Commenti alla lezione del 6/12/2005 (20ª lezione Corso)

Riferimento bibliografico : [2] Cap. 4 Sez. 4.2 (pag. 138 ; ultimo paragrafo)
appendice Cap. 4 [4.3] (pag. 193 ; prima metà Teorema A4.6)
Cap. 4 Sez. 4.7 (studio qualitativo delle funzioni)

Derivate di ordine superiore

Def. Se $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ è derivabile, allora è definita la funzione derivata (prima) di f, $f':]a,b[\to \mathbb{R}$. Se f' a sua volta è derivabile in $]a,b[$, la sua derivata si chiama derivata seconda di f:

$$f'':]a,b[\to \mathbb{R} \qquad f''(x) = (f'(x))' \quad \forall x \in]a,b[.$$

Notazione : $f''(x)$; $\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$; $D^2 f(x)$; $\ddot{f}(x)$.

OSS. Se $f'':]a,b[\to \mathbb{R}$ è a sua volta derivabile, allora possiamo definire la funzione derivata terza di f : $f''':]a,b[\to \mathbb{R}$

$$f'''(x) = (f''(x))'$$

notazione : $f'''(x) = f^{(3)}(x)$; e così via ... derivata n-esima

$$f^{(n)}:]a,b[\to \mathbb{R} \ldots$$

$\square$

Esercizio 1. Calcolate la derivata seconda, dove esiste, delle seguenti funzioni :

i) $f(x) = x^2$; ii) $f(x) = e^x$; iii) $f(x) = \log x$;

iv) $f(x) = x^2 e^{x+1}$ v) $f(x) = (x+1)\log(1+x^2)$ vi) $f(x) = x^2\sqrt{1+3x}$

Svolgimento:

i) $f(x) = x^2$: $\quad \operatorname{dom} f' = \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x$

$\operatorname{dom} f'' = \mathbb{R} \quad f''(x) = 2$. $\square$

ii) $f(x) = e^x$: $\quad \operatorname{dom} f' = \mathbb{R} \quad f'(x) = e^x$

$\operatorname{dom} f'' = \mathbb{R} \quad f''(x) = e^x$. $\square$

iii) $f(x) = \log x$: $\quad \operatorname{dom} f' =]0, +\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{x}$

$\operatorname{dom} f'' =]0, +\infty[\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. $\square$

iv) $f(x) = x^2 e^{x+1}$: $\quad \operatorname{dom} f' = \mathbb{R} \quad f'(x) = 2xe^{x+1} + x^2 e^{x+1}$

$$= xe^{x+1}(2+x)$$

$\operatorname{dom} f'' = \mathbb{R} \quad f''(x) = e^{x+1}(2+x) + xe^{x+1}(2+x) + $

$$+ xe^{x+1}$$

$$f''(x) = e^{x+1}(2 + 4x + x^2) \quad \square$$

v) $f(x) = (x+1)\log(1+x^2)$: $\quad \operatorname{dom} f' = \mathbb{R} \quad f'(x) = \log(1+x^2) + (x+1) \cdot \frac{2x}{1+x^2}$

$\operatorname{dom} f'' = \mathbb{R} \quad f''(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{[2x(x+1)]'(1+x^2) - 2x(x+1)2x}{(1+x^2)^2}$

$$= \frac{2x}{1+x^2} + \frac{(4x+2)(1+x^2) - 4x^3 - 4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x + \cancel{4x^3} + 2 + 2x^2 - \cancel{4x^3} - 4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2x(1+x^2) - 2x^2 + 4x + 2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + 6x + 2}{(1+x^2)^2} \quad \square$$

vi) $f(x) = x^2\sqrt{1+3x}$ $\qquad$ $\operatorname{dom} f' = \{x \in \mathbb{R} : 1+3x > 0\}$
$= \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$

$$f'(x) = 2x\sqrt{1+3x} + \frac{3x^2}{2\sqrt{1+3x}}$$

$\operatorname{dom} f'' = \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$

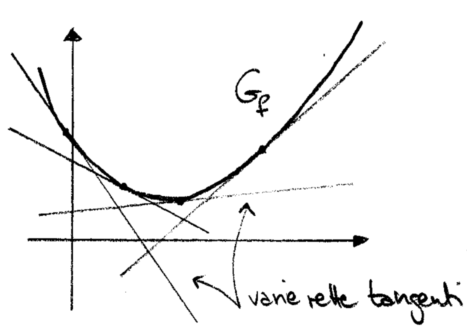
$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\sqrt{1+3x} + \frac{\cancel{2}x \cdot 3}{\cancel{2}\sqrt{1+3x}} + \left(\frac{3x^2}{2\sqrt{1+3x}}\right)' \\ &= 2\sqrt{1+3x} + \frac{3x}{\sqrt{1+3x}} + \frac{3}{2}\left(\frac{2x\sqrt{1+3x} - \frac{3x^2}{2\sqrt{1+3x}}}{1+3x}\right) \\ &= 2\sqrt{1+3x} + \frac{3x}{\sqrt{1+3x}} + \frac{3}{2}\left(\frac{4x(1+3x) - 3x^2}{(\sqrt{1+3x})^3}\right) \\ &= \underline{\underline{\frac{2+9x}{\sqrt{1+3x}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{9x^2 + 4x}{(\sqrt{1+3x})^2}}} . \end{aligned}$$

■

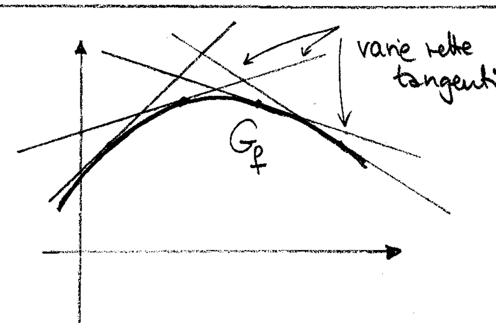
<u>Funzione convessa (concava). Punto di flesso</u>

Def. Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabile. Se il grafico di f si mantiene <u>sopra</u> la retta tangente al grafico in <u>ogni</u> suo punto, allora f si dice <u>convessa</u>.

Se il grafico di f si mantiene <u>sotto</u> la retta tangente al grafico in <u>ogni</u> suo punto, allora f si dice <u>concava</u>.



f è convessa



f è concava

□

Def. Se $x_0 \in]a,b[$, ed esiste un intorno destro (sinistro) di x_0 in cui f è convessa e un intorno sinistro (destro) di x_0 in cui f è concava, allora x_0 si dice un <u>punto di flesso.</u>

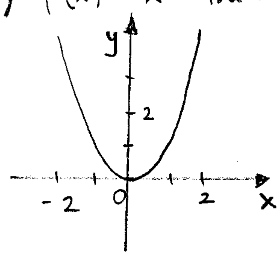
<u>Proposizione</u>: Sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabile due volte in $]a,b[$; allora

$$f'' \geq 0 \text{ in }]a,b[\implies f \text{ convessa in }]a,b[$$
$$f'' \leq 0 \text{ in }]a,b[\implies f \text{ concava in }]a,b[.$$

<u>Esempi.</u>

i) $f(x) = x^2$ su $\mathbb{R}$ è convessa: infatti $f'(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$



$\square$

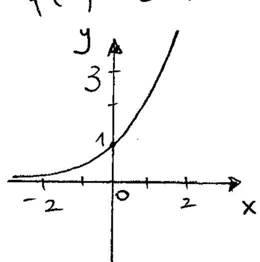
$f(x) = x^n$ su $\mathbb{R}$, con n pari, è convessa: infatti $f'(x) = n x^{n-1}$

$f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\square$

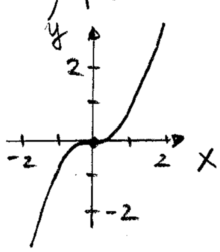
ii) $f(x) = e^x$ su $\mathbb{R}$ è convessa: infatti $f'(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$



$\square$

iii) $f(x) = x^3$ su $\mathbb{R}$ è concava su $]-\infty, 0]$ e convessa su $[0, +\infty[$:



infatti $f'(x) = 3x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = 0 \iff x = 0$

$f''(x) = 6x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$- \; - \; \underset{0}{\bullet} \; + \; + \quad f''$

$-2 \qquad 0 \qquad 2$

$\cap \qquad \cup \quad f$

$x = 0$ pt. di flesso

$\blacksquare$

Studio qualitativo di una funzione (schema per la determinazione del grafico di una funzione).

Passiamo ora ad indicare quali sono i punti più importanti per affrontare uno studio qualitativo di una funzione f. Voglio sottolineare che lo schema proposto qui di seguito è solo orientativo; infatti talvolta non tutti i punti elencati si riescono a sviluppare con calcoli espliciti (e quindi si omettono) e si cercherà allora di determinare il comportamento della funzione attraverso i soli punti svolti.

1. determinazione del dom(f): (dominio, insieme di definizione di f) se non esplicitamente assegnato

   ricerca di eventuali simmetrie (funzioni pari, dispari)
2. studio del segno di f : determinare gli insiemi dove $f>0$, $f<0$, $f=0$.
3. comportamento della funzione agli estremi di dom(f):

   limiti ; asintoti

   (per evitare di dimenticare l'analisi di qualche punto di frontiera conviene, ad esempio procedendo da $-\infty$ a $+\infty$, determinare per ordine tali punti e calcolare i rispettivi limiti uno per uno).
4. continuità : si determinano gli eventuali punti in cui f risulta discontinua. Se x_0 è un pt. di discontinuità di f si calcolano (se esistono) i limiti sinistro e destro di f in x_0.
5. determinazione del dom(f') $\subseteq$ dom f , e si calcola la derivata f'

   Si determinano gli eventuali punti critici (stazionari) della f e si determina la loro natura in base allo studio del segno di f', cioè in base alla monotonia di f. Eventualmente si può calcolare lim f' negli estremi di dom(f') per individuare eventuali cuspidi, flessi a tangente verticale.

6. studio della convessità o concavità della f : si ricerca dom(f'') e si studia il segno di f''. Si determinano eventuali punti di flesso.

   Delle volte accade che la risoluzione della disequazione $f''(x) \geq 0$ è piuttosto complessa ; in questi casi si cerca di determinare il comportamento qualitativo della funzione f attraverso le informazioni ottenute nei punti precedenti.

7. Si traccia un grafico qualitativo della funzione f che tenga conto delle informazioni ricavate nei punti precedenti.

Esercizio 1. Tracciate un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad ,$$

Svolgimento :

1. dom $f = \mathbb{R}$; inoltre f è pari (quindi il grafico risulta simmetrico rispetto all'asse y ; basta studiare f solo su $]-\infty, 0]$ o $[0, +\infty[$) $\square$

2. $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (il grafico di f si trova tutto sopra l'asse delle x) $\square$

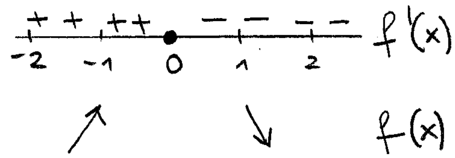
3. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$: determiniamo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$$ $y = 0$ è asintoto orizzontale per f per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$. □

4. f è continua essendo rapporto di funzioni continue e il denominatore non si annulla mai. □

5. $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$; inoltre $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

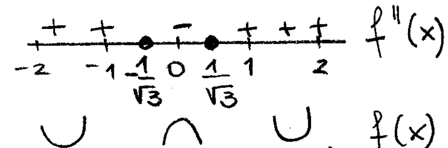
Allora $f'(x) = 0 \iff x = 0$ pt. critico.



Dalla monotonia della f segue che $x = 0$ è un pt. di massimo locale (stretto) per f; anzi, sarà massimo di f su tutto $\mathbb{R}$. □

6. $\operatorname{dom} f'' = \mathbb{R}$ $$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^{\cancel{2}} + 2x \cdot 2\cancel{(x^2+1)}2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}3}} = \frac{-2x^2-2+8x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$



$\Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ sono pt. di flesso □

7.

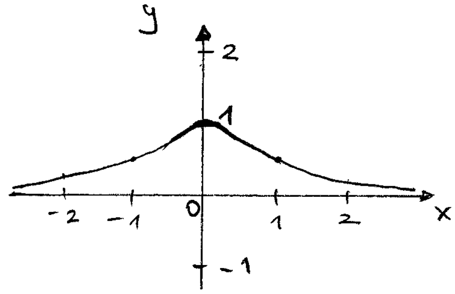


grafico approssimativo di f. ■

Esercizio 2. Tracciate un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}.$$

Svolgimento:

1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (infatti deve essere $x^2-1 \neq 0$) $\square$

2. studio del segno di f:

$$\begin{array}{c|ccccccccc|l}
 & & -2 & & -1 & & 0 & & 1 & 2 & \\
\hline
x & - & - & - & - & - & \bullet & + & + & + & x \\
x^2-1 & + & + & + & 0 & - & - & - & 0 & + + + & x^2-1 \\
f(x) & - & - & - & 0 & + & \bullet & - & 0 & + + + & f(x)
\end{array}$$

$\square$

3. abbiamo $\operatorname{dom} f =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$: allora

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Si ha allora che $x = -1$, $x = 1$ sono asintoti verticali per f

$y = 0$ è asintoto orizzontale per f. $\square$

4. In tutti i punti del suo dominio f è continua essendo rapporto di funzioni continue. $\square$

5. $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$ e si ha

$$f'(x) = \frac{(x^2-1) - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

Notiamo $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathrm{dom}\, f'$

	-2		-1		0		1		2		
$-$		$-$	o	$-$		$-$	o	$-$		$-$	$f'(x)$
$\searrow$				$\searrow$				$\searrow$			$f(x)$

$\square$

6. dom f'' = dom f e si ha

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2-1)^{\cancel{2}} + (x^2+1)\,2\cancel{(x^2-1)}\,2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}3}} =$$

$$= \frac{-2x^3 + 2x + 4x^3 + 4x}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

	-2		-1		0		1		2		
$-$		$-$		$-$	•	$+$		$+$		$+$	$2x$
$+$		$+$	o	$-$		$-$	o	$+$		$+$	$(x^2-1)^3$
$-$		$-$	o	$+$	•	$-$	o	$+$		$+$	$f''(x)$
$\cap$				$\cup$		$\cap$		$\cup$			$f(x)$

$\square$

7.

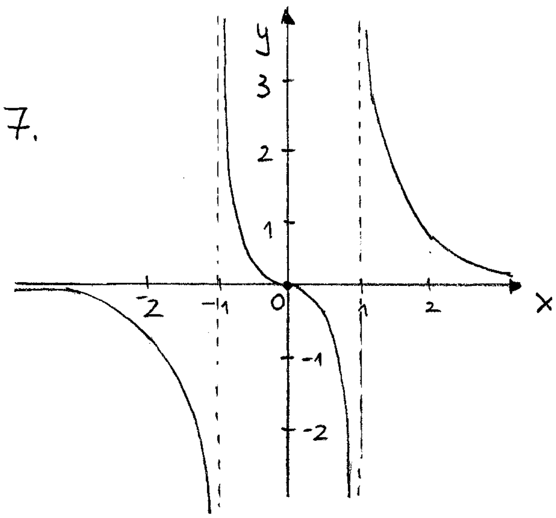


grafico approssimativo di f.

$\blacksquare$