Commenti alla lezione del 3/10/05 (6ª lezione Precorso)

Riferimento bibliografico: abbiamo visto

sulle rette [1] pag. 60 proprietà f) e g) (vedi Esercizio 1 ed Esercizio 2).

sulla parabola [1] pag. 61 (seconda metà della pagina) Sez. 2.7 pag. 45 – 48.

Esercizio 1.

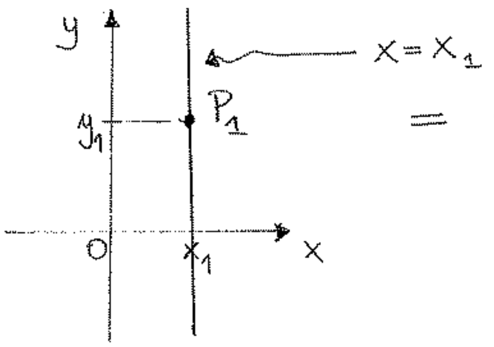
i) La retta verticale passante per un punto $P_1 = (x_1, y_1)$ ha equazione $\boxed{x = x_1}$

ii) La retta (non verticale) passante per un punto assegnato $P_1 = (x_1, y_1)$ di coefficiente angolare m ha l'equazione

$$\boxed{y = m(x - x_1) + y_1}$$

Svolgimento:

i) ovvio



$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_1\}$

ii) Abbiamo $y = mx + q$ con m dato e q da determinare imponendo che P_1 appartenga alla retta. Quindi deve essere

$$y_1 = mx_1 + q.$$

Ne segue $q = y_1 - m x_1$. Abbiamo allora

$y = mx + y_1 - m x_1$, ossia $y = m(x - x_1) + y_1$.

Esercizio 2. La retta passante per i due punti distinti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ ha l'equazione

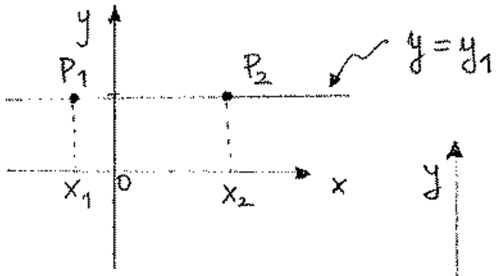
$\boxed{y = y_1}$ se $y_1 = y_2$;

$\boxed{x = x_1}$ se $x_1 = x_2$;

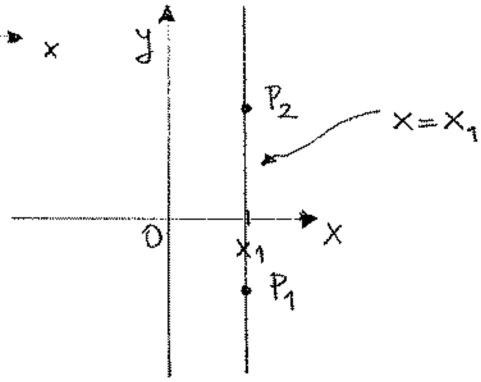
$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$ in tutti gli altri casi.

Svolgimento

Se $y_1 = y_2$



Se $x_1 = x_2$



Se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ allora da

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= m x_1 + q \\ y_2 &= m x_2 + q \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

ossia $\boxed{m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

Inoltre si ha $q = y_1 - mx_1$ (anche $q = y_2 - mx_2$)

Allora

$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x + (y_1 - mx_1) \ ;$$

ne segue

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x_1 \ ;$$

quindi

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$\blacksquare$

Esercizio 3. a) Scrivete l'eq. della retta passante per il punto $P = (2, -1)$ ed avente coeff. angolare $m = -1$; disegnate la retta.

b) Data la retta r di equazione $5x + 4y - 1 = 0$ e il punto $P = (1, 3)$ determinate

i) l'eq. della retta r' parallela ad r e passante per P;

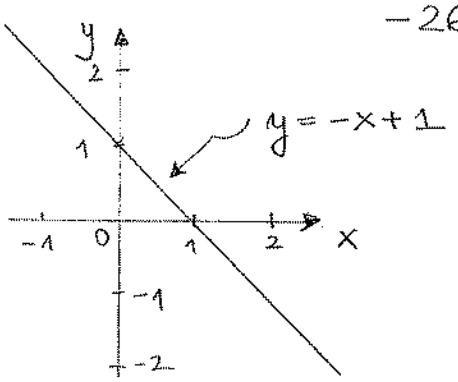
ii) l'eq. della retta r'' perpendicolare ad r e passante per P.

Disegnate r, r', r''.

Svolgimento:

a) Applicando Es. 1 (pag. 23) si ha

$$y = \underbrace{-1}_{m}(x - \underbrace{2}_{x_1}) - \underbrace{1}_{y_1} \quad \text{ossia} \quad \underline{\underline{y = -x + 1}}.$$



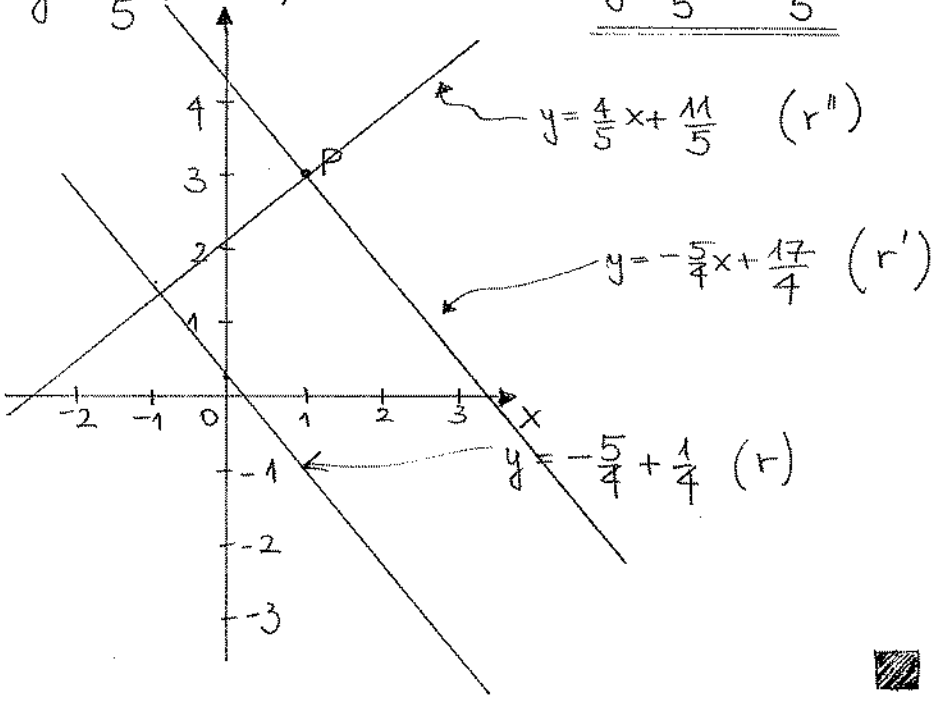
b) r ha eq. $y = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{4}$; allora $m = -\frac{5}{4}$

i) $r' \parallel r$ quindi r' ha ancora pendenza $m = -5/4$.
Usando Es. 1 (pag. 23) si ha che l'eq. di r' è

$$y = \underbrace{-\frac{5}{4}}_{m}(x - \underset{\substack{\uparrow \\ x_1}}{1}) + \underset{\substack{\uparrow \\ y_1}}{3}\ , \quad \text{ossia} \quad \underline{y = -\frac{5}{4}x + \frac{17}{4}}$$

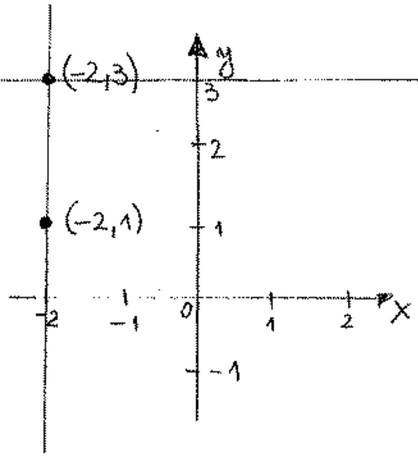
ii) $r'' \perp r$ e quindi La pendenza di r'' sarà $m'' = \frac{4}{5}$.
Usando Es. 1 (pag. 23) si ha che l'eq. di r'' è

$$y = \frac{4}{5}(x - 1) + 3\ , \quad \text{ossia} \quad \underline{y = \frac{4}{5}x + \frac{11}{5}}$$



<u>Esercizio 4.</u> a) Scrivete l'eq. della retta passante per i punti $(-2,1)$ e $(-2,3)$.

b) Scrivete l'eq. della retta r passante per i punti $(2,-1)$ e $(-1,0)$. Scrivete l'eq. della retta r' passante per i punti $(1,2)$ e $(-1,-1)$ e trovatene il punto di intersezione con la retta r.



<u>Svolgimento</u>:

a) Si ha subito $\underline{\underline{x=-2}}$

b) r ha equazione (Es. 2, pag. 24) $\dfrac{y+1}{0+1}=\dfrac{x-2}{-1-2}$

$$\iff y+1=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

$$\iff \underline{\underline{y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}}}\,.$$

r' ha equazione (Es. 2, pag. 24) $\dfrac{y-2}{-1-2}=\dfrac{x-1}{-1-1}$

$$\iff y-2=\frac{3}{2}(x-1)$$

$$\iff \underline{\underline{y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}}\,.$$

Determiniamo il pt. di intersezione di r ed r':

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3} \\ \frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3} \\ \frac{3}{2}x+\frac{1}{3}x=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \\ \frac{11}{6}x = -\frac{5}{6} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \\ x = -\frac{5}{11} \end{cases} \Longleftrightarrow \underline{\underline{P = \left(-\frac{5}{11}, -\frac{2}{11}\right)}}$$

■

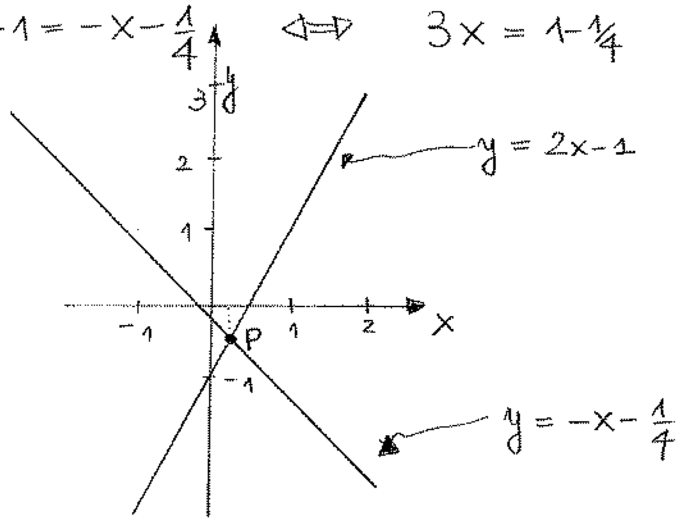
Esercizio 5. Risolvete ed interpretate geometric. le seg. equazioni:

i) $2x - 1 = -x - \frac{1}{4}$;

ii) $3x - 1 = 2x + 2$;

iii) $3x - 1 = 3x + 2$.

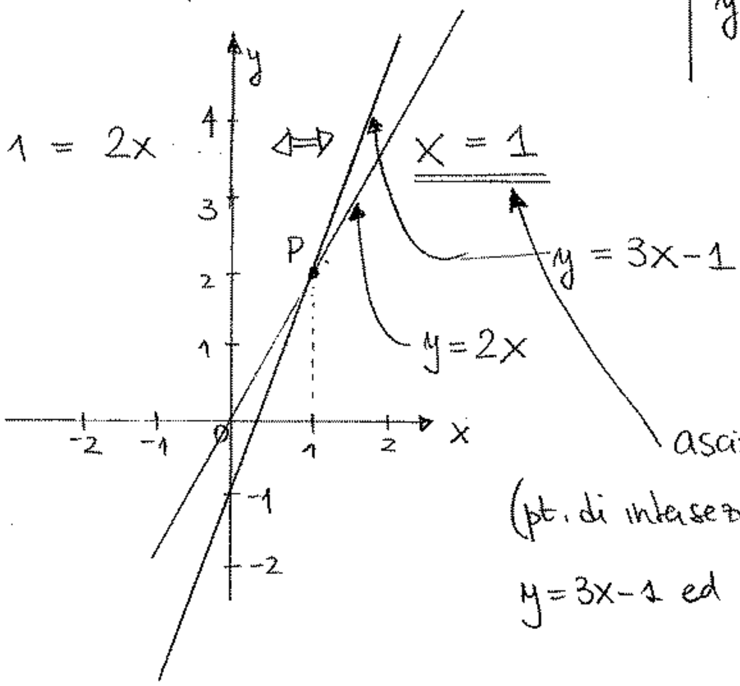
i) $2x - 1 = -x - \frac{1}{4} \Longleftrightarrow 3x = 1 - \frac{1}{4} \Longleftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{4}}}$



ascissa del punto P (pt. di intersezione delle rette $y = 2x - 1$ e $y = -x - 1/4$)

□

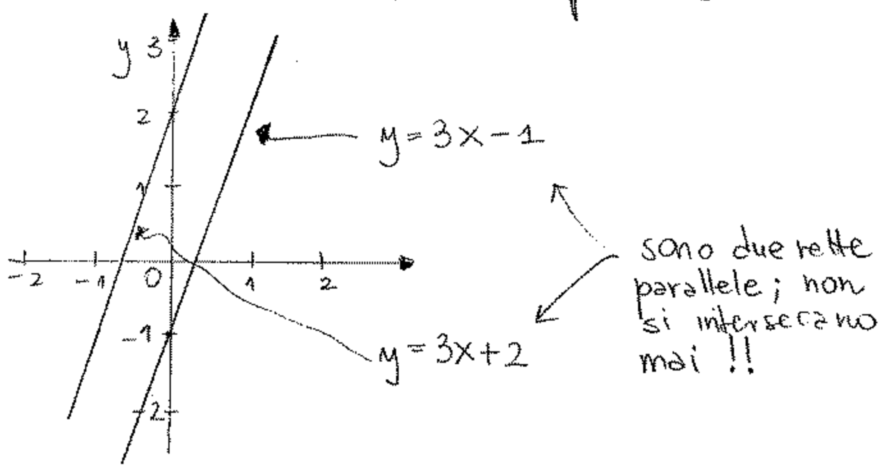
ii) $3x - 1 = 2x \Longleftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$



ascissa del punto P (pt. di intersezione delle rette $y = 3x - 1$ ed $y = 2x$)

□

iii) $3x - 1 = 3x + 2 \iff -1 = 2$ impossibile !!



Esercizio 6. Risolvete ed interpretate geometricamente le seguenti disequazioni:

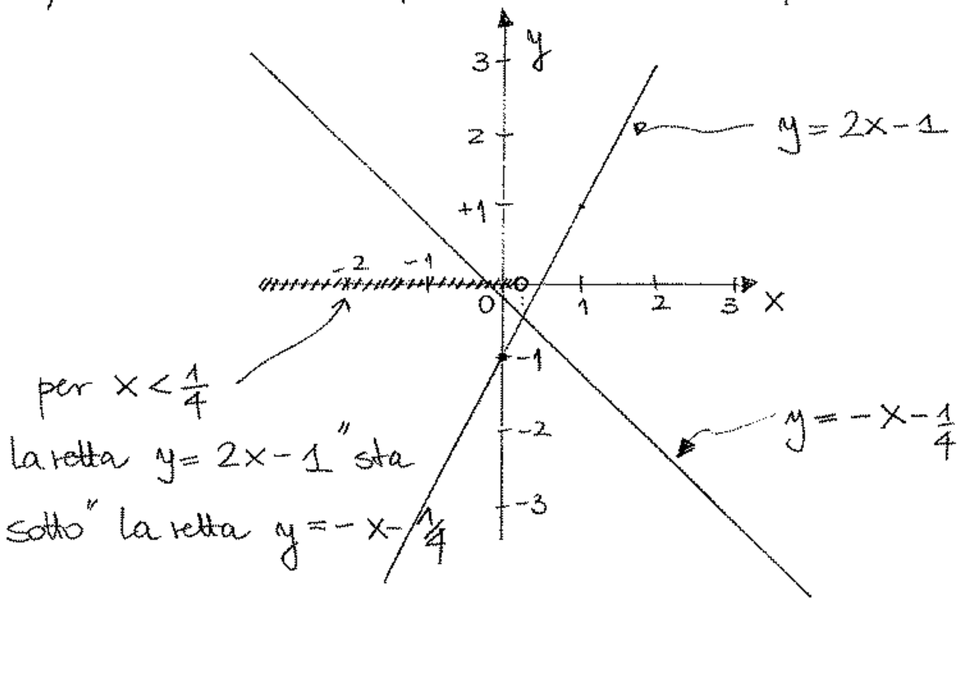
i) $2x - 1 < -x - \frac{1}{4}$;

ii) $2x - 1 \geq -x - \frac{1}{4}$;

iii) $2x - 3 \leq 2x + 1$.

Svolgimento:

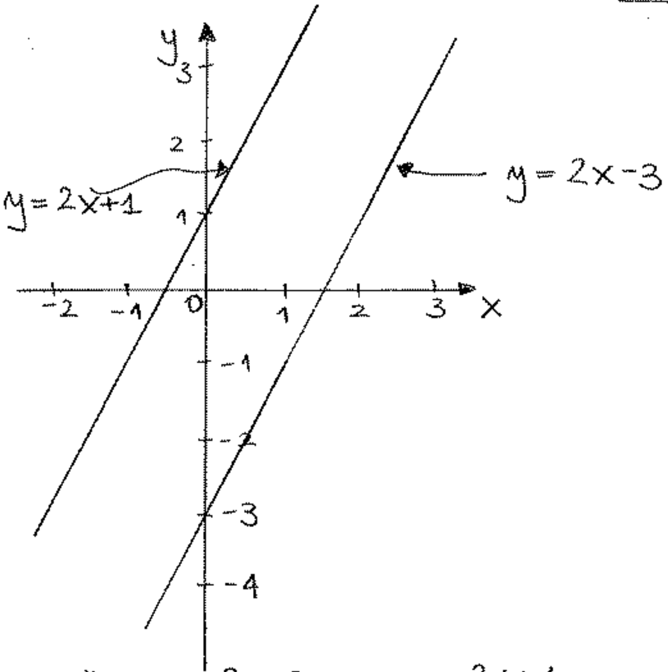
i) $2x - 1 < -x - \frac{1}{4} \iff 3x < \frac{3}{4} \iff \underline{\underline{x < \frac{1}{4}}}$



ii) $2x - 1 \geq -x - \frac{1}{4} \iff 3x \geq \frac{3}{4} \iff \underline{\underline{x \geq \frac{1}{4}}}$

(vedi Disegno in i))

iii) $2x - 3 \leq 2x + 1 \iff -3 \leq 1$ Vero $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}}}$



$\underline{\text{OSS}}$. che le due rette $y = 2x-3$ e $y = 2x+1$ sono parallele; si ha che $\forall x \in \mathbb{R}$ è vero che $2x-3 \leq 2x+1$.

$\underline{\text{Esercizio 7.}}$ Rappresentate nel piano cartesiano xy le parabole di equazione

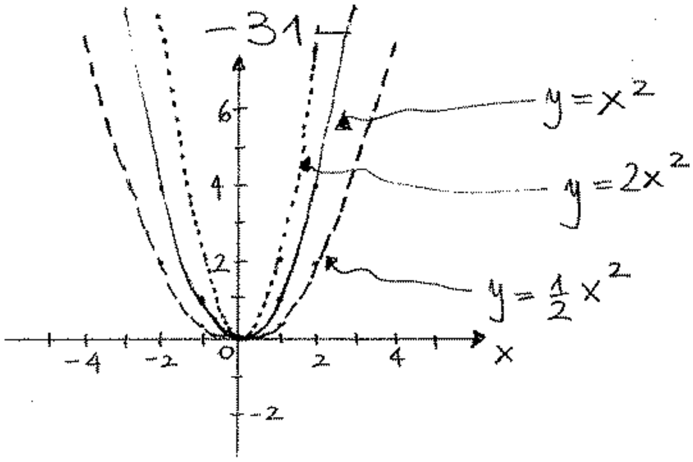
$y = x^2 \qquad y = 2x^2 \qquad y = \frac{1}{2}x^2$

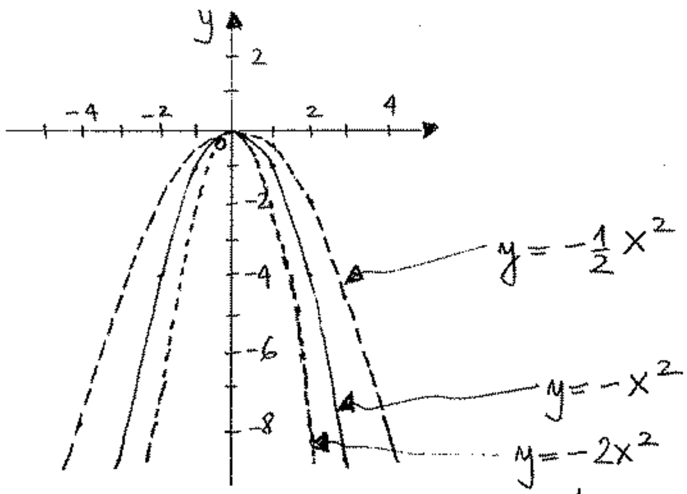
$y = -x^2 \qquad y = -2x^2 \qquad y = -\frac{1}{2}x^2$

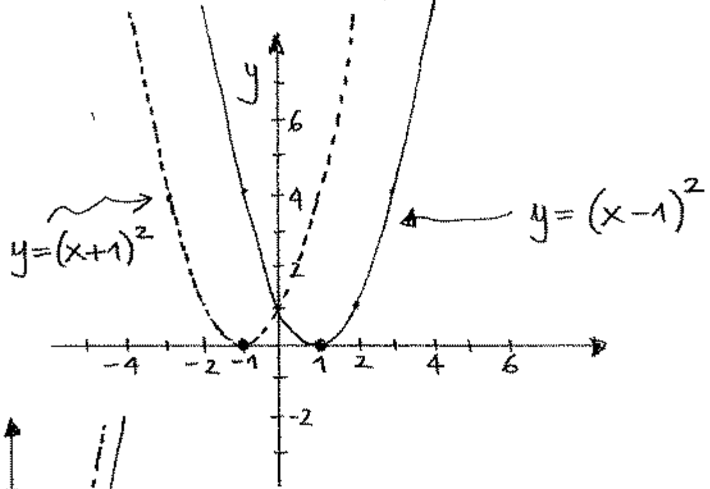
$y = (x-1)^2 \qquad y = (x+1)^2$

$y = x^2 - 1 \qquad y = x^2 + 1$.

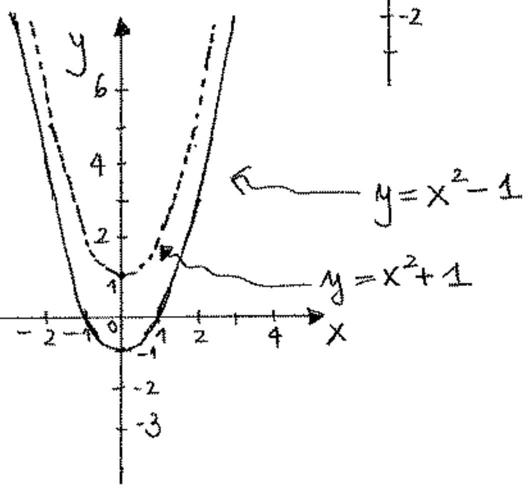
Svolgimento:







(traslazioni di $y=x^2$ lungo l'asse delle x)



(traslazioni di $y=x^2$ lungo l'asse delle y)