Commenti alla lezione del 12/12/2005 (22ª lezione Corso)

Riferimento bibliografico : [2] Cap. 5 Sez. 5.1 (pag. 206 (fondo pag); pag. 207

Sez. 5.2 ("L'idea" che sta sotto il concetto di integrale pag. 208 – 211, pag. 212)

Sez. 5.3 + Sez. 4.5 (pag. 162 + pag. 215)

Sommatoria

Il simbolo di sommatoria è utile per descrivere in modo conciso una somma di "tanti" addendi. Lo vediamo attraverso esempi.

Esempi:

i) $1+2+3+\cdots+19+20$ = somma dei primi 20 numeri naturali

$$= \sum_{i=1}^{20} i \quad \left(= \sum_{k=1}^{20} k \right).$$

si possono usare anche altri simboli, come per esempio, j, ℓ, m ... $\square$

ii) $$1+4+9+\cdots+144 = \sum_{i=1}^{12} i^2 \quad \left(= \sum_{m=1}^{12} m^2 \right). \qquad \square$$

iii) $$1+a+a^2+\cdots+a^{31} = \sum_{n=0}^{31} a^n \qquad \square$$

iv) $$k+3k+5k+\cdots+17k = \sum_{n=0}^{8} (2n+1)k = k\sum_{n=0}^{8}(2n+1) \qquad \square$$

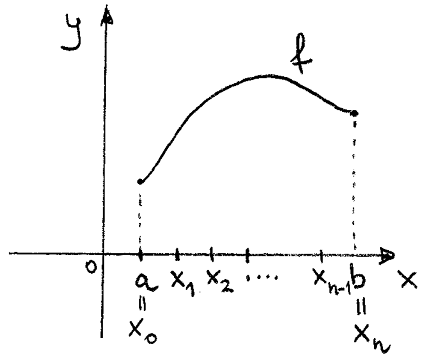
k è una costante assegnata

v) $$2k+4k+\cdots+24k = \sum_{n=1}^{12} 2nk = 2k\sum_{n=1}^{12} n. \qquad \square$$

vi) $$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{100} = \sum_{i=0}^{100} a_i \quad \left(= \sum_{m=1}^{101} a_{m-1} \right) \qquad \blacksquare$$

Integrale definito per funzioni continue

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Supponiamo, per ora, $f(x)\geq 0$ su $[a,b]$.



Fissato $n\in\mathbb{N}$ (poi faremo diventare n sempre più grande), consideriamo la suddivisione di $[a,b]$, individuata dai punti

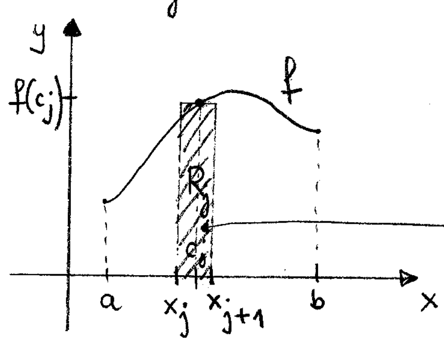
$$a=x_0,\quad x_1,\quad x_2,\ \dots,\ x_{n-1},\quad x_n=b$$

con

$$x_j=a+jh \qquad h=\frac{b-a}{n} \qquad j=0,\dots,n$$

(quindi
$$\begin{aligned} x_0&=a+0\cdot h=a\\ x_1&=a+h=a+\frac{b-a}{n}\\ x_2&=a+2h=a+2\frac{(b-a)}{n}\\ &\ \vdots\\ x_n&=a+n\,h=a+\cancel{n}\frac{(b-a)}{\cancel{n}}=b\ ) \end{aligned}$$

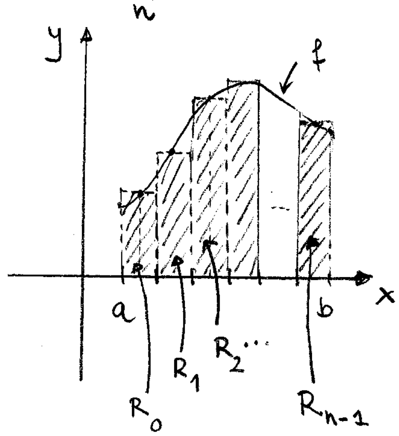
e scegliamo in ciascuno degli intervalli $[x_j,x_{j+1}]$ un punto arbitrario c_j.



Osserviamo che

$$\text{area}(R_j)=f(c_j)(x_{j+1}-x_j)$$

Considerando la somma di tutte le aree dei rettangoli R_j di base $\frac{b-a}{n}$ e altezza $f(c_j)$, cioè



$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \text{area}(R_j) = \sum_{j=0}^{n-1} f(c_j)\,(x_{j+1}-x_j) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(c_j)$$

otteniamo, più n è grande, una buona approssimazione dell'area del sottografico di f, cioè dell'area dell'insieme individuato da

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b, \ \ 0 \le y \le f(x)\}.$$

<u>Teorema</u>: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Sia $f \geq 0$. (*)
Allora $\lim_{n\to+\infty} S_n$ esiste finito ed è indip. dalla scelta dei pt. c_j.

Possiamo allora dare la seg. def.
Integrale di f su $[a,b]$ (definito) $= \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \doteq \lim_{n\to+\infty} S_n$

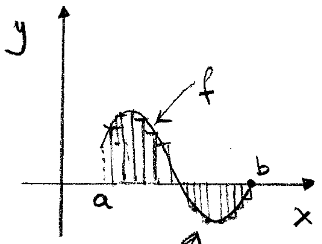
(*) <u>NOTA</u>: lo stesso teorema è valido anche se f cambia segno; in questo caso però, $\lim_{n\to+\infty} S_n$ non rappresenta l'area del sottografico di f.

• Ricordiamo che se $f \geq 0$ su $[a,b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \lim_{n\to+\infty} S_n \doteq \text{area del sottografico di } f$$
$$= \text{area}\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\right\}.$$

□

• Se f cambia segno, possiamo procedere come sopra,



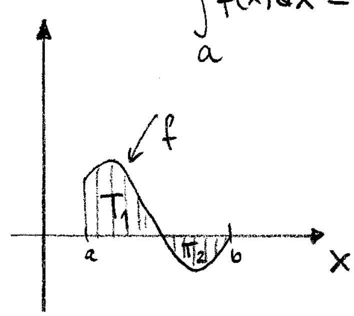
osservando però che

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} f(c_j)(x_{j+1}-x_j)$$

non avrà tutti addendi positivi (alcuni $f(c_j)$ saranno negativi – in questa zona!)

Come già scritto nella NOTA a fondo pag. 242, esiste comunque finito $\lim_{n\to+\infty} S_n$, e scriveremo

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \lim_{n\to+\infty} S_n = \text{area}(T_1) - \text{area}(T_2)$$



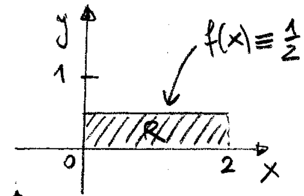
□

Usando l'interpretazione geometrica del simbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ abbiamo immediatamente i seguenti esempi:

Esempio 1.

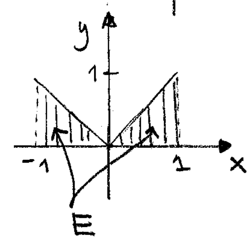
i) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ □

ii) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{2}\,dx = \text{area}(R) = 2\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}.$



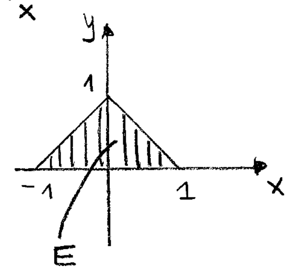
iii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\,dx = \text{area}(E) =$

$2\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}$



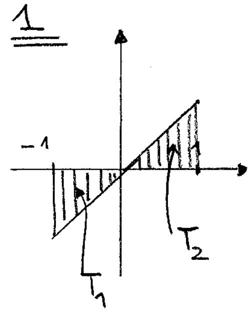
iv) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-|x|)\,dx = \text{area}(E) =$

$= \dfrac{2\cdot 1}{2} = \underline{\underline{1}}$



v) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\,dx = -\text{area}\,T_1 + \text{area}\,T_2$

$= \underline{\underline{0}}$



Proprietà dell' integrale

Direttamente dalla definizione si possono dimostrare le seguenti proprietà dell' integrale. Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Allora

ⓐ Linearità dell' integrale :

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \quad \forall c\in\mathbb{R}.$$

ⓑ Additività rispetto all' intervallo di integrazione : Se $a\le c\le b$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

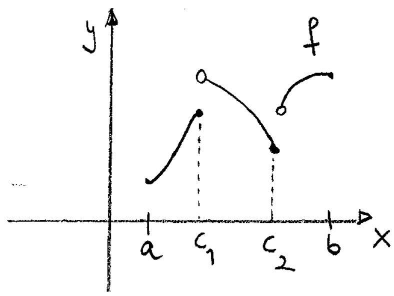
ⓒ Monotonia (rispetto alla funzione integranda) : se

$$f\ge 0 \text{ in } [a,b] \implies \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$

$$f\ge g \text{ in } [a,b] \implies \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx.$$

Integrale definito per funzioni continue a tratti

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua a tratti (ha solo un nr. finito di punti di discontinuità), allora chiaramente possiamo estendere il concetto di integrale definito. Per esempio, se f è discontinua in solo 2 pt. c_1, c_2 t.c. $a<c_1<c_2<b$, allora

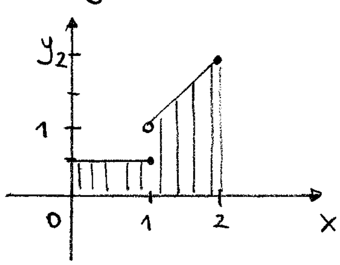


$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{b} f(x)dx.$$

$\square$

Esempio 2. Calcolate $\int_0^2 f(x)dx$, dove $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{se } 0\le x\le 1\\ x & \text{se } 1< x\le 2\end{cases}$

Svolgimento:



$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}dx + \int_1^2 x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1+2}{2} = \frac{1}{2}+\frac{3}{2} = \underline{\underline{2}}.$$

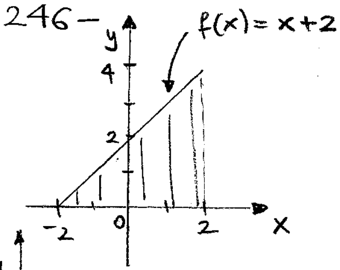
$\blacksquare$

Esercizio 3. Calcolate gli integrali seguenti sfruttando la simmetria e/o interpretando gli integrali come aree.

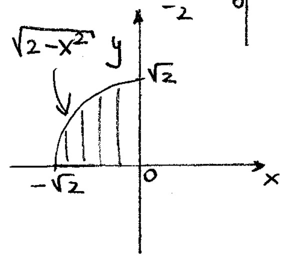
(i) $\int_{-2}^{2}(x+2)\,dx$ (ii) $\int_{-\sqrt{2}}^{0}\sqrt{2-x^2}\,dx$ (iii) $\int_{-1}^{1}(x^3-x)\,dx$.

Svolgimento:

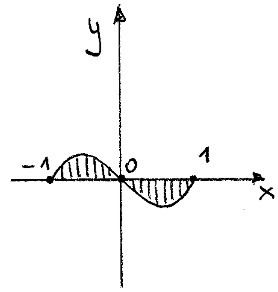
(i) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x+2)\,dx = \underline{\underline{8}}$



(ii) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{0}\sqrt{2-x^2}\,dx = \frac{\pi(\sqrt{2})^2}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$



(iii) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3-x)\,dx = \underline{\underline{0}}.$



Calcolo dell'integrale per variazione di una primitiva

La definizione di integrale non si presta in generale al suo calcolo effettivo. Uno dei metodi più usati è quello per <u>variazione di una primitiva</u> che illustreremo in seguito.

<u>Def.</u> Una funzione F è una <u>primitiva</u> di $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua se $\begin{cases} \text{i) } F \text{ è derivabile in } [a,b] \\ \text{ii) } F'(x)=f(x) \text{ in } [a,b]. \end{cases}$

<u>OSS. 1</u> Se F è una primitiva di f, allora lo è anche $F+c$, $\forall c\in\mathbb{R}$. Infatti $F(x)+c$ è derivabile e

$$(F(x)+c)' = F'(x) + c' = F'(x) = f(x) \quad \forall x\in[a,b]$$

Dalla tabella delle derivate delle funzioni elementari segue immediatamente la seguente tabella:

	funzione f	primitiva F
	$k \in \mathbb{R}$	kx
	x	$\frac{x^2}{2}$
in generale $\forall \alpha \neq -1$	x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
	$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
	e^x	e^x
$a>0$ $a\neq 1$	a^x	$\frac{a^x}{\log a}$

<u>OSS. 2.</u> Se F_1 e F_2 sono due primitive di f in $[a,b]$, allora F_1 e F_2 differiscono al più per una costante.

Infatti, poichè F_1, F_2 sono due primitive di f si ha

$$\left.\begin{array}{l} F_1'(x) = f(x) \\ F_2'(x) = f(x) \end{array}\right. \quad \forall x \in [a,b].$$

Ne segue $F_1'(x) - F_2'(x) = \left(F_1(x) - F_2(x)\right)' = 0 \ \forall x \in [a,b]$

e quindi $F_1(x) - F_2(x) = \text{costante}.$ $\square$

Ne segue che se si conosce una primitiva F di f in $[a,b]$, tutte le altre sono della forma $F + c$, $c \in \mathbb{R}$. ■