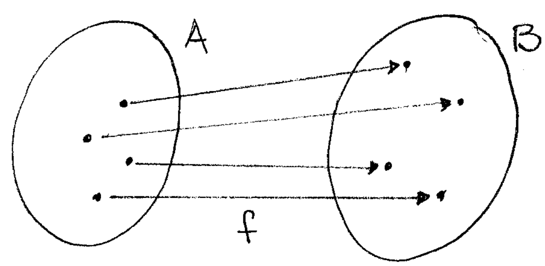
Commenti alla lezione del 24/10/05 (7^a lezione Corso)

Riferimento bibliografico : [1] Cap. 1 Sez. 1.3 (funzione inversa f^{-1} e $G_{f^{-1}}$; pag 20)
[2] Cap. 1 Sez. 1.5 (funz. elementari ; pag. 6 , Fig. 1.1 — Fig. 1.9 esclusa Fig. 1.7).

Ricordiamo che le due nozioni di iniettività e suriettività sono indipendenti : ci sono funzioni che sono iniettive ma non suriettive, così come ci sono funzioni che sono suriettive ma non iniettive.

Def. Una funzione $f : A \to B$ è biunivoca (biiettiva) se è iniettiva e suriettiva .



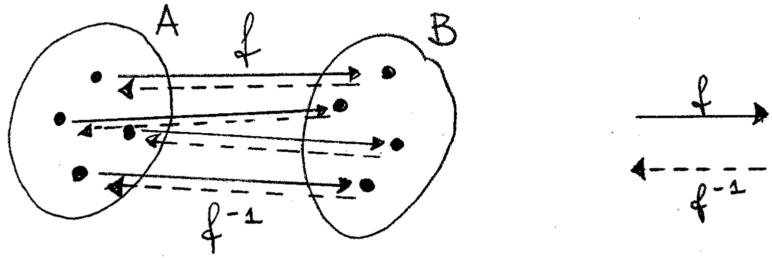
f è biiettiva !

Si ha che f è biiettiva $\Longleftrightarrow$ $\forall\, b \in B \ \exists !\ a \in A$ t.c. $f(a) = b$.

poiché f suriettiva — poiché f iniettiva

Questa legge definisce dunque una funzione da B in A .

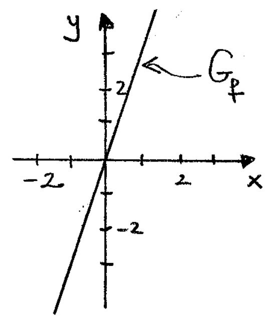
Def. Sia $f : A \to B$ una funzione biiettiva . Si dice funzione inversa di f la funzione $f^{-1} : B \to A$ che all'elemento $b \in B$ associa l'unico elemento $a \in A$ t.c. $f(a) = b$.



$\square$

Esempi: (i) $f: \overset{=A}{\mathbb{R}} \to \overset{=B}{\mathbb{R}}$

$x \longmapsto y = f(x) = 3x$



f è iniettiva e suriettiva!

Nota: $y = 3x \iff x = \frac{y}{3}$

quindi

$f^{-1}: \overset{=B}{\mathbb{R}} \to \overset{=A}{\mathbb{R}}$

$y \longmapsto x = f^{-1}(y) = \frac{y}{3}$

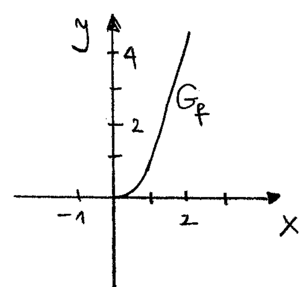
(ricordare la definizione di f^{-1}:

$\underset{\overset{\uparrow}{B}}{f^{-1}(y)} = x \in A \iff y = f(x)$)

$\blacksquare$

(ii) $f: \overset{=A}{[0,+\infty[} \longrightarrow \overset{=B}{[0,+\infty[}$

$x \longmapsto y = f(x) = x^2$



f è iniettiva e suriettiva!

Nota: $\begin{cases} y = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ y \geq 0 \end{cases}$

quindi

$f^{-1}: \overset{=B}{[0,+\infty[} \longrightarrow \overset{=A}{[0,+\infty[}$

$y \longmapsto x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

$\blacksquare$

Sia $f: A \to B$ una funzione biiettiva, $f^{-1}: B \to A$ l'inversa; allora

$$G_{f^{-1}} = \text{grafico di } f^{-1} = \{(b,a) \in B \times A : a = f^{-1}(b)\}$$
$$= \{(b,a) \in B \times A : (a,b) \in G_f\} ;$$

questo significa che il grafico di f^{-1} è il simmetrico del grafico di f, perchè si ottiene scambiando A con B.

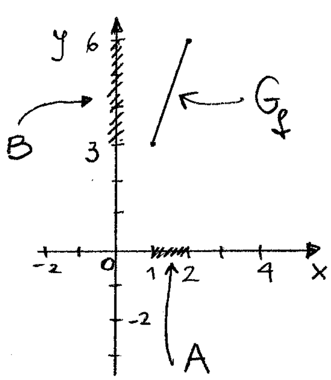
<u>NOTA</u> : Quando considereremo la funzione inversa f^{-1} come funzione di per sè useremo come al solito (per tradizione) la notazione

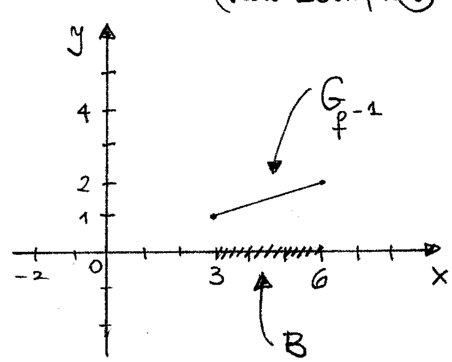
$$f^{-1} : \operatorname{dom}(f^{-1}) \longrightarrow \text{codominio}$$
$$\underset{\text{(variabile indipendente)}}{x} \longmapsto \underbrace{f^{-1}(x)}_{\text{(variabile dipendente)}} = y$$

<u>Esempio</u>: (i) $f : \overset{= A}{[1,2]} \longrightarrow \overset{= B}{[3,6]}$ $\qquad f^{-1} : \overset{= B}{[3,6]} \longrightarrow \overset{= A}{[1,2]}$

$x \longmapsto y = f(x) = 3x \qquad x \longmapsto y = f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$

(vedi Esempio (i) pag. 85)

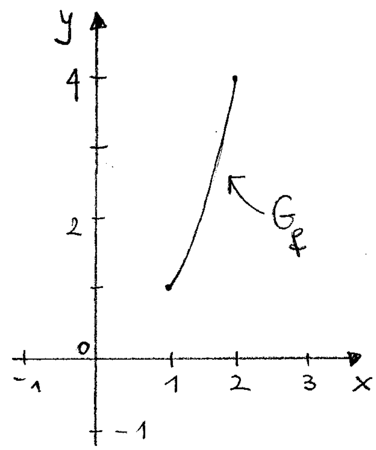


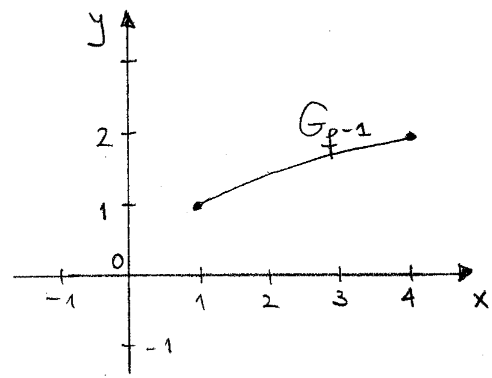


(ii) $f : \overset{=A}{[1,2]} \longrightarrow \overset{=B}{[1,4]}$ $\qquad$ $f^{-1} : \overset{=B}{[1,4]} \longrightarrow \overset{=A}{[1,2]}$

$x \longmapsto y = f(x) = x^2$ $\qquad$ $x \longmapsto y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

(vedi Esempio (ii) pag. 85)

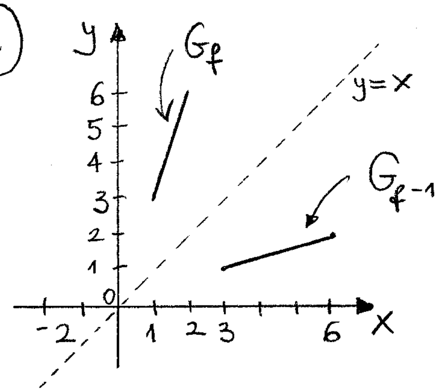




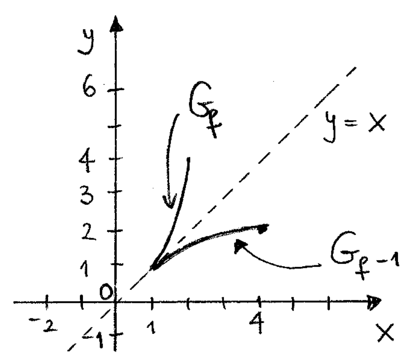
IMPORTANTE: nel caso di f funzione reale di variabile reale (ossia A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$), il grafico di f^{-1} è il simmetrico di quello di f rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante (vedi Esempio (i) pag. 86, Esempio (ii) pag. 87)

Esempi: Consideriamo di nuovo i due esempi sopra e disegniamo f e f^{-1} nella stessa figura:

(i)



(ii)



Esercizio 1.

(i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.
Rappresentate graficamente la funzione inversa f^{-1}.

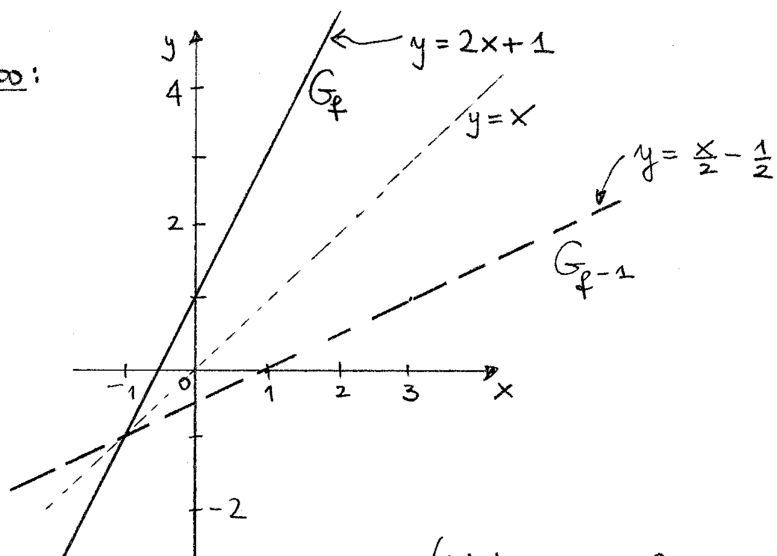
(ii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Rappresentate graficamente la funzione inversa f^{-1}.

Svolgimento:

(i)



(Nota: $y = 2x + 1 \iff y - 1 = 2x$

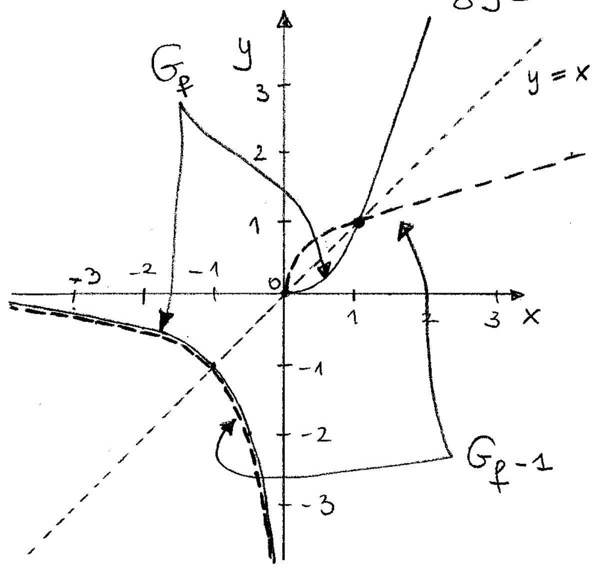
$\iff \frac{y}{2} - \frac{1}{2} = x$

quindi $f^{-1}(y) = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$)

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

$\square$

(ii)



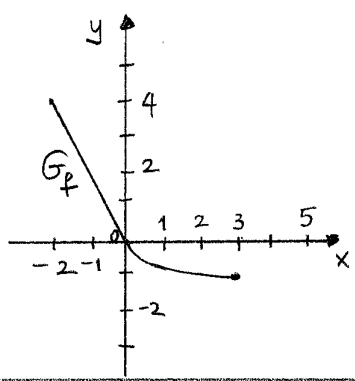
$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

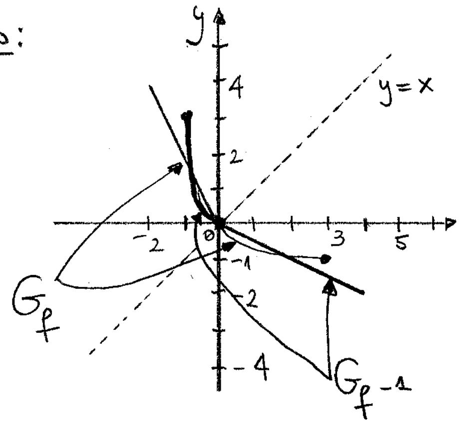
■

Esercizio 2.

Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy la funzione inversa f^{-1}, se $f : [-2, 3] \longrightarrow [-1, 4]$ è rappresentata in figura :



Svolgimento:



$f : [-2, 3] \to [-1, 4]$

$f^{-1} : [-1, 4] \to [-2, 3]$

■

FUNZIONI ELEMENTARI

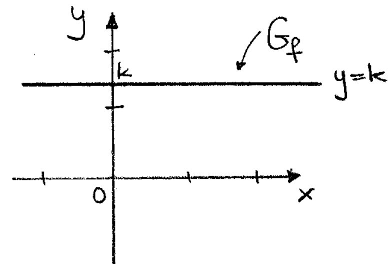
(inizio ... di queste funzioni si devono conoscere BENISSIMO i grafici !!)

[Le consideriamo sul sottoinsieme più grande di $\mathbb{R}$ su cui hanno senso !]

ⓐ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = k \quad (k \in \mathbb{R}$ assegnato$)$

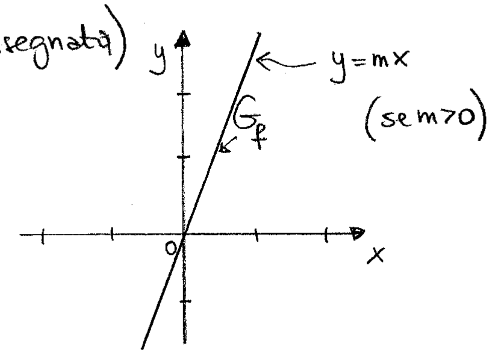
funzione costante



ⓑ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = mx \quad (m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ assegnato$)$

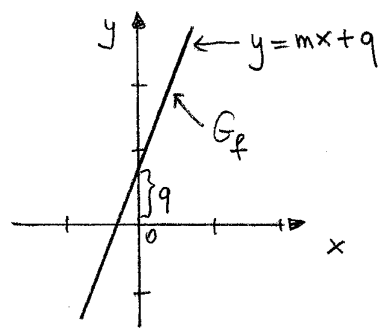
funzione lineare



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = mx + q \quad \left(\begin{matrix} m \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ q \end{matrix}\right.$ assegnati$\left.\right)$

funzione affine



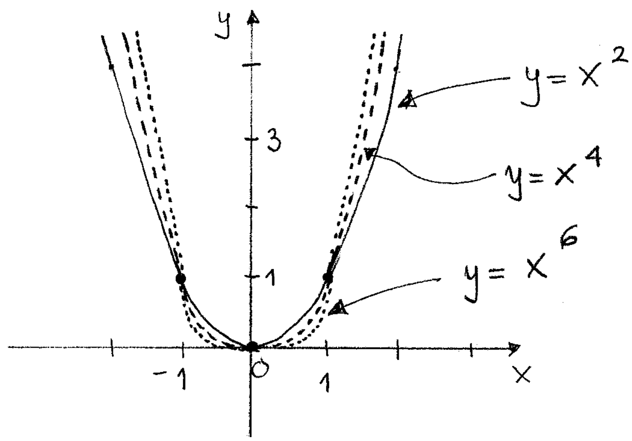
(c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x^2$

funzione quadratica

$f(x) = x^4$

$f(x) = x^6$ ... (potenze pari !!)

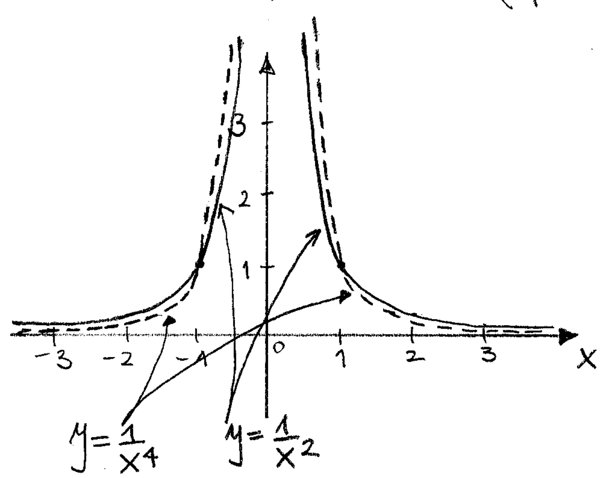


(d) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ — funzioni reciproche delle funzioni in (c)

$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x^2}$

$f(x) = \frac{1}{x^4}$

$f(x) = \frac{1}{x^6}$ ... $\left(\frac{1}{\text{potenze pari}} !\right)$



(e) $f: [0, +\infty[\ \longrightarrow [0, +\infty[$

$x \longmapsto f(x) = \sqrt{x} \qquad (= x^{\frac{1}{2}})$

$f(x) = \sqrt[4]{x} \qquad (= x^{\frac{1}{4}})$

$f(x) = \sqrt[6]{x} \qquad (= x^{\frac{1}{6}}) \ldots$

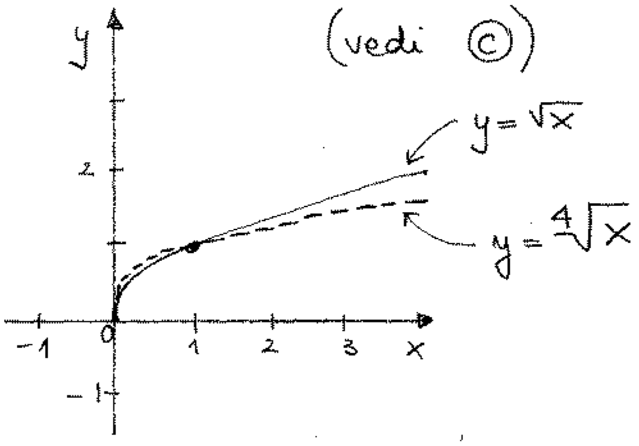
Sono le <u>funzioni inverse</u> delle funzioni $[0, +\infty[\ \longrightarrow [0, +\infty[$

$x \longmapsto x^2$

x^4

$x^6 \ldots$

(vedi (c))



(f) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x$ funzione identità

$f(x) = x^3$ funzione cubica

$f(x) = x^5 \ \ldots$ (potenze dispari !!)