Commenti alla lezione del 27/10/2005 (9ª lezione Corso)

Riferimento bibliografico: [2] Cap. 2 Sez. 2.7 (massimo e minimo di $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; pt. di massimo, pt. di minimo).

[1] Cap. 3 Sez. 3.2 (Funzioni pari, dispari).

Cap. 3 Sez. 3.1 (Funzioni monotone).

Esercizio 1: Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy le funzioni $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = k \quad \text{se } k \leq x < k+1 \qquad\qquad g(x) = x - k \quad \text{se } k \leq x < k+1$$

al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

Determinate $f(\mathbb{R})$ e $g(\mathbb{R})$.

Svolgimento:

Notiamo che $k \in \mathbb{Z} \iff k \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Quindi, per

$k = 0$ $\quad f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$

$k = 1$ $\quad f(x) = 1$ se $1 \leq x < 2$

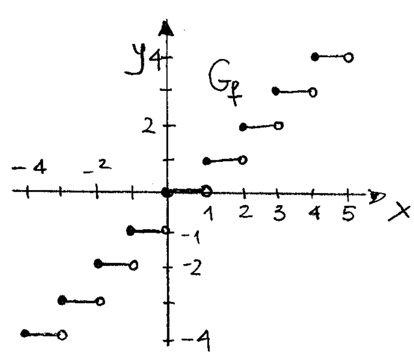
$k = 2$ $\quad f(x) = 2$ se $2 \leq x < 3$ e così via,

$k = -1$ $\quad f(x) = -1$ se $-1 \leq x < 0$

$k = -2$ $\quad f(x) = -2$ se $-2 \leq x < -1$

$k = -3$ $\quad f(x) = -3$ se $-3 \leq x < -2$ e così via,

e quindi



da cui segue facilmente che

$$f(\mathbb{R}) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{Z}.$$

$\square$

Abbiamo per

$k=0 \qquad g(x)=x \quad$ se $\quad 0\le x<1$

$k=1 \qquad g(x)=x-1 \quad$ se $\quad 1\le x<2$

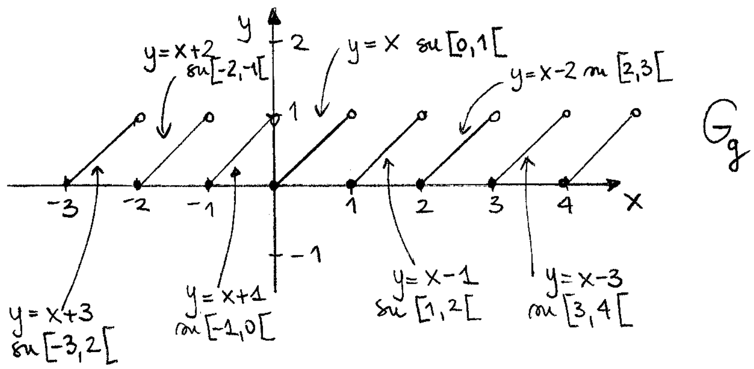
$k=2 \qquad g(x)=x-2 \quad$ se $\quad 2\le x<3 \qquad$ e così via,

$k=-1 \qquad g(x)=x+1 \quad$ se $\quad -1\le x<0$

$k=-2 \qquad g(x)=x+2 \quad$ se $\quad -2\le x<-1$

$k=-3 \qquad g(x)=x+3 \quad$ se $\quad -3\le x<-2 \qquad$ e così via,

e quindi



da cui segue facilmente che $\quad g(\mathbb{R}) = \{ g(x) : x\in\mathbb{R} \} = [0,1[\,.$ $\blacksquare$

<u>Esercizio 2</u>: Siano date le funzioni

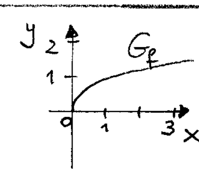
i) $f:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R} \quad f(x)=\sqrt[4]{x}\,; \qquad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad g(x)=x^3$

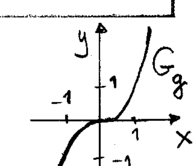
ii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad f(x)=x^2-1 \qquad g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R} \quad g(x)=\dfrac{1}{x}\,.$

Determinate, <u>dove hanno senso</u>, le seguenti funzioni

$f+g \;,\; fg\,,\; \dfrac{f}{g}\,,\; g\circ f,\; f\circ g\,.$

<u>Svolgimento</u>:





i) • $f+g : [0,+\infty[\,\to\mathbb{R} \qquad (f+g)(x) = \sqrt[4]{x}+x^3$

(possiamo considerare la funzione somma $f+g$ solo sul sottoinsieme di $\mathbb{R}$, sul quale sono definite entrambe le funzioni! Lo stesso discorso vale per le funzioni

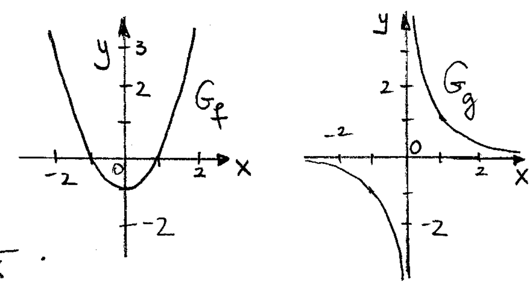
fg, e $\frac{f}{g}$; per quest'ultima si deve anche tenere conto che $g(x) \neq 0$).

- $fg : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (fg)(x) = \sqrt[4]{x} \cdot x^3$
- $\frac{f}{g} :]0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $\quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{x^3}$.

- Notiamo che $f([0,+\infty[) = [0,+\infty[\subset \mathbb{R} = \mathrm{dom}\, g$ e quindi possiamo considerare
$$g \circ f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \qquad (g\circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt[4]{x})^3 .$$
- Poiché $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \not\subset [0,+\infty[= \mathrm{dom}\, f$ non possiamo considerare $f \circ g$ su tutto $\mathbb{R}$!

Se consideriamo $g|_{[0,+\infty[}$, allora possiamo considerare la composizione con f; si ha allora
$$f \circ g : [0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R} \qquad (f\circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt[4]{x^3} . \qquad \square$$

ii)



- $f+g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad (f+g)(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x}$.

- $fg : \mathbb{R}\setminus\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad (fg)(x) = \frac{x^2-1}{x}$.

- $\frac{f}{g} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2-1}{\frac{1}{x}} = x(x^2-1)$ $\quad$ (Nota: $x(x^2-1)$ è definito $\forall x \in \mathbb{R}$, ma $\left(\frac{f}{g}\right)(x) \doteq \frac{f(x)}{g(x)}$ e $g(x)$ è definito solo per $\mathbb{R}\setminus\{0\}$!)

- Notiamo che $f(\mathbb{R}) = [-1,+\infty[\not\subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$, e quindi non possiamo considerare $g \circ f$ su tutto $\mathbb{R}$.

Dobbiamo considerare f ristretta a $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ (poiché $f(-1) = f(1) = 0$) e quindi abbiamo
$$g\circ f : \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (g\circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{x^2-1} .$$

- Notiamo che $g(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = \mathbb{R}\setminus\{0\} \subset \mathbb{R} = \operatorname{dom} f$, e quindi possiamo considerare la funzione

$$f \circ g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \qquad (f\circ g)(x) = f(g(x)) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1 = $$
$$= \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{x^2}.$$

■

Estremi di una funzione: massimo e minimo

Def. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. M si dice massimo (o valore massimo) di f su A se $M = \max(f(A))$, ossia

i) $f(x) \leq M \quad \forall x \in A$,

ii) $\exists \bar{x} \in A : f(\bar{x}) = M$. $\quad \bar{x}$ = punto di massimo.

NOTAZIONE: $M \doteq \max_A f$.

OSS. • Se $\max_A f$ esiste, esso è unico.

- f può avere più di un punto di massimo (anche infiniti).

Def. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. m si dice minimo (o valore minimo) di f su A se $m = \min(f(A))$, ossia

i) $f(x) \geq m \quad \forall x \in A$,

ii) $\exists \hat{x} \in A : f(\hat{x}) = m$. $\quad \hat{x}$ = punto di minimo.

NOTAZIONE: $m \doteq \min_A f$.

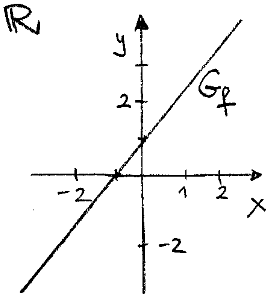
OSS. • Se $\min_A f$ esiste, esso è unico.

- f può avere più di un punto di minimo (anche infiniti).

Esempi :

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x+1$; abbiamo $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

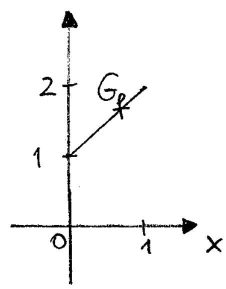
$$\nexists \min_{\mathbb{R}} f \qquad \nexists \max_{\mathbb{R}} f$$



($\nexists \min_{\mathbb{R}} f$: infatti, $\forall m \in \mathbb{R}$ $\exists x \in \mathbb{R}$: $f(x) < m$; basta prendere $x = m-2$, per esempio, e si ha $f(x) = f(m-2) = m-2+1 = m-1 < m$; e quindi non è soddisfatta la proprietà i) nella definizione.

$\nexists \max_{\mathbb{R}} f$: infatti, $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists x \in \mathbb{R}$: $f(x) > M$; basta prendere $x = M$, per esempio, e si ha $f(x) = f(M) = M+1 > M$; e quindi non è soddisfatta la proprietà i) nella definizione). ■

(ii) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x+1$



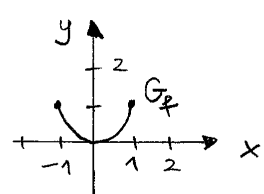
$f([0,1]) = [1,2]$

Si vede subito dal grafico (tutto si dovrebbe dimostrare !!) che

$\min_{[0,1]} f = 1$ $\qquad x=0$ punto di minimo;

$\max_{[0,1]} f = 2$ $\qquad x=1$ punto di massimo. ■

(iii) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$



$f([-1,1]) = [0,1]$

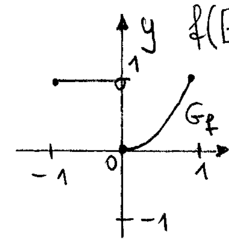
Abbiamo

$\min_{[-1,1]} f = 0$ $\qquad x=0$ pt. di minimo; $\qquad \max_{[-1,1]} f = 1$ $\qquad x=-1, x=1$ punti di massimo. ■

(abbiamo 2 punti di massimo !)

(iv) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 \le x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$



$f([-1,1]) = [0,1]$

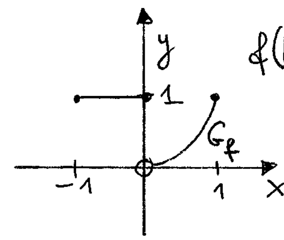
$\min\limits_{[-1,1]} f = 0 \qquad x = 0$ punto di minimo

$\max\limits_{[-1,1]} f = 1 \qquad$ pt di massimo sono tutti gli $x \in [-1,0[\cup \{1\}$

(abbiamo infiniti pt. di massimo !!) ■

(v) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 \le x \le 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x \le 1 \end{cases}$$



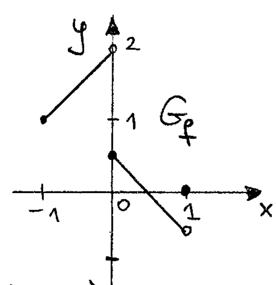
$f([-1,1]) =]0,1]$

$\nexists \min\limits_{[-1,1]} f \qquad \max\limits_{[-1,1]} f = 1 \qquad$ punti di massimo sono tutti gli $x \in [-1,0] \cup \{1\}$.

(abbiamo infiniti pt. di massimo !!) ■

(vi) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } -1 \le x < 0 \\ -x + \frac{1}{2} & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$



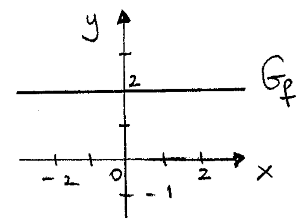
$f([-1,1]) =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup [1,2[$

$\nexists \min\limits_{[-1,1]} f \qquad \nexists \max\limits_{[-1,1]} f$. ■

<u>OSSERVAZIONE:</u> Nello svolgimento degli esempi precedenti ci siamo basati sulla rappresentazione grafica delle funzioni

prese in considerazione. Questo è "lecito"(*) e fattibile se le le funzioni trattate sono elementari !! Vedremo nel seguito degli strumenti matematici che ci permetteranno di individuare il massimo e/o il minimo (se esistono) per funzioni più complicate (che non si possono disegnare così facilmente !).

(vi) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 2$

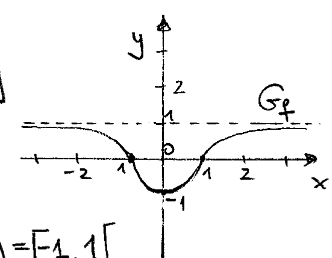


$f(\mathbb{R}) = \{2\}$

si ha $\quad \min_{\mathbb{R}} f = \max_{\mathbb{R}} f = 2$;

punti di massimo = punti di minimo = sono tutti $x \in \mathbb{R}$. ■

(vii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} x^4 - 1 & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ -\frac{1}{x^2} + 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases}$



si ha

$\min_{\mathbb{R}} f = -1 \qquad x = 0$ pt. di minimo ;

$\nexists \max_{\mathbb{R}} f$

$f(\mathbb{R}) = [-1, 1[$ ■

(*) Per fare bene, si dovrebbe "dimostrare" la validità di i) e ii) nelle definizioni di pag. 107, e non dedurle dai grafici !! (che potrebbero essere stati fatti scorrettamente).

Funzioni simmetriche: pari e dispari

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice <u>simmetrico</u> (rispetto all'origine) se $A = -A$, ossia $\forall x \in A$ si ha $-x \in A$.

Esempi: (i) $A = \mathbb{R}$ è simmetrico

(ii) $[-a, a]$ $\quad]-a, a[$ sono insiemi simmetrici.

(iii) $[-3, -2[\, \cup \,]2, 3]$ è un insieme simmetrico.

(iv) $[0, 1]$ non è simmetrico. ■

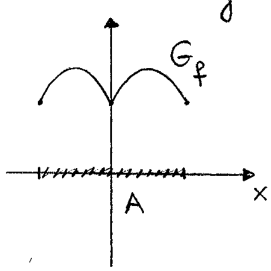
Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme simmetrico, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.
f si dice una <u>funzione pari</u> se

$$\forall x \in A \qquad f(x) = f(-x) \quad ;$$

f si dice una <u>funzione dispari</u> se

$$\forall x \in A \qquad f(-x) = -f(x).$$

OSS (1) Sia $f : A \to \mathbb{R}$ pari. Allora il grafico G_f è simmetrico rispetto all'asse y.

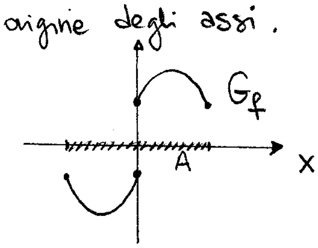


[Infatti $(x, y) \in G_f \overset{\text{per def.}}{\Longleftrightarrow} y = f(x) \overset{\text{se } f \text{ è pari}}{=} f(-x)$

$\Longleftrightarrow (-x, y) \in G_f$

ma questo è proprio il simmetrico di (x, y) rispetto all'asse delle ordinate].

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ dispari. Allora il grafico G_f è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

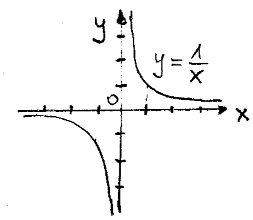


□

② Il nome è dovuto al fatto che le potenze pari di x $(x^2, x^4, x^6, \dots)$ sono funzioni pari, le potenze dispari di x $(x, x^3, x^5, \dots)$ sono funzioni dispari. $\square$

③ In particolare, se $f: A \to \mathbb{R}$ è una funzione pari o dispari, basta conoscerla sull'insieme $A \cap [0, +\infty[$ (oppure $A \cap]-\infty, 0]$) per determinarla su tutto A. $\square$

④ Ovviamente non tutte le funzioni sono pari o dispari. $\blacksquare$

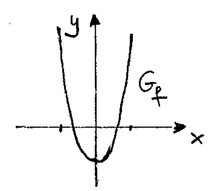


Esempi: (i) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ è dispari:

infatti $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è simmetrico; inoltre

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad \square$$

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 1$ è pari:



infatti $\mathbb{R}$ è simmetrico; inoltre

$$f(-x) = 3(-x)^2 - 1 = 3x^2 - 1 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad \square$$

(iii) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^3 - 2x)^5$ è dispari:

infatti $[-1, 1]$ è simmetrico; inoltre

$$f(-x) = ((-x)^3 - 2(-x))^5 = (-x^3 + 2x)^5 =$$
$$= [-(x^3 - 2x)]^5 = -(x^3 - 2x)^5 = -f(x) \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$\blacksquare$

Esercizio 1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme simmetrico. Siano $f, g: A \to \mathbb{R}$. Provare

ⓐ f, g pari $\Rightarrow$ $f + g$ pari, kf pari $(k \in \mathbb{R})$, fg pari.

ⓑ f, g dispari $\Rightarrow$ $f + g$ dispari; kf dispari ("), fg pari.

ⓒ f pari, g dispari $\Rightarrow$ fg dispari, $f + g$ né pari, né dispari in generale.

<u>Svolgimento</u>:

ⓐ $(f+g)(-x) \underset{\text{def.}}{=} f(-x)+g(-x) \underset{f,g\text{ pari}}{=} f(x)+g(x) \underset{\text{def.}}{=} (f+g)(x) \quad \forall x\in A$;

$kf(-x) = kf(x) \quad \forall x\in A$;

$(fg)(-x) \underset{\text{def.}}{=} f(-x)\,g(-x) \underset{f,g\text{ pari}}{=} f(x)g(x) \underset{\text{def.}}{=} (fg)(x) \quad \forall x\in A.$

$\square$

ⓑ $f+g$, kf dispari si dimostra analog. ad ⓐ.

Proviamo che fg è pari se f, g sono dispari: infatti

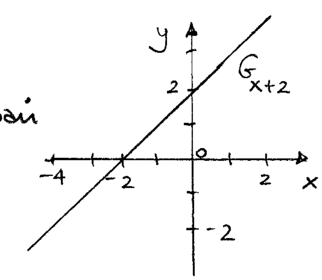
$(fg)(-x) \underset{\text{def.}}{=} f(-x)\,g(-x) \underset{f,g\text{ dispari}}{=} \big[-f(x)\big]\big[-g(x)\big] = f(x)g(x) = (fg)(x) \quad \forall x\in A.$

$\square$

ⓒ $(fg)(-x) \underset{\text{def.}}{=} f(-x)\,g(-x) \underset{\substack{f\text{ pari}\\ g\text{ dispari}}}{=} f(x)\big[-g(x)\big] = -f(x)g(x) = -fg(x) \quad \forall x\in A$

Prendiamo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=2$ $\quad$ funzione pari

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=x$ $\quad$ funzione dispari



$f+g$ non è né pari, né dispari: infatti

$(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) =$

$= 2-x \neq (f+g)(x)$

$\neq -(f+g)(x)$

■

<u>OSS.</u> Questo tipo di esercizi (diciamo "teorici") non sono "essenziali"; sono però utili per famigliarizzare con i concetti!

Funzioni monotòne

Una importante classe di funzioni è quella delle funzioni monotòne.

<u>Def.</u> Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. f si dice <u>crescente</u> se

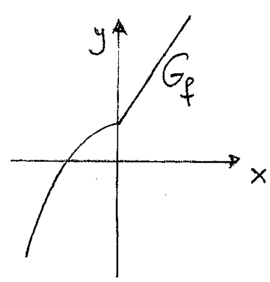
$$\forall\, x_1, x_2 \in A \qquad \left(x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)\right);$$

f è <u>debolmente crescente</u> se

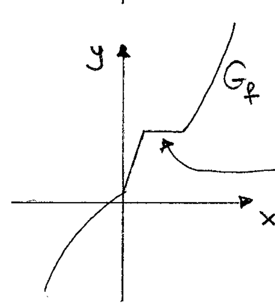
$$\forall\, x_1, x_2 \in A \qquad \left(x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)\right).$$

<u>NOTA</u>:
- Una funzione crescente è una funzione che conserva l'ordine: se due punti x_1 ed x_2 sono in un certo ordine, le loro immagini sono nello stesso ordini.
- Inoltre, una funzione crescente è anche debolmente crescente.
- A volte si parla di funzioni <u>strettamente crescenti</u> anzichè di funzioni crescenti per sottolineare ancora di più la disuguaglianza stretta.

<u>Esempi</u>:



f è crescente



f è debolmente crescente.

tratto orizzontale nel grafico!!

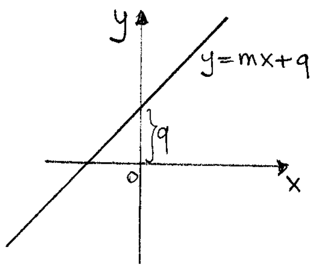
Le funzioni costanti $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$ fissato) sono debolmente crescenti (e anche debolmente decrescenti!).
vedi pag. 115 per la def.

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + q$ con $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Allora f è crescente; (se $m < 0$, allora f è decrescente).

vedi def. pag. 116

Svolgimento:

Sia $m > 0$. Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$.



Allora $mx_1 < mx_2$, e

$$\underbrace{mx_1 + q}_{\substack{\parallel \\ f(x_1)}} < \underbrace{mx_2 + q}_{\substack{\parallel \\ f(x_2)}} .\quad \square$$

Sia $m < 0$. Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. Allora essendo $m < 0$, si ha

$$mx_1 > mx_2 \qquad \text{(si inverte la disuguaglianza!)}$$

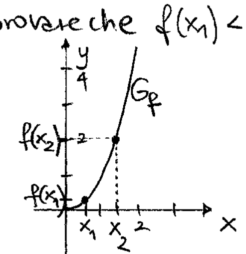
inoltre

$$\underbrace{mx_1 + q}_{\substack{\parallel \\ f(x_1)}} > \underbrace{mx_2 + q}_{\substack{\parallel \\ f(x_2)}} . \quad \blacksquare$$

Esercizio 2: Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$. Allora f è crescente.

Svolgimento:

Siano $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$, $x_1 < x_2$. Dobbiamo provare che $f(x_1) < f(x_2)$.



Moltiplichiamo $x_1 < x_2$ per x_1. Si ha

$$(*) \qquad x_1^2 < x_1 x_2$$

Moltiplichiamo $x_1 < x_2$ per x_2. Si ha

$$(**) \qquad x_1 x_2 < x_2^2 .$$

Mettendo insieme $(*)$ e $(**)$ si ha $x_1^2 < x_2^2$, ossia $f(x_1) < f(x_2)$.

$\blacksquare$

Def. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. f si dice <u>decrescente</u> se

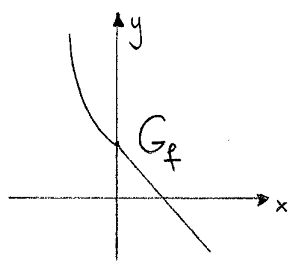
$$\forall x_1, x_2 \in A \qquad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2));$$

f è <u>debolmente decrescente</u> se

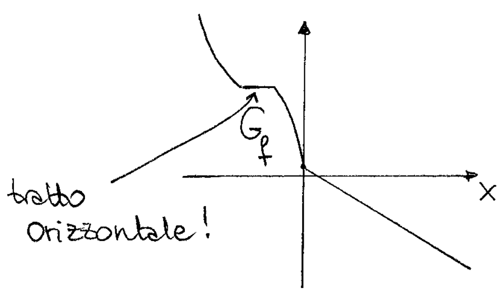
$$\forall x_1, x_2 \in A \qquad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)).$$

<u>NOTA</u>:
- Una funzione decrescente è una funzione che inverte l'ordine.
- Una funzione decrescente è anche debolmente decrescente.
- A volte si parla di funzioni <u>strettamente decrescenti</u> anziché di funzioni decrescenti per sottolineare ancora di più la disuguaglianza stretta.

<u>Esempi</u>:



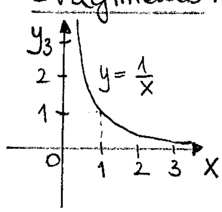
f è decrescente.



f è debolmente decrescente ■

<u>Esercizio 1</u>: Sia $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$. Allora f è decrescente.

<u>Svolgimento</u>: Siano $x_1, x_2 \in]0, +\infty[$, $x_1 < x_2$. Allora



$$\underset{f(x_1)}{\underset{\parallel}{\frac{1}{x_1}}} > \underset{f(x_2)}{\underset{\parallel}{\frac{1}{x_2}}}$$

; cioè f è decrescente. ■

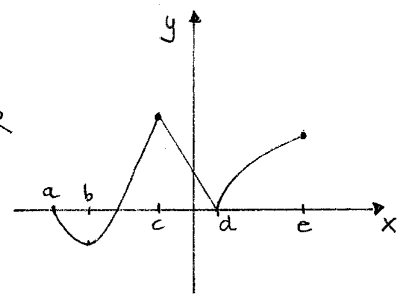
Def. Se f verifica una delle quattro proprietà nelle definizioni a pag. 114 e pag. 116, allora f si dice monotòna.

Se f è crescente o se f è decrescente, si dice che f è strettamente monotòna.

NOTA: Non bisogna pensare che tutte le funzioni sono monotòne.

Esempio:

$f : [a, e] \to \mathbb{R}$



Intervalli di monotònia: negli intervalli $[a, b]$, $[c, d]$ f è decrescente ($\downarrow$)

negli intervalli $[b, c]$, $[d, e]$ f è crescente ($\nearrow$).

Osserviamo anche

$\min\limits_{[a,e]} f = f(b)$ $\quad$ $x = b$ punto di minimo;

$\max\limits_{[a,e]} f = f(c)$ $\quad$ $x = c$ punto di massimo. ∎