Commenti alla lezione dell' 11/10/05 (2ª lezione Corso)

Riferimento bibliografico: [1] Cap. 2 Sez. 2.10 pag. 61.

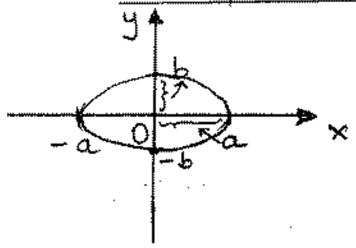
Equazione dell' ellisse:

Forma generale: $x^2 + a y^2 + b x + c y + d = 0$

con $a > 0$
$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ opportuni;
vedi NOTA pag. 51.

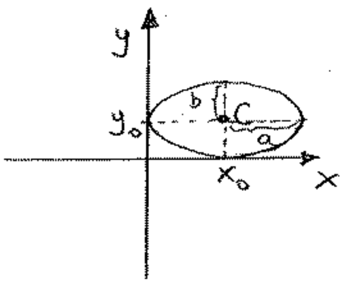
Equazione canonica dell' ellisse di centro $O = (0,0)$ e semiassi $a > 0$, $b > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Equazione canonica dell' ellisse di centro $C = (x_0, y_0)$ e semiassi $a > 0$, $b > 0$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$



OSS. Se nell' eq. canonica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si ha $a = b$,

allora l' eq. dell' ellisse diventa l' eq. della circonferenza di centro $O = (0,0)$ e raggio $r = a$ (oppure b) !!

NOTA: $\boxed{a>0}$

$$x^2+ay^2+bx+cy+d=0 \iff$$

$$\underbrace{x^2+bx}_{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}} + \underbrace{ay^2+cy}_{a\left(y+\frac{c}{2a}\right)^2-\frac{c^2}{4a}} + d = 0 \iff$$

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4} + a\left(y+\frac{c}{2a}\right)^2 - \frac{c^2}{4a} + d = 0 \iff$$

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{\left(y+\frac{c}{2a}\right)^2}{\frac{1}{a}} = \frac{b^2a+c^2-4ad}{4a}$$

$$\iff \frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}{A^2} + \frac{\left(y+\frac{c}{2a}\right)^2}{B^2} = 1 \text{ , dove}$$

$$A^2 = \frac{b^2a+c^2-4ad}{4a} \qquad B^2 = \frac{b^2a+c^2-4ad}{4a^2}.$$

Poichè $a>0$ (per ipotesi), si ottiene che $x^2+ay^2+bx+cy+d=0$ è l'eq. dell'ellisse di centro $C=\left(-\frac{b}{2}, -\frac{c}{2a}\right)$ e semiassi A, B se e solo se $\underline{\underline{b^2a+c^2-4ad>0}}$.

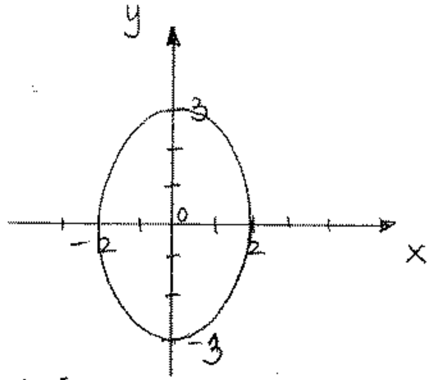
Esercizio 1.

i) Scrivete l'eq. dell'ellisse di centro $O=(0,0)$ e di semiassi $a=2$, $b=3$ e disegnatela nel piano cartesiano xy.

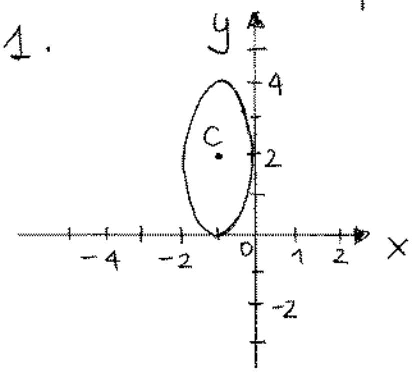
ii) Scrivete l'eq. dell'ellisse di centro $C=(-1,2)$ e di semiassi $a=1$, $b=2$ e disegnatela!

Svolgimento:

i) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$



ii) $(x+1)^2+\frac{(y-2)^2}{4}=1.$



Esercizio 2. Determinate il centro e i semiassi a e b dell'ellisse di equazione (generale) $x^2+4y^2-2x-3=0$.

Svolgimento:

$$x^2+4y^2-2x-3=0 \iff$$

$$\underbrace{x^2-2x}+4y^2-3=0 \iff$$

$$(x-1)^2-1+4y^2-3=0 \iff$$

$$(x-1)^2+4y^2=4 \iff$$

$$\frac{(x-1)^2}{4}+y^2=1$$

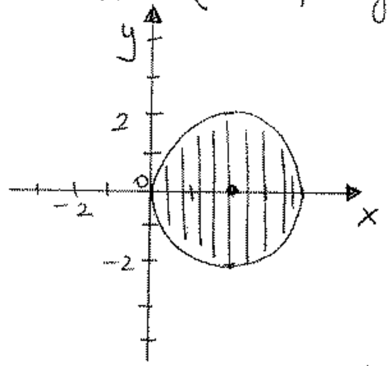
Allora $C=(1,0)$, mentre $a=2$, $b=1$.

Esercizio 3. Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy l'insieme dei punti (x,y) soddisfacenti il sistema

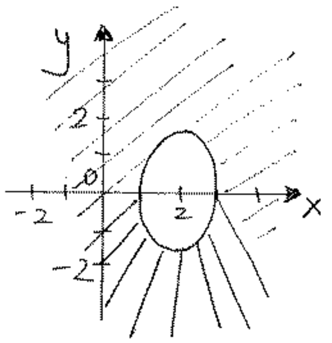
$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2\le 4\\ (x-2)^2+\frac{4y^2}{9}\ge 1.\end{cases}$$

Svolgimento:

Notiamo $(x-2)^2+y^2 \leq 4$ sono tutti e soli i punti che stanno sulla circonferenza o all'interno della circonferenza di centro $C=(2,0)$ e raggio 2.



Inoltre $(x-2)^2+\frac{4}{9}y^2 \geq 1 \iff (x-2)^2+\frac{y^2}{9/4} \geq 1$,

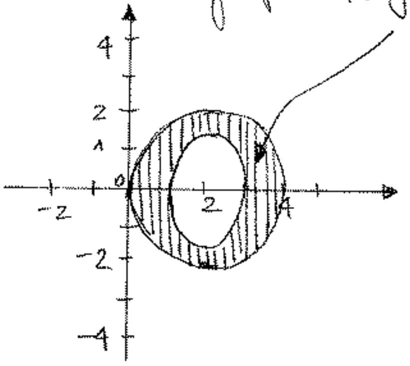


e questa diseq. risulta soddisfatta da tutti e soli i punti che stanno sull'ellisse o all'esterno dell'ellisse di centro $C=(2,0)$ e semiassi $a=1$, $b=3/2$.

Abbiamo allora che i pt. soddisfacenti il sistema

$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2 \leq 4\\ (x-2)^2+\frac{4y^2}{9} \geq 1\end{cases}$$

hanno la rappresentazione grafica seguente:



Equazione dell'iperbole

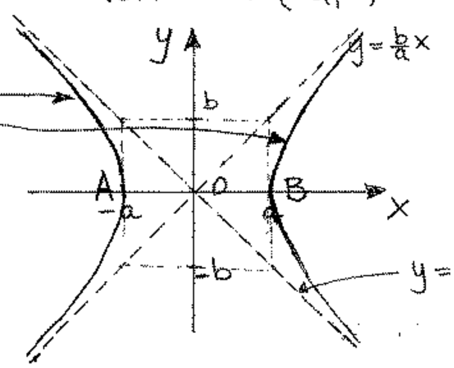
Forma generale: $x^2 - ay^2 + bx + cy + d = 0$

oppure $-x^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ $\Bigg\} a > 0$

a, b, c t.c. $b^2a - c^2 - 4ad \neq 0$.

Equazione canonica dell'iperbole di centro $O = (0,0)$ e semiassi $a, b > 0$ (e asintoti $y = \pm \frac{b}{a} x$ vertici $A = (-a, 0)$ $B = (a, 0)$)

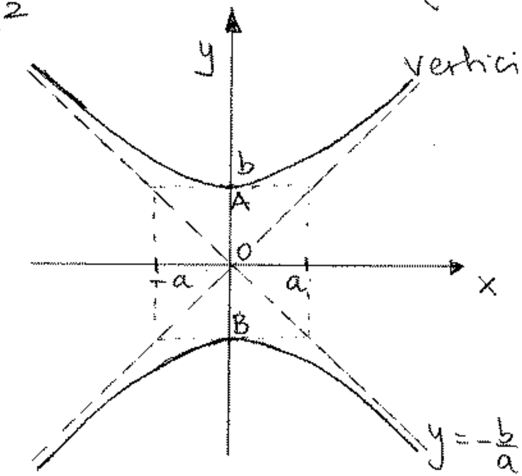
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$



$\boxed{\text{Oppure}}$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(asintoti $y = \pm \frac{b}{a} x$ vertici $A = (0, b)$, $B = (0, -b)$) con asse x



Equazione canonica dell'iperbole di centro $C = (x_0, y_0)$ e semiassi $a, b > 0$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \boxed{\text{oppure}} \quad -\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

vertici $A = (x_0 - a, y_0)$, $B = (x_0 + a, y_0)$ con asse parallela all'asse y

vertici $A = (x_0, y_0 + b)$ $B(x_0, y_0 - b)$ con asse parallela all'asse x

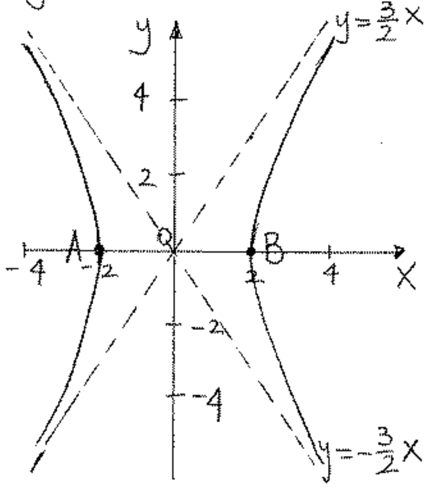
Esercizio 1. Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy i punti (x,y) soddisfacenti

i) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$;   ii) $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;

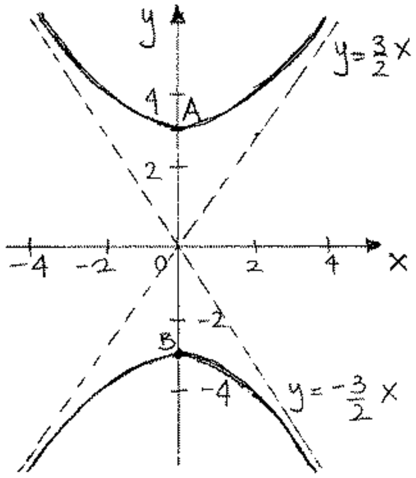
iii) $\frac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 1$;   iv) $-\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

Svolgimento :

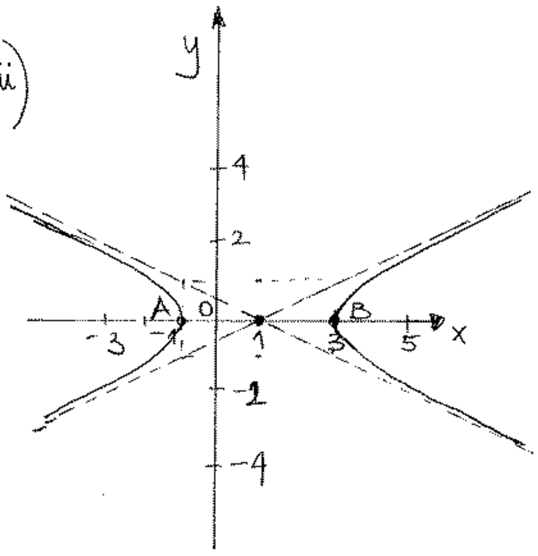
i)



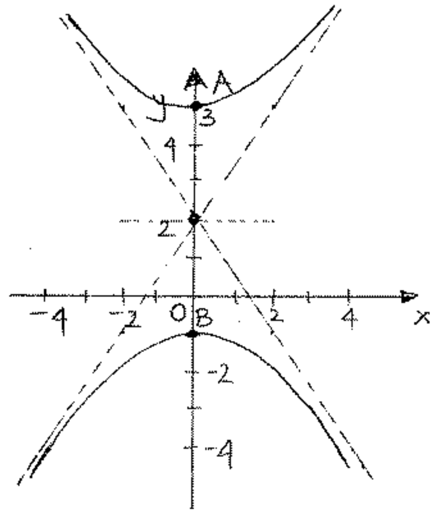
ii)



iii)



iv)



Esercizio 2. Disegnate il seguente luogo geometrico:

$$36x^2 + 12x - y^2 + 4 = 0.$$

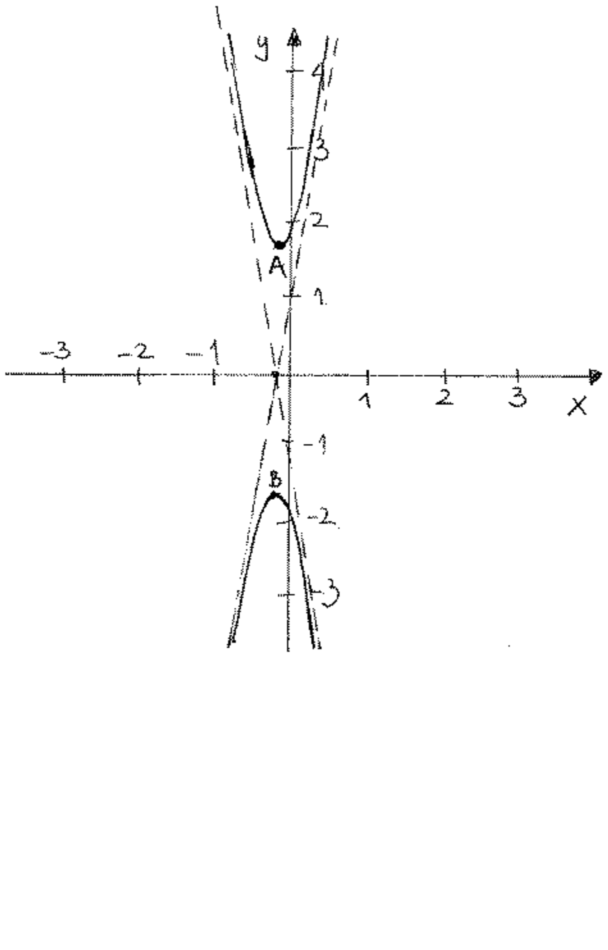
Svolgimento:

$$36\left(x^2 + \frac{1}{3}x\right) - y^2 + 4 = 0 \iff$$

$$36\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - 1 - y^2 + 4 = 0 \iff$$

$$-\frac{\left(x + \frac{1}{6}\right)^2}{1/12} + \frac{y^2}{3} = 1$$

che è l'eq. canonica dell'iperbole di centro $C = \left(-\frac{1}{6}, 0\right)$ semiassi $a = 1/\sqrt{12}$, $b = \sqrt{3}$ e con asse parallelo all'asse x.



$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{12}}} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{12} = 6$$