Commenti alla lezione del 25/10/2005 (8ª lezione Corso)

Riferimento bibliografico : [1] Cap. 1 Sez. 1.3 (funzione restrizione pag. 21
funzione composta pag. 22)

[2] Cap. 2 Sez. 2.7 (Def. 1) pag. 41).

Continuazione : Funzioni elementari

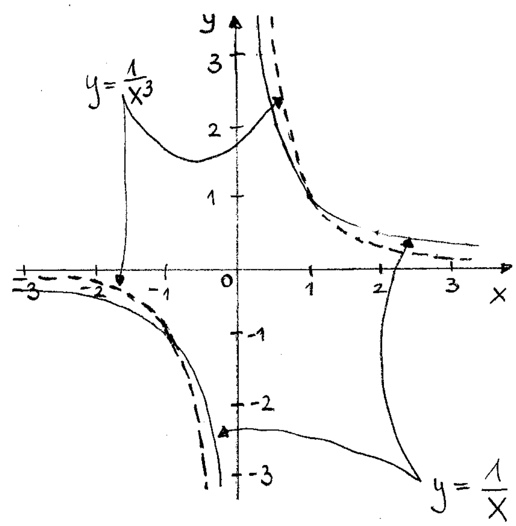
(g) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

funzioni reciproche delle funzioni in (f)

$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad (= x^{-1})$

$f(x) = \frac{1}{x^3}$ $\quad (= x^{-3})$

$f(x) = \frac{1}{x^5}$ $\quad (= x^{-5})$ ...



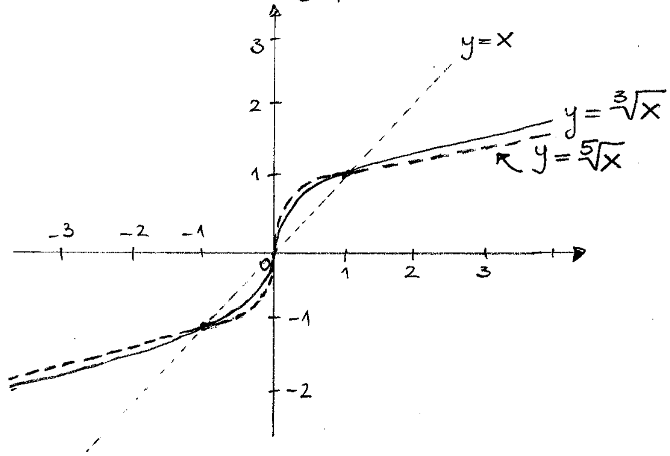
(h) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = \sqrt[5]{x}$

⋮

Sono le funzioni inverse delle funzioni in (f)



Restrizione e Composizione

Quando parliamo di certe funzioni inverse (vedi, per esempio, $f(x)=x^2 \rightsquigarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x}$) abbiamo bisogno del concetto di restrizione; brevemente, restringere una funzione ad un sottoinsieme del proprio dominio significa "dimenticare" che la funzione esisteva anche al di fuori di questo sottoinsieme.

Def. Sia $f: A \to B$ una funzione, sia $E \subset A$. Si dice restrizione di f ad E la funzione $f|_E : E \to B$ definita da

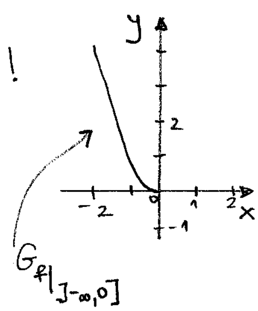
$f|_E(x) = f(x) \quad \forall x \in E.$

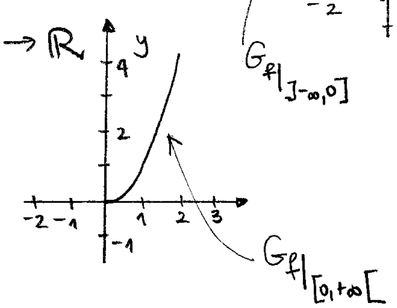
Esempio: ① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2$ non è iniettiva!

Le funzioni $f|_{]-\infty,0]} : \;]-\infty,0] \to \mathbb{R}$

$f|_{[0,+\infty[} : [0,+\infty[\;\to \mathbb{R}$

sono iniettive!





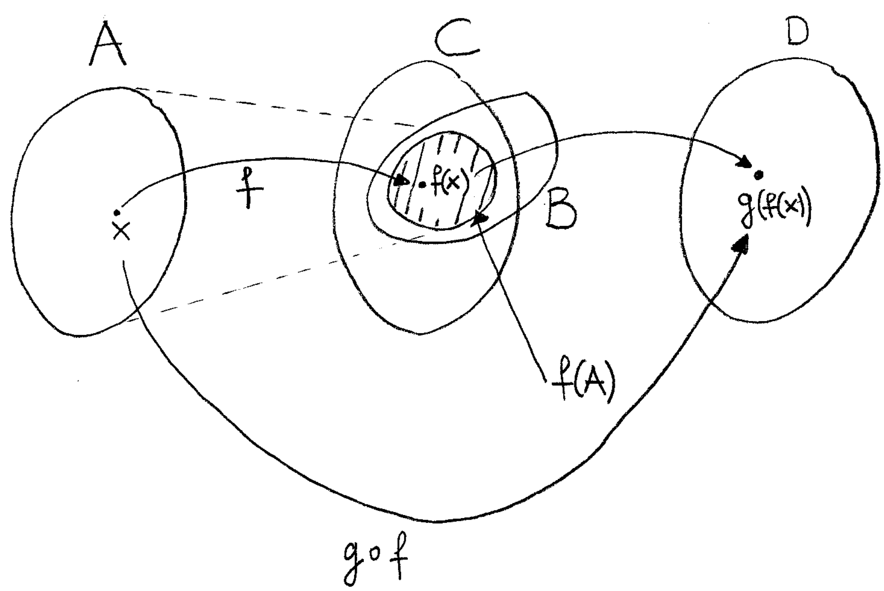
Per calcolare la maggior parte delle funzioni che incontriamo, procediamo a passi successivi: così, ad esempio, per calcolare

$$\sqrt{x^2+1}$$

prima si calcola il quadrato di x, poi si somma 1 al risultato; poi del nuovo risultato si calcola la radice (si può fare perché $x^2+1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$). Questo procedimento a catena si formalizza nel concetto di composizione.

Def. Sia $f: A \to B$, $g: C \to D$ due funzioni. Supponiamo $f(A) \subseteq C$. Allora, si dice <u>funzione composta di f e g</u> la funzione $g \circ f : A \to D$ definita da

$$(g \circ f)(x) \doteq g(f(x)) \quad \forall x \in A$$

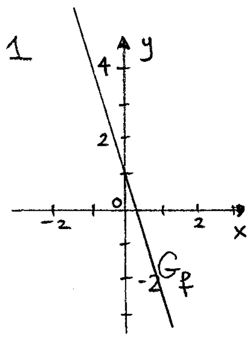


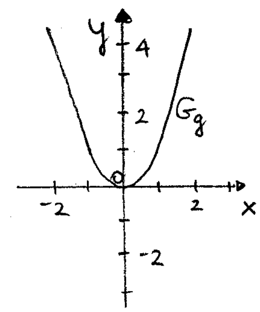
NOTA: In generale, se $g \circ f$ è definita, non è detto che sia definita $f \circ g$. Inoltre, in generale, $g \circ f \neq f \circ g$.

Esempi :

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = -3x+1$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g(x) = x^2$





- Abbiamo $\underline{\underline{f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = \operatorname{dom} g}}$. Allora è ben definita la funzione $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e si ha

$$\underline{\underline{(g \circ f)(x)}} \doteq g(f(x)) = g(-3x+1) = (-3x+1)^2.$$

oppure $= (f(x))^2 = (-3x+1)^2$.

•• Abbiamo $\underline{\underline{g(\mathbb{R}) = [0,+\infty[\; \subseteq \mathbb{R} = \operatorname{dom} f}}$; quindi è ben definita la funzione $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e si ha

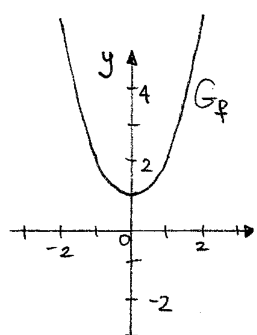
$$\underline{\underline{(f \circ g)(x)}} \doteq f(g(x)) = f(x^2) = -3x^2+1.$$

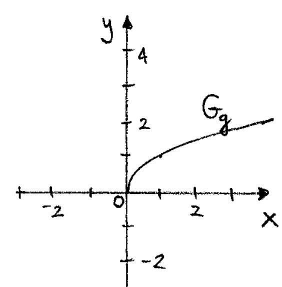
oppure $= -3g(x)+1 = -3x^2+1$.

$\underline{\underline{\text{OSS.}}}$ $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \tfrac{1}{2}\}$. $\blacksquare$

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2+1$

$g : [0,+\infty[\to \mathbb{R} \qquad g(x) = \sqrt{x}$





- Abbiamo $\underline{\underline{f(\mathbb{R}) = [1,+\infty[\; \subset \operatorname{dom} g}}$. Allora è ben definita la funzione $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e si ha

$$\underline{\underline{(g \circ f)(x)}} \doteq g(f(x)) = g(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}.$$

oppure $= \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2+1}$.

•• Abbiamo $g([0,+\infty[) = [0,+\infty[\subset \mathbb{R} = \operatorname{dom} f$. Allora è ben definita la funzione $f \circ g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ e si ha

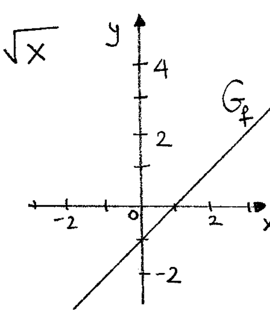
$$(f\circ g)(x) \doteq f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x+1.$$

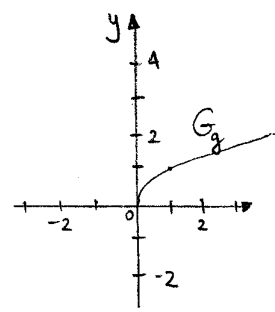
oppure $= (g(x))^2 + 1 = (\sqrt{x})^2 + 1 = x+1$.

OSS. $\operatorname{dom}(g\circ f) = \mathbb{R}$, $\operatorname{dom}(f\circ g) = [0,+\infty[$.
(quindi le due funzioni non hanno solo una legge diversa – nota: $\sqrt{x^2+1} \neq x+1 \ \forall x \neq 0$ – ma anche domini distinti).

■

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x-1$
$g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ $g(x) = \sqrt{x}$





• Abbiamo $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \not\subset \operatorname{dom} g$; quindi non possiamo considerare $g\circ f$ su tutto $\mathbb{R}$. Se però consideriamo la restrizione di f all'insieme $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} = E$ (in modo che $f(E) = [0,+\infty[$) allora possiamo considerare la funzione $g\circ f$!

Consideriamo allora $g\circ f : E \to \mathbb{R}$
e si ha

(E = campo di esistenza per $g\circ f$; oppure insieme di definizione di $g\circ f$)

$$(g\circ f)(x) \doteq g(f(x)) = g(x-1) = \sqrt{x-1}.$$

oppure $= \sqrt{f(x)} = \sqrt{x-1}$.

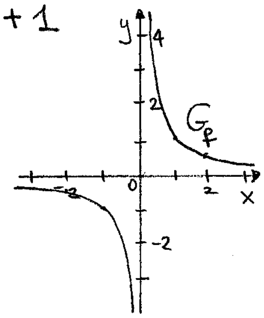
•• Abbiamo $g([0,+\infty[) = [0,+\infty[\subset \mathbb{R} = \operatorname{dom} f$. Allora è ben definita la funzione $f \circ g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ e si ha

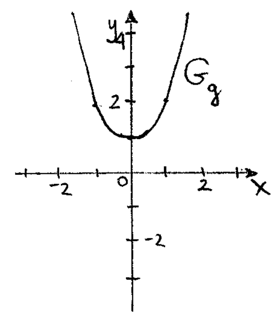
$$\underline{\underline{(f \circ g)(x)}} \doteq f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 1 .$$

oppure $= g(x) - 1 = \sqrt{x} - 1.$ $\blacksquare$

(iv) $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \dfrac{1}{x}$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g(x) = x^4 + 1$





• Abbiamo $\underline{\underline{f(\mathbb{R}\setminus\{0\}) = \mathbb{R}\setminus\{0\} \subset \mathbb{R} = \operatorname{dom} g}}$. Allora è ben definita la funzione $g \circ f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ e si ha

$$\underline{\underline{(g \circ f)(x)}} \doteq g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^4} + 1 .$$

oppure $= (f(x))^4 + 1 = \dfrac{1}{x^4} + 1 .$

•• Abbiamo $\underline{\underline{g(\mathbb{R}) = [1,+\infty[\subset \mathbb{R}\setminus\{0\} = \operatorname{dom} f}}$. Allora è ben definita la funzione $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e si ha

$$(f \circ g)(x) \doteq f(g(x)) = f(x^4+1) = \frac{1}{x^4+1} .$$

oppure $= \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{x^4+1} .$ $\blacksquare$

<u>NOTA</u>. Spesso accade che si assegna una funzione f (di variabile reale) dando solo la legge, ma non esplicitamente il suo dominio. In questo caso si intende come dominio il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui abbia senso la legge. Nella determinazione del dominio A si dovrà quindi tener conto dei domini ed immagini delle "varie funzioni" coinvolte nella definizione di f. (*)
A prende spesso il nome di <u>insieme di definizione</u> o di <u>campo di esistenza</u> della f.

<u>Esempi</u>:

(i) Sia $f(x) = \sqrt{x-1}$: è la composizione di $x-1$ e $\sqrt{x}$; affinché questa abbia senso deve essere
$A = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} = [1, +\infty[$. $\square$

(ii) Sia $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$: è la composizione di $x^2 - x$ e $\frac{1}{x}$; affinché questa abbia senso deve essere
$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. $\square$

(iii) Sia $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x}}$: è la composizione di $x^2 - x$, di $\sqrt{x}$ e di $\frac{1}{x}$; affinché questa sia fattibile deve essere

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - x} \neq 0 \text{ e } x^2 - x \geq 0\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x > 0\} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[.$$

■

(*) È quindi fondamentale conoscere bene le "funzioni elementari" (i loro domini, le loro immagini ...)

Funzioni reali di una variabile reale

A partire dalle funzioni elementari (sono i mattoni fondamentali!!) si costruiscono tutte le altre funzioni mediante le seguenti operazioni:

(A) 4 operazioni aritmetiche: dati $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si definisce

Somma (differenza) $\quad f \pm g : A \to \mathbb{R} \qquad (f \pm g)(x) \doteq f(x) \pm g(x) \quad \forall x \in A$

prodotto $\quad fg : A \to \mathbb{R} \qquad (fg)(x) \doteq f(x)\, g(x) \quad \forall x \in A$

(reciproco) $\quad \frac{f}{g} : A \setminus \{x \in A : g(x) = 0\} \to \mathbb{R} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) \doteq \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in A$

Esempi: Siano $f(x) = x$, $g(x) = c$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $(c \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

Allora:
$$(f+g)(x) = x + c \quad \forall x \in \mathbb{R};$$
$$(fg)(x) = cx \quad \forall x \in \mathbb{R};$$
$$f^2(x) = f(x) f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x}{c} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{c}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

■

(B) Composizione di funzioni: dati $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

se $f(A) \subseteq B$, possiamo considerare $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $\forall x \in A$;

se $g(B) \subseteq A$, possiamo considerare $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ $\forall x \in B$.

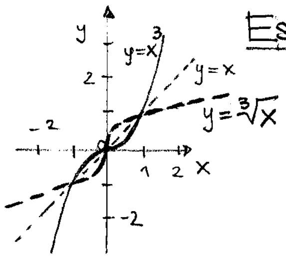
Esempi: Siano $f(x) = x^4$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$ $\forall x \geq 0$.

Allora:
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^4} = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^4 = x^2 \quad \forall x \geq 0$$

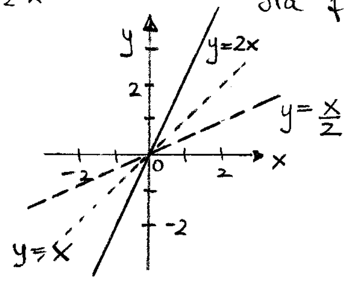
■

(C) Inverse di funzioni :

(D) Funzioni definite a tratti :

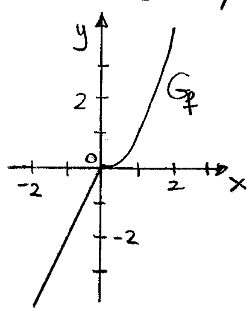


Esempi : Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^3$; allora $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ è la funzione inversa.

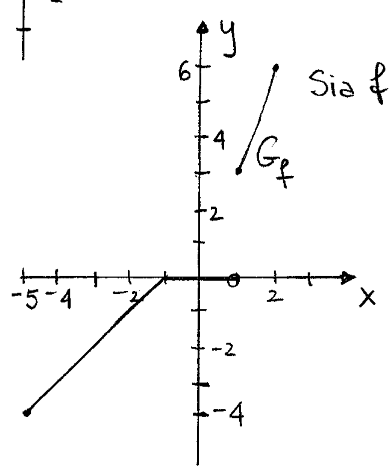


Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2x$; allora $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ è la funzione inversa.

$\square$



Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$



Sia $f: [-5,2] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } -5 \leq x \leq -1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ x^2+2 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$\blacksquare$

Prima di ampliare le nostre conoscenze ad altre funzioni elementari (funzione valor assoluto, funzione esponenziale, funzione logaritmo) studiamo alcune <u>proprietà qualitative</u> delle funzioni

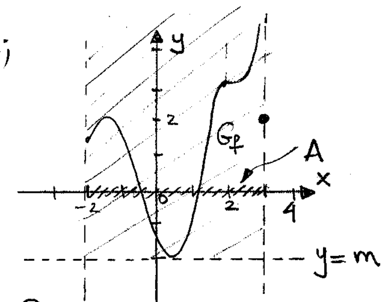
$$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Funzioni limitate

Def. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione.

f si dice <u>limitata inferiormente</u> se l'insieme $f(A)$ è limitato inferiormente;

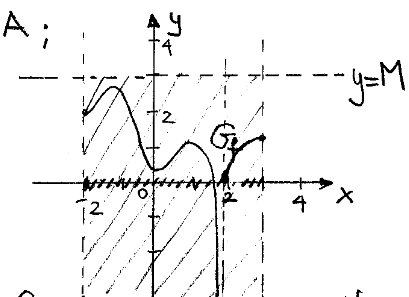
ossia se $\exists m \in \mathbb{R}$ t.c. $m \leq f(x)$ $\forall x \in A$;



G_f sta nel semipiano superiore delimitato da una retta di eq. $y = m$.

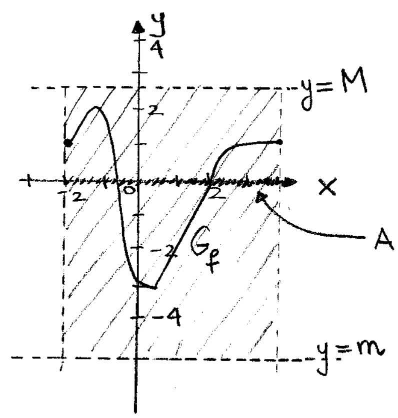
f si dice <u>limitata superiormente</u> se l'insieme $f(A)$ è limitato superiormente;

ossia se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M$ $\forall x \in A$;



G_f sta nel semipiano inferiore delimitato da una retta di eq. $y = M$.

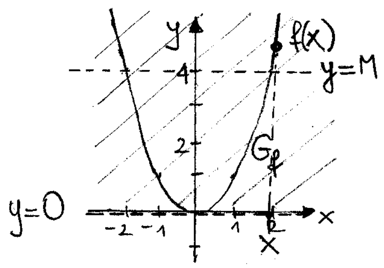
f si dice <u>limitata</u> se f è limitata inferiormente e superiormente.



G_f è quindi contenuto in una striscia orizzontale del piano cartesiano xy.

Esempi :

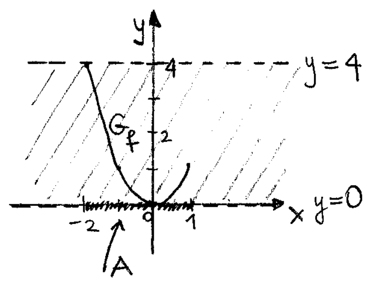
(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$: è limitata inferiormente ; infatti $f(x) \geq 0$ (quindi basta prendere $m = 0$ e si ha $f(x) \geq m \quad \forall x \in \mathbb{R}$)



non è limitata superiormente ; infatti $\forall M > 0 \quad \exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = x^2 > M$ (basta prendere un $x > \sqrt{M}$).

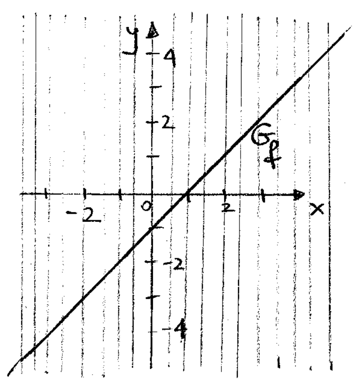
□

(ii) $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$: f è limitata : abbiamo $f([-2,1]) = [0,4]$;
(ossia $0 \leq f(x) \leq 4 \quad \forall x \in [-2,1]$).



□

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x - 1$: abbiamo $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$; f non è limitata inferiormente, non è limitata superiormente.



($\forall m < 0 \quad \exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = x - 1 < m$
– basta prendere un $x < m + 1$ –)

($\forall M > 0 \quad \exists x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x - 1 > M$
– basta prendere un $x > M + 1$ –)

■