Commenti alla lezione del 22/11/2005 (14ª lezione Corso)

Riferimento bibliografico : [2] Cap. 3 Sez. 3.3 (enunciato Teor. 3.7
" Prop. 3.8
" Teor. 3.11)

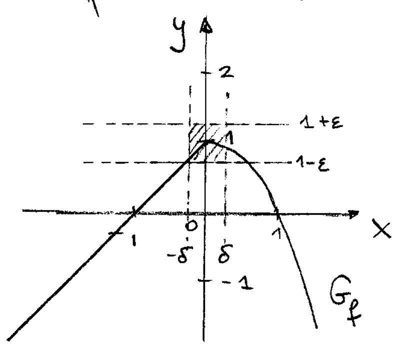
Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ -x^2+1 & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

Studiate la continuità di f.

Svolgimento: f è continua in ogni pt. $x<0$ e $x>0$ (essendo $x+1$ e $-x^2+1$ funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$).

Vediamo come si comporta la funzione f nel pt. $x=0$ (dove si "attaccano" le funzioni $x+1$ e $-x^2+1$: se si "attaccano bene" la funzione è continua, altrimenti discontinua).



Fissiamo $0<\varepsilon<1$, allora basta prendere $\delta = \varepsilon$ e si ha $\forall x \in \mathbb{R}$ con

$$|x-0|<\delta \qquad (\Leftrightarrow \; -\delta < x < \delta)$$

$$\Downarrow$$

$$|f(x) - \underset{1}{\underset{\parallel}{f(0)}}| < \varepsilon \qquad \Big(\Leftrightarrow \; |x+\cancel{1}-\cancel{1}| < \varepsilon \text{ se } -\delta<x\leq 0$$

$$\text{o} \quad |-x^2+\cancel{1}-\cancel{1}| < \varepsilon \text{ se } 0<x<\delta \Big)$$

■

Funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$.

Pbm. risolvere l'equazione del tipo $f(x)=0$,
(Ovviamente se $f(x)=ax+b$, $f(x)=ax^2+bx+c$, allora possiamo risolvere esplicitamente l'eq. data sopra)
geometricamente significa determinare le ascisse dei punti di intersezione tra il grafico di f e l'asse delle ascisse.
Naturalmente ci possono essere infinite soluzioni, un numero finito di soluzioni o nessuna soluzione.
Ogni soluzione dell'eq. $f(x)=0$ si chiama zero di f.

Esempi: Siano

(i) $f(x)=x^2+1$; $\quad f(x)=e^x$; $\quad f(x)=-x^4-x^2-1$;

allora

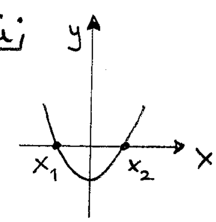
$f(x)=0$ non ha soluzione;

(infatti, $x^2+1>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$; $e^x>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$; $-x^4-x^2-1<0 \ \forall x\in\mathbb{R}$). $\square$

(ii) $f(x)=x^2-1$; $\quad f(x)=\log x$; $\quad f(x)=x^3-x$

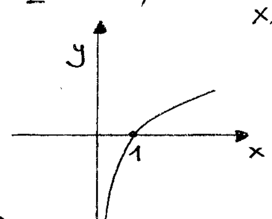
allora

$f(x)=0$ ha un nr. finito di soluzioni;

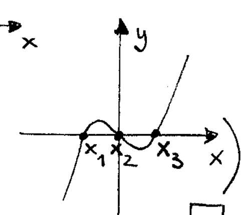


(infatti $x^2-1=0 \iff x_1=-1,\ x_2=1$;

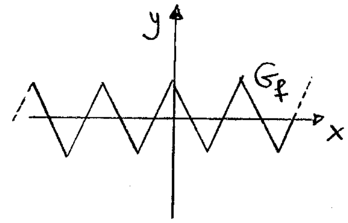
$\log x=0$ ha $x_1=1$;



$x^3-x=x(x^2-1)=0 \iff x=0$
$x=-1,\ x=1$.



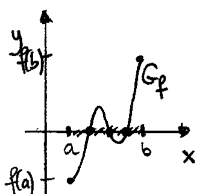
) $\square$

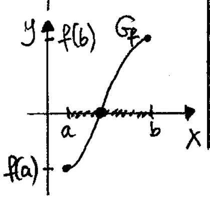
(iii) 

per tale f abbiamo che

$f(x)=0$ ha infinite soluzioni, (o dicasi anche infiniti zeri)

Il teorema degli zeri ci dà delle condizioni sufficienti sotto le quali esiste almeno uno zero di f.





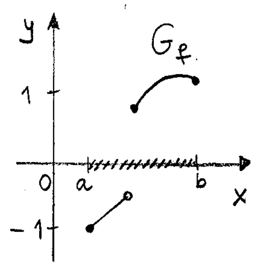
Teorema (di esistenza degli zeri): Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua e supponiamo che $f(a)$ abbia segno diverso da $f(b)$.
Allora $\exists$ un punto $c\in\,]a,b[$ t.c.

$$f(c)=0.$$

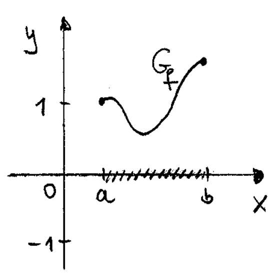
Se f è crescente (o decrescente), allora lo zero è unico.

OSS. Se una delle ipotesi del teorema precedente non è soddisfatta non è più garantita l'esistenza di uno zero (può comunque esistere ma non è certo!)

Esempi:

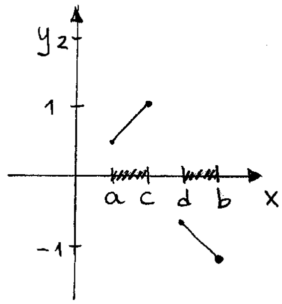
(i) 

abbiamo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(a)<0$, $f(b)>0$ ma f non è continua. Non sono soddisfatte le ipotesi del teorema sopra.
In questo caso $\nexists$ uno zero di f. $\square$

(ii) 

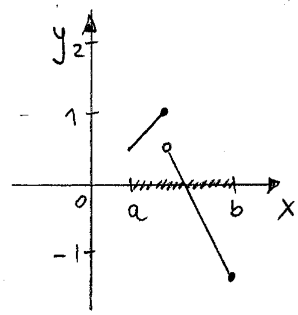
abbiamo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f continua, ma $f(a)>0$, $f(b)>0$. Non sono soddisfatte le ipotesi del teorema sopra.
In questo caso $\nexists$ uno zero di f. $\square$

(iii)



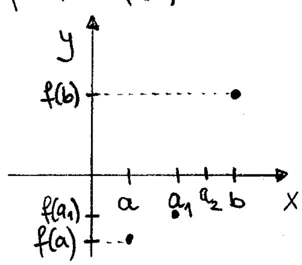
abbiamo $f : [a,c] \cup [d,b] \to \mathbb{R}$ continua, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Non sono soddisfatte le ipotesi del teorema sopra, poiché $[a,c] \cup [d,b]$ non è un intervallo!! In questo caso $\nexists$ uno zero di f. □

(iv)



abbiamo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, ma f non è continua in $[a,b]$. Osserviamo che $\exists c \in]a,b[\; : \; f(c) = 0$.
Questo non è in contraddizione con il teorema di Jensa degli zeri: quest'ultimo ci dà <u>condizioni sufficienti</u> per avere almeno uno zero di f, ma non condizioni necessarie!! ■

<u>Dim. teorema di Jensa degli zeri</u>: Una possibile dimostrazione del teorema si basa sul <u>metodo di bisezione</u>. Abbiamo, per ipotesi che $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno diverso. Possiamo supporre $f(a) < 0$, $f(b) > 0$



Consideriamo il punto medio di $[a,b]$; scriviamo

$$a_1 \doteq \frac{a+b}{2}$$

Se $f(a_1) = 0$, allora basta prendere $c = a_1$ e il teorema è dim. Altrimenti $f(a_1) > 0$ o $f(a_1) < 0$. Supponiamo $f(a_1) < 0$. Consideriamo il punto medio di $[a_1, b]$; poniamo

$$a_2 = \frac{a_1 + b}{2} .$$

Se $f(a_2) = 0$, abbiamo dim. il teorema. Altrimenti $f(a_2) > 0$ o $f(a_2) < 0$. Supponiamo $f(a_2) > 0$. Allora consideriamo $a_3 = \frac{a_2 + a_1}{2}$ e si

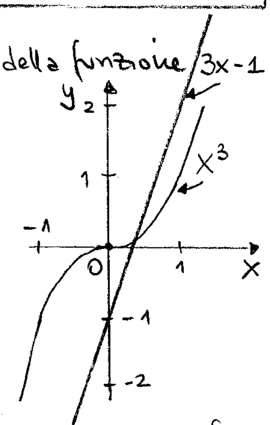
$f(a_3)$. Si procede in questo modo e usando il fatto che f è continua si prova infine che questi punti si "avvicinano" a un punto c tale che $f(c)=0$. ∎

Esempio 1. Il teorema sopra fornisce anche un metodo per approssimare le soluzioni di un'equazione; proviamo a determinare una soluzione dell'equazione

$$x^3 = 3x - 1$$

con una precisione superiore a 0.25. Questo significa trovare un numero che dista meno di 0.25 da una soluzione dell'equazione.

Svolgimento: Le soluzioni dell'equazione sono gli zeri della funzione continua $f(x) = x^3 - 3x + 1$; consideriamola su $[0,1]$.



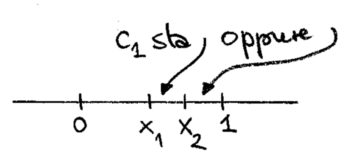
Abbiamo $f(0) = 1 > 0$ e $f(1) = -1 < 0$; dunque $\exists\, c \in]0,1[$ t.c. $f(c)=0$.

Questo c dista da $x = \frac{1}{2}$ meno di 0.5; sia $x_1 = \frac{1}{2}$.

Notiamo che $f(x_1) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{8} < 0$.

Possiamo applicare di nuovo il teorema sopra all'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$ trovando che $\exists\, c_1 \in]0, \frac{1}{2}[$ soluzione dell'equazione. Prendendo $x_2 = \frac{1}{4}$, possiamo asserire che una soluzione dell'eq. (ossia c_1) dista da x_2 meno di 0.25.

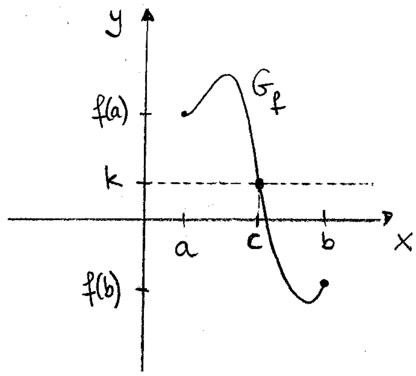
questi grafici ci fanno vedere che $\exists\, c \in]0,1[$ t.c. $x^3 = 3x - 1$.



, quindi dista da x_2 meno di 0.25. ∎

Applicando il teorema di Esistenza degli zeri alle funzioni traslate $f(x) - k$ con $k \in \mathbb{R}$ si ottiene il seguente risultato.

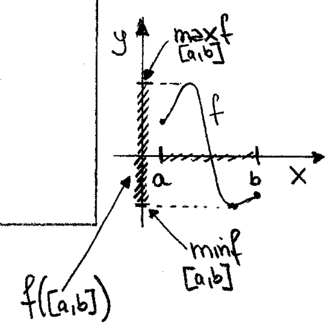
<u>Proposizione</u>: Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>continua</u> e
$$f(a) \leq k \leq f(b),$$
allora $\exists$ un pt. $c \in \,]a,b[$ t.c. $f(c) = k$.



$\square$

Il prossimo teorema ci dà delle <u>condizioni sufficienti</u> sotto le quali f ha massimo e minimo.

<u>Teorema (di Weierstrass)</u>: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>continua</u> sull'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$.
Allora f ha massimo e minimo. In particolare,
$$f([a,b]) = \left[\min_{[a,b]} f \, , \, \max_{[a,b]} f\right].$$

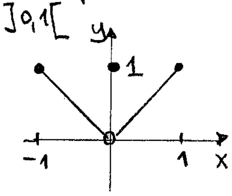


<u>Esempi</u>:

(i) $f(x) = x$ su $\mathbb{R}$: $\nexists \min_{\mathbb{R}} f$, $\nexists \max_{\mathbb{R}} f$: questo non è in contraddizione con il teorema sopra poiché $\mathbb{R}$ non è limitato! $\square$

(ii) $f(x) = x$ su $]0,1[$: $\nexists \min_{]0,1[} f$, $\nexists \max_{]0,1[} f$: nota $]0,1[$ non è chiuso! $\square$

(iii) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

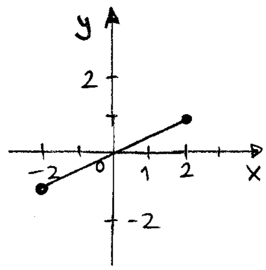


$\nexists \min\limits_{[-1,1]} f$, $\max\limits_{[-1,1]} f = 1$ $x=-1,\ x=0,\ x=1$ pt. di massimo.

Anche questo esempio non è in contraddizione con il teor. di W. Infatti, f <u>non</u> è continua su $[-1,1]$.

$\square$

(iv) $f(x)=\frac{x}{2}$ su $[-2,2]$: $\exists$ max e min per il teor. di W:

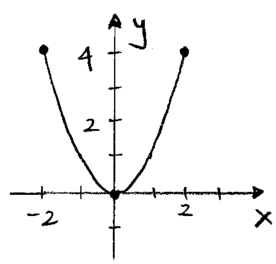


$\min\limits_{[-2,2]} f = -1$ $x=-2$ pt. di minimo.

$\max\limits_{[-2,2]} f = 1$ $x=2$ pt. di massimo

$\square$

(v) $f(x)=x^2$ su $[-2,2]$: $\exists$ max e min per il teor. di W:

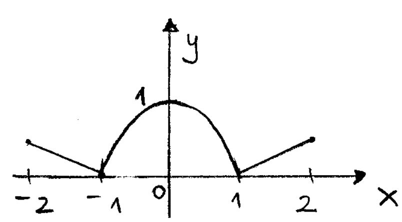


$\min\limits_{[-2,2]} f = 0$ $x=0$ pt. di minimo.

$\max\limits_{[-2,2]} f = 4$ $x=-2,\ x=2$ pt. di massimo.

$\square$

(vi) $f(x)=\begin{cases} -\frac{x}{2}-\frac{1}{2} & \text{se } x\in[-2,-1] \\ -x^2+1 & \text{se } x\in\,]-1,1[\\ \frac{x}{2}-\frac{1}{2} & \text{se } x\in[1,2] \end{cases}$: $\exists$ max e min per il teor. di W:

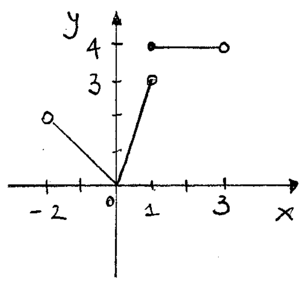


$\min\limits_{[-2,2]} f = 0$ $x=-1,\ x=1$ pt. di minimo

$\max\limits_{[-2,2]} f = 1$ $x=0$ pt. di massimo.

$\square$

NOTA: f può avere massimo e/o minimo anche se f non è continua oppure non è definita su un intervallo chiuso e limitato: il teorema di Weierstrass ci dà condizioni sufficienti (non necessarie) che garantiscono massimo e minimo.



Consideriamo, per esempio

$$f :]-2,3[\to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } -2 < x \leq 0 \\ 3x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 4 & \text{se } 1 \leq x < 3. \end{cases}$$

Abbiamo che f non è continua su $]-2,3[$ (poiché non è continua in $x = 1$); inoltre $]-2,3[$ è un intervallo limitato, ma non chiuso. Comunque, $\exists \min\limits_{]-2,3[} f = 0$ $\quad x = 0$ pt. di minimo

$\exists \max\limits_{]-2,3[} f = 4$ $\quad x \in [1,3[$ pt. di massimo.

■

Esercizio 2. La funzione $f(x) = \dfrac{x^3 - x^5}{1 + x^4 + x^6}$ ha

(a) (valore) massimo su $[1,3]$?

(b) (valore) minimo su $[1,3]$?

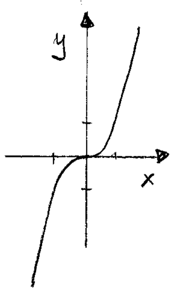
Risposta: (a) Sì; f è continua e $[1,3]$ un intervallo chiuso e limitato; per il teorema di Weierstrass $\exists \max\limits_{[1,3]} f$.

(b) Sì; come (a).

■

Esercizio 3. La funzione $f(x)=x^3$ ha massimo su

ⓐ $[1,5]$? ⓑ $[-5,0]$? ⓒ $]3,4[$?.



Risposte:

ⓐ sì (per Weierstrass) ; inoltre $\max\limits_{[1,5]} f = 5^3 = 125$ $x=5$ pt. di massimo.

ⓑ sì (") ; inoltre $\max\limits_{[-5,0]} f = 0$ $x=0$ pt. di massimo.

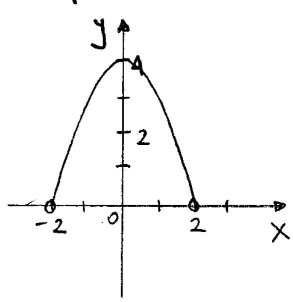
ⓒ $\nexists \max\limits_{]3,4[} f$.

Esercizio 4. La funzione $f(x)=4-x^2$ ha

ⓐ massimo su $]-2,2[$?

ⓑ minimo su $]-2,2[$?

Risposta:



ⓐ sì, e $\max\limits_{]-2,2[} f = 4$ $x=0$ pt. di massimo

ⓑ No !

Esercizio 5. Provate se le seguenti equazioni hanno soluzione nell'intervallo proposto:

i) $x^3+2x+5=0$ su $[-2,-1]$;

ii) $x^4+3x-5=0$ su $[1,2]$.

Svolgimento:

i) Poniamo $f(x)=x^3+2x+5$; f è continua ; inoltre

$f(-2)=-8-4+5=-7<0$ $f(-1)=-1-2+5=2>0$.

Per il teorema di Zenza degli zeri esiste $c \in]-2,-1[$ tale che $f(c)=0$!!

NOTA: Consideriamo $f(-\frac{3}{2}) = -\frac{11}{8} < 0$; $f(-1) = 2 > 0$.
Riapplicando il teorema di Zenza degli zeri (ora all'intervallo $[-\frac{3}{2},-1]$) segue che $\exists c \in]-\frac{3}{2},-1[$ con $f(c)=0$, e proseguendo in questo modo si può localizzare sempre meglio l'unico zero (in questo caso $f(x)$ è crescente, poichè x^3 lo è e $2x+5$ lo è, e la somma di due funzioni crescenti è crescente) di tale f, e quindi l'unica soluzione dell'eq. data. $\square$

ii) Poniamo $f(x) = x^4 + 3x - 5$; f è continua ; inoltre
$f(1) = 1+3-5 = -1 < 0$, $f(2) = 16+6-5 = 17 > 0$.
Per il teorema di Zenza degli zeri esiste $c \in]1,2[$ tale che $f(c)=0$, e quindi una soluzione dell'eq. data.

$\blacksquare$