numeri di 2 cifre si possono formare con 1,2,3,4? E quanti di 3?

Svolgimento: 1. $D_{4,2} = \dfrac{4!}{2!} = \underline{\underline{12}}$

$$\begin{pmatrix} 12 & 21 & 31 & 41 \\ 13 & 23 & 32 & 42 \\ 14 & 24 & 34 & 43 \end{pmatrix}$$

2. $D_{4,3} = \dfrac{4!}{(4-3)!} = \dfrac{4!}{1} = 4\cdot 3\cdot 2 = \underline{\underline{24}}$

$$\begin{pmatrix} 123 & 213 & 312 & 412 \\ 132 & 231 & 321 & 421 \\ 124 & 214 & 314 & 413 \\ 142 & 241 & 341 & 431 \\ 134 & 234 & 324 & 423 \\ 143 & 243 & 342 & 432 \end{pmatrix}$$ ■

## Esercizi vari sul Calcolo Combinatorio

1. Una signora vuole riordinare uno scaffale della sua vetrinetta nella quale si trovano tre tipi di vasi uguali: 3 vasi rossi, 4 vasi gialli e 2 vasi bianchi. In quanti modi può ordinare questo suo scaffale? Indicate la formula da utilizzare senza svolgere i conti.
   Risposta: $P_9^{3,4,2}$. ☐

2. Tre amici entrano in un negozio per comprarsi tre maschere per carnevale. Il negoziante ha in vendita 8 modelli di maschere. In quanti modi possono comparire ad una festa in maschera i tre amici se ognuno di loro acquista una maschera diversa da quello degli amici e scelta tra le 8 maschere disponibili? Indicate la formula da utilizzare.
   Risposta: $C_{8,3}$. ☐

3. Nella sala d'attesa di uno studio medico (stimato!) si trovano 9 persone per una terapia di gruppo a tre. L'assistente consegna ad ogni paziente un contrassegno diverso secondo l'ordine di arrivo. Se il medico convoca nel primo gruppo di terapia i primi tre arrivati e si rivolge inizialmente ad ognuno di loro secondo l'ordine di arrivo, in quanti modo può avvenire il primo giro di colloqui? Indicate la formula da utilizzare.
   Risposta: $D_{9,3}$. ☐

4. Per il compitino della prossima settimana (e quelli successivi) ho preparato 10 esercizi diversi di studio di funzioni.

Volendo assegnarvi solo 2 esercizi di questo tipo, quanti compitini diversi (cioè con almeno uno studio di funzioni diverso) possono capitarvi?

<u>Risposta</u>: $C_{10,2}$. ☐

5. In una scatola di costruzioni un bambino trova 12 cubi della stessa grandezza di cui uno bianco, 2 rossi, 2 verdi, 4 gialli e 3 blu. In quanti modi diversi può il bambino allinearli i cubi?

<u>Risposta</u>: $P_{12}^{1,2,2,4,3}$. ☐

6. In una scatola di costruzioni un bambino trova 10 cubi di colore uguale ma tutti di grandezza diversa. Quanti sono le possibili torri che può costruire il bambino se ognuno delle sue torri contiene solo 5 cubi?

<u>Risposta</u>: $D_{10,5}$. ☐

7. Per preparare un test psicologico formato da 10 quesiti gli studiosi possono scegliere per i primi 5 quesiti da una rosa di 30 quesiti, per i quesiti da 6 ad 8 da una rosa di 15 quesiti, mentre per quelli rimanenti da una rosa di 20 quesiti. Quanti sono i possibili test diversi che possono essere preparati in queste ipotesi?

<u>Risposta</u>: $C_{30,5} \cdot C_{15,3} \cdot C_{20,2}$. ☐

8. Per il riscaldamento prima di una gara un atleta può scegliere 6 esercizi da una rosa di 15 esercizi. In quanti modi può avvenire il riscaldamento se non si tiene conto anche della sequenza nella quale vengono eseguiti gli esercizi?

<u>Risposta</u>: $C_{15,6}$. ☐