## Commenti alla lezione del 10/10/05 (1ª lezione Corso)

Riferimento bibliografico: [1] Cap. 2 Sez. 2.2, Sez. 2.3 (eq. e disequazioni)
Sez. 2.10 pag. 60

**OSS.** Attenzione con la notazione: dati $a, b \in \mathbb{R}$

$\{a,b\}$ = insieme costituito dall'elemento a e dall'elemento b.

$(a,b)$ = coppia ordinata; elemento di $A \times B$.

$[a,b]$ = se $a \leq b$, allora $[a,b]$ denota l'intervallo limitato $= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

## Sistemi di equazioni e/o disequazioni (in una incognita)

**Esercizio 1.** Risolvete in $\mathbb{R}$ i seguenti sistemi di equazioni:

i) $\begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2-2x+1=0; \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x^2-5x+6=0. \end{cases}$

Svolgimento:

i) Dobbiamo trovare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ t.c.
$(2x+1=0)$ e $(x^2-2x+1=0)$.
La 1ª eq. è soddisfatta per $x = -\frac{1}{2}$; mentre la 2ª eq. è equivalente a $(x-1)^2=0$ e quindi ha soluzione $x=1$. Quindi l'insieme delle soluzioni del sistema i) è vuoto. $\square$

ii) Abbiamo $x^2-3x+2=0 \iff x=2$ o $x=1$, mentre
$x^2-5x+6=0 \iff x=2$ o $x=3$.
Dunque l'insieme delle soluzioni del sistema ii) è $S=\{2\}$. $\blacksquare$

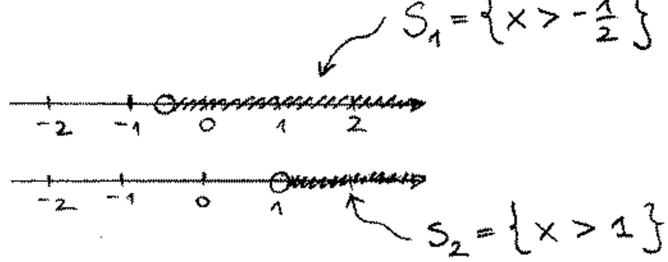
**Esercizio 2.** Risolvete in $\mathbb{R}$ i seguenti sistemi di disequazioni:

i) $\begin{cases} 2x+1>0 \\ x-1>0 \end{cases}$; ii) $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$; iii) $\begin{cases} x^2 \geq x \\ x+3<9-x \end{cases}$.

Svolgimento:

i) Abbiamo $2x+1>0 \iff x>-\frac{1}{2}$, mentre

$x-1>0 \iff x>1$.

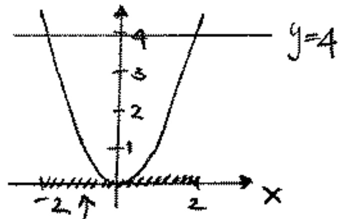



L'insieme delle soluzioni di i) è $\underline{\underline{S}} = S_1 \cap S_2 = \{x\in\mathbb{R} : x>1\} =$

$= \underline{\underline{]1, +\infty[}}$. □

ii) Abbiamo $4-x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 4$

$\iff -2 \leq x \leq 2$




Inoltre $x-1 \neq 0 \iff x \neq 1$

per tutti questi x si ha $x^2 \leq 4$

Allora, l'insieme delle soluzioni di ii) è

$\underline{\underline{S}} = [-2,2] \cap \{x\in\mathbb{R} : x \neq 1\} = \underline{\underline{[-2,2]\setminus\{1\}}}$.

□

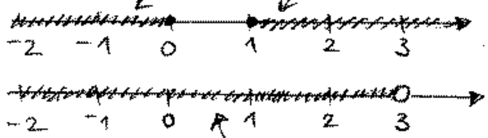
iii) Si ha $x^2 \geq x \iff x^2 - x \geq 0$

$\iff x(x-1) \geq 0 \iff \{x \leq 0 \text{ o } x \geq 1\}$

$= ]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

Inoltre $x+3<9-x \iff 2x<6 \iff x<3$

$S_1 = ]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$




$S_2 = ]-\infty, 3[$.

L'insieme delle soluzioni di iii) è $\underline{S} = S_1 \cap S_2 = \underline{]-\infty, 0] \cup [1, 3[}$.

---

**Esercizio 3.** Risolvete in $\mathbb{R}$ i seguenti sistemi di disequazioni:

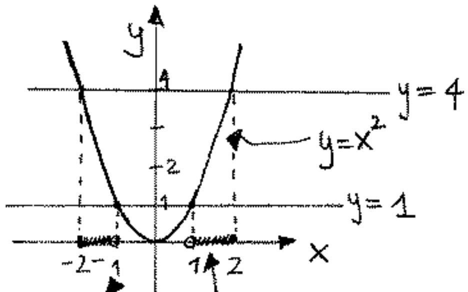
i) $\begin{cases} 1 < x^2 \leq 4 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+5} > 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$

---

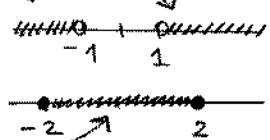
Svolgimento:

i) Possiamo risolvere la $1^a$ disequazione considerando

$$1 < x^2 \leq 4 \iff \begin{cases} x^2 > 1 \\ x^2 \leq 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$




$$\iff \begin{cases} x < -1 \quad \text{o} \quad x > 1 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$




$$\iff \underline{x \in [-2, -1[ \cup ]1, 2]} = S_1$$

La $2^a$ disequazione $x^2 - 5x + 6 \geq 0 \iff (x-2)(x-3) \geq 0$

$$\iff \underline{x \in ]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[ = S_2}$$

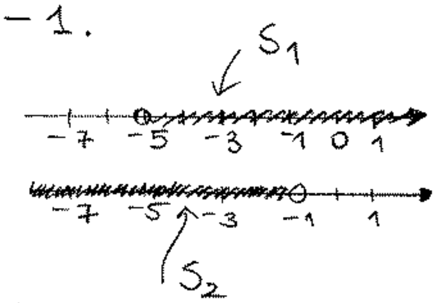
L'insieme delle soluzioni del sistema i) è dato da

$$\underline{S = S_1 \cap S_2 = [-2, -1[ \cup ]1, 2] = S_1}$$

□

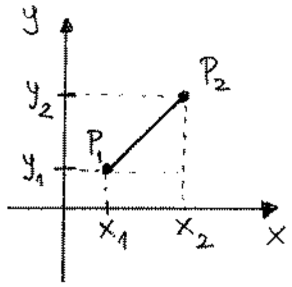
ii) La $1^a$ diseq. $\frac{1}{x+5} > 0 \iff x+5>0$
$\iff x > -5$.

La $2^a$ diseq. $x+1<0 \iff x<-1$.




L'insieme delle soluzioni di ii) è $\underline{\underline{S}} = S_1 \cap S_2 =$
$= \underline{\underline{]-5, -1[}}$. ■

**Ricordo:** Distanza tra i punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ nel piano Cartesiano $xy$:



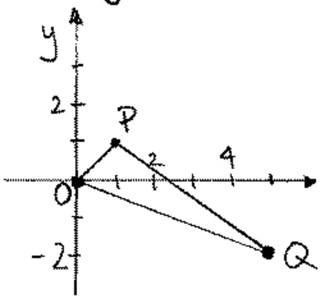

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**Esercizio 4.** i) Calcolate la distanza fra $P_1 = (1,1)$ e $P_2 = (5,-2)$;
ii) Calcolate la distanza fra $P_1 = (-1,2)$ e $P_2 = (3,-2)$.

**Svolgimento:** i) $d(P_1, P_2) = \sqrt{(5-1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = \underline{\underline{5}}$. □
ii) $d(P_1, P_2) = \sqrt{(3+1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{16+16} =$
$= \underline{\underline{4\sqrt{2}}}$. ■

**Esercizio 5.** Calcolate il perimetro del triangolo di vertici $O=(0,0)$, $P=(1,1)$ e $Q=(5,-2)$.

Svolgimento:




$$\text{perimetro} = d(O,P) + d(P,Q) + d(Q,O)$$
$$= \sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2} + 5 + \sqrt{(5-0)^2+(-2-0)^2}$$

↑ vedi Es. 4 i)

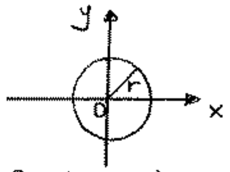
$$= \sqrt{2} + 5 + \sqrt{25+4}$$
$$= \sqrt{2} + 5 + \sqrt{29}. \qquad \blacksquare$$

## Equazione della circonferenza:

**Forma generale:** $x^2+y^2+ax+by+c=0$ con $a,b,c \in \mathbb{R}$ opportuni; vedi NOTA pag. 45

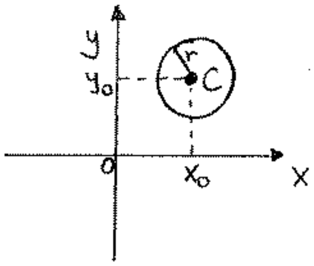
**Equazione canonica della circonferenza di centro $O=(0,0)$ e raggio $r>0$:**

$$x^2+y^2=r^2$$




**Equazione canonica della circonferenza di centro $C=(x_0,y_0)$ e raggio $r>0$:**

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$



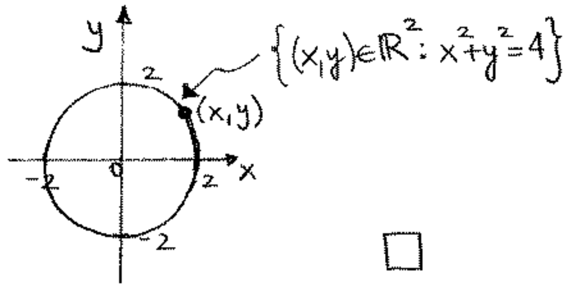
**Esercizio 6.**

i) Scrivete l'eq. della circonferenza centrata nell'origine e raggio 2.

ii) Scrivete l'eq. della circonferenza centrata nel pt. $(-1,2)$ e raggio 1.

Svolgimento:

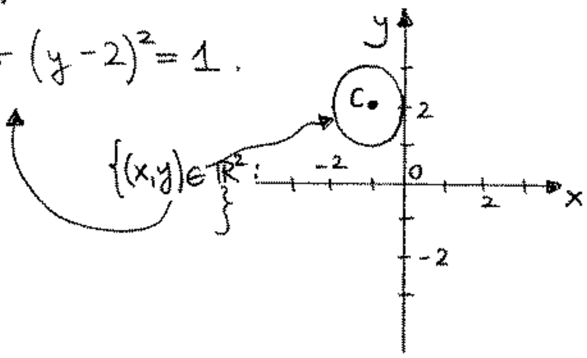
i) $x^2+y^2=4$.




$\square$

ii) $(x-(-1))^2+(y-2)^2=1$

$\iff \quad (x+1)^2+(y-2)^2=1$.




$\blacksquare$

**NOTA:** $x^2+y^2+ax+by+c=0 \iff$

$$\underbrace{x^2+ax}_{} + \underbrace{y^2+by}_{} + c = 0 \iff$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c=0 \iff$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

Quindi $x^2+y^2+ax+by+c=0$ è l'eq. della circonferenza di centro $C=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ e raggio $r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ se $\underline{a^2+b^2-4c>0}$.

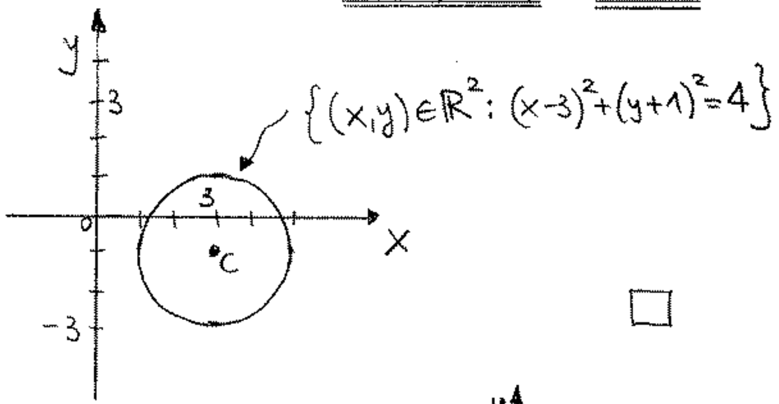
**Esercizio 7.** Trovate il centro C e raggio r delle circonferenze di equazione

i) $x^2+y^2-6x+2y+6=0$;

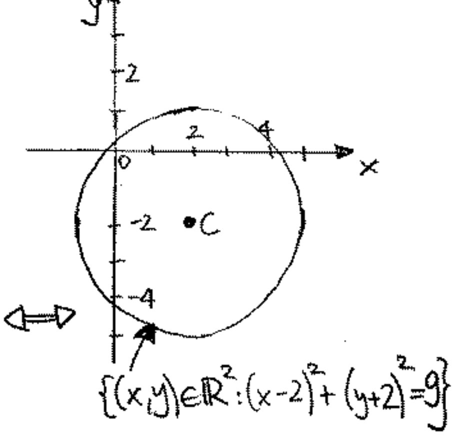
ii) $x^2+y^2-4x+4y-1=0$, e disegnatele!

Svolgimento:

i)
$$x^2+y^2-6x+2y+6=0 \iff$$
$$\underbrace{x^2-6x}_{(x-3)^2-9}+\underbrace{y^2+2y}_{(y+1)^2-1}+6=0 \iff$$
$$(x-3)^2-9+(y+1)^2-1+6=0 \iff$$
$$(x-3)^2+(y+1)^2=9+1-6 \iff$$
$$(x-3)^2+(y+1)^2=4 \implies C=(3,-1) \quad r=2$$




□

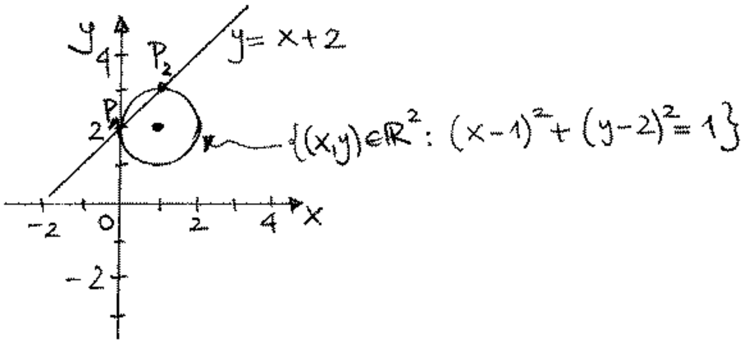



ii)
$$x^2+y^2-4x+4y-1=0 \iff$$
$$\underbrace{x^2-4x}_{(x-2)^2-4}+\underbrace{y^2+4y}_{(y+2)^2-4}-1=0 \iff$$
$$(x-2)^2-4+(y+2)^2-4-1=0 \iff$$
$$(x-2)^2+(y+2)^2=4+4+1$$
$$(x-2)^2+(y+2)^2=9 \implies C=(2,-2) \quad r=3$$

■

<u>Esercizio 8.</u> Trovate i punti di intersezione della retta di eq. $x-y+2=0$ con la circonferenza centrata in $(1,2)$ e raggio 1.

<u>Svolgimento:</u>




Dobbiamo risolvere il sistema di eq. $\begin{cases} y = x+2 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=1. \end{cases}$

Sostituendo la $1^a$ eq. nella $2^a$ eq. abbiamo il sist. equivalente

$$\begin{cases} y = x+2 \\ (x-1)^2+(x+2-2)^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x+2 \\ (x-1)^2+x^2=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x+2 \\ 2x^2-2x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x+2 \\ x(x-1)=0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $P_1=(0,2)$ $P_2=(1,3)$ sono i pt. di intersezione ricercati.

<u>Esercizio 9.</u> Determinate il centro C e il raggio r della circonferenza di eq.

$$9x^2+9y^2-12x+18y=5.$$

Svolgimento:

$$9x^2+9y^2-12x+18y=5 \iff x^2+y^2-\frac{4}{3}x+2y=\frac{5}{9}$$

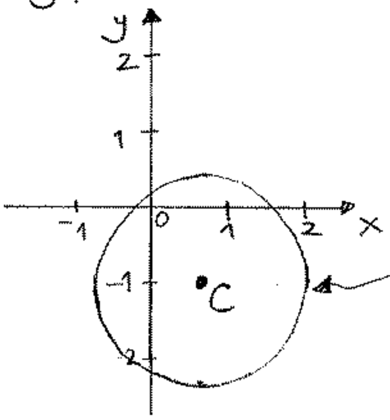
$$\iff \underbrace{x^2-\frac{4}{3}x}+\underbrace{y^2+2y}=\frac{5}{9}$$

$$\iff \left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+(y+1)^2-1=\frac{5}{9}$$

$$\iff \left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2=\frac{5}{9}+\frac{4}{9}+1$$

$$\iff \left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2=2 \implies \underline{\underline{C=\left(\frac{2}{3},-1\right)}}$$

$$\underline{\underline{r=\sqrt{2}}}$$




$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2=2\right\}$$

■

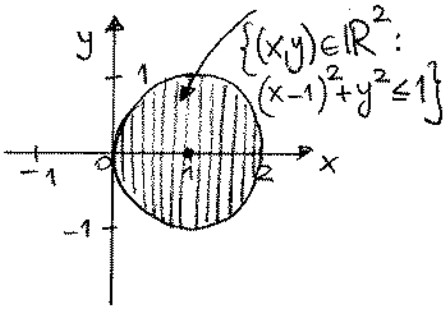
Esercizio 10. Rappresentare graficamente nel piano cartesiano $xy$ l'insieme dei punti del piano cartesiano soddisfacenti il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2\le 0 \\ x^2+y^2+2y\le 0 \\ y\ge -x\,. \end{cases}$$

Svolgimento:

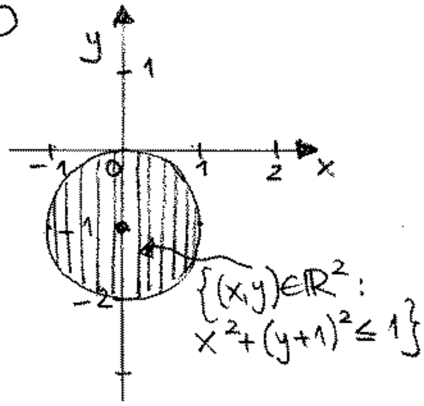
1ª diseq. $\iff (x-1)^2-1+y^2\le 0$

$\iff (x-1)^2+y^2\le 1$

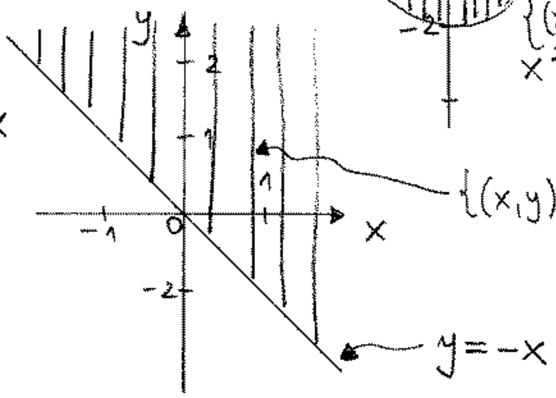


$2^a$ diseq. $\iff x^2+(y+1)^2-1 \leq 0$

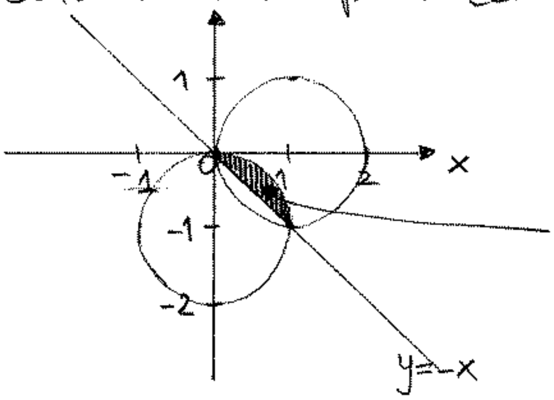
$\iff x^2+(y+1)^2 \leq 1$




$3^a$ diseq. $\iff y \geq -x$




Risolvere il sistema in questione significa intersecare questi tre sottoinsiemi del piano cartesiano $xy$; risulta




che questo rappresenta l'insieme dei pti $(x,y)$ del piano cartesiano ricercato!