Commenti alla lezione del 21/11/2005 (13ª lezione Corso)

Riferimento bibliografico: [2] Cap. 3 Sez. 3.1 (pag. 71 – 72 (fino a metà)

Sez. 3.2 (Teor. 3.2, Prop. 3.4, 3.5, 3.6 fino a metà pag. 78)

Esercizio 1 Risolvete, al variare di $a>0, a\neq 1$, la seguente disequazione

$$\log_a(4x^2+3x-1) - \log_a 3x \geq 0 .$$

Svolgimento:

$$\log_a(4x^2+3x-1) - \log_a 3x \geq 0 \iff \log_a(4x^2+3x-1) \geq \log_a 3x \geq 0$$

Allora dobbiamo porre

$$\text{I} \quad \begin{cases} 4x^2+3x-1>0 & \text{(altrimenti il } \log_a \text{ a sinistra della diseq. non è definito)} \\ 3x>0 & \text{(altrimenti il } \log_a \text{ a destra della diseq. non è definito)} \\ 4x^2+3x-1 \geq 3x ; \end{cases}$$

se $\boxed{a>1} \longrightarrow$ (terza disequazione del sistema I)

$\log_a x \nearrow$

invece abbiamo

$$\text{II} \quad \begin{cases} 4x^2+3x-1>0 \\ 3x>0 \\ 4x^2+3x-1 \leq 3x . \end{cases}$$

se $\boxed{0<a<1} \longrightarrow$ (terza disequazione del sistema II)

$\log_a x \searrow$

Abbiamo allora

per $\boxed{a>1}$

$$\text{I} \iff \begin{cases} x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[& \leftarrow 4x^2+3x-1>0 \\ x>0 \\ x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[& \leftarrow 4x^2+\cancel{3x}-1 \geq \cancel{3x} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$4x^2 \geq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 \geq \frac{1}{4}$$

da cui

$$\text{I} \iff x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$

Per $\boxed{0<a<1}$

$$\text{II} \iff \begin{cases} x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[& \leftarrow 4x^2+3x-1>0 \\ x>0 \\ x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] & \leftarrow 4x^2+\cancel{3x}-1 \leq \cancel{3x} \end{cases}$$

$$\Updownarrow \quad x^2 \leq \frac{1}{4}$$

da cui

$$\text{I} \iff x \in \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] .$$

<u>Esercizio 2.</u> Determinate gli insiemi di definizione delle funzioni

(i) $f(x) = \dfrac{1}{\log(2x-x^2)}$; (ii) $g(x) = \log \dfrac{x^2-5x}{4-x}$.

<u>Svolgimento:</u>

(i) Deve essere

$$\begin{cases} 2x-x^2>0 & \text{(affinché log è definito} \\ \log(2x-x^2) \neq 0 & \text{(altrimenti non è definito } \frac{1}{\log(2x-x^2)}) \end{cases}$$

Si ha allora

$$\begin{cases} 2x-x^2>0 \\ 2x-x^2 \neq 1 \end{cases}$$

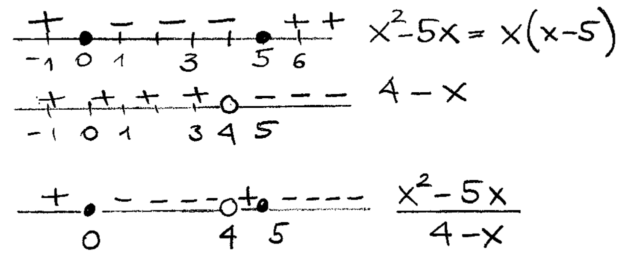
(ricordare che $\log z = 0 \iff z = 1$)

Quindi $\begin{cases} x(x-2) < 0 \\ x^2-2x+1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Quindi l'insieme di definizione della funzione f è $\underline{\underline{]0,2[\setminus\{1\}}}$.

□

(ii) Deve essere $\dfrac{x^2-5x}{4-x} > 0$. Abbiamo



Quindi $\dfrac{x^2-5x}{4-x} > 0 \iff \underline{\underline{x \in]-\infty,0[\cup]4,5[}}$.

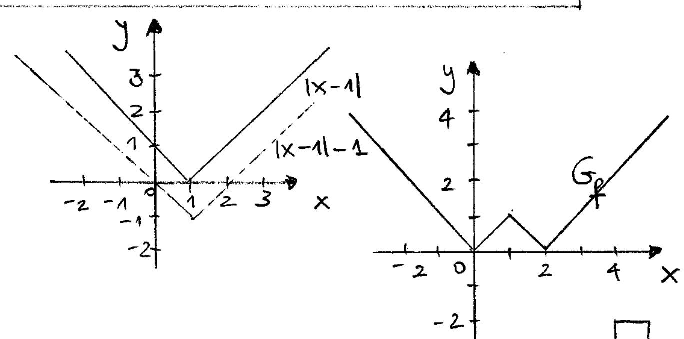
■

Esercizio 3. Tracciate, nel piano cartesiano xy, il grafico delle seguenti funzioni:

(i) $f(x) = ||x-1|-1|$; (ii) $g(x) = |\log(1-x)|$.

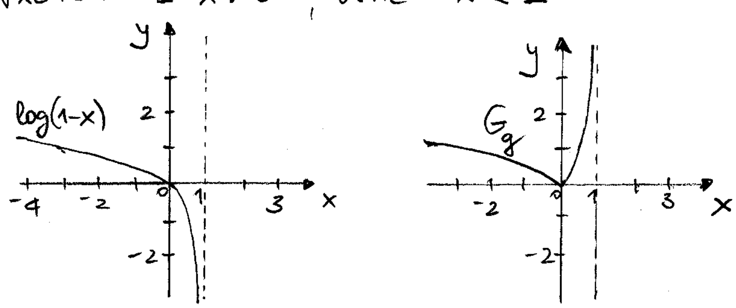
Svolgimento:

(i) $f(x)$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$;



□

(ii) $g(x)$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$: $1-x > 0$, ossia $x < 1$



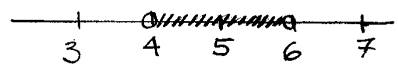
■

<u>Esercizio 4.</u> Rappresentate graficamente sulla retta reale le soluzioni delle disequazioni

$|x-5| < 1$; $|x-5| \le \frac{1}{2}$; $|x-5|<\delta$ se $\delta>0$ fissato.

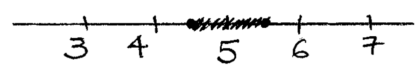
<u>Svolgimento:</u> Abbiamo

$$|x-5| < 1 \iff -1 < x-5 < 1$$
$$\iff -1+5 < x < 1+5$$
$$\iff 4 < x < 6$$



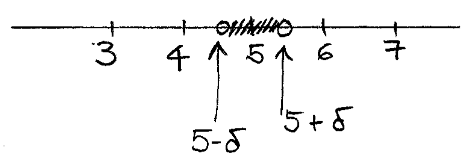
$\square$

$$|x-5| \le \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} \le x-5 \le \frac{1}{2}$$
$$\iff 5-\frac{1}{2} \le x \le 5+\frac{1}{2}$$



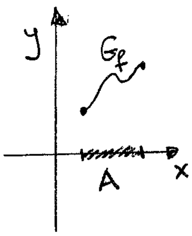
$\square$

$$|x-5| < \delta \iff -\delta < x-5 < \delta$$
$$\iff 5-\delta < x < 5+\delta$$



$\blacksquare$

Funzioni continue



Le funzioni continue a valori in $\mathbb{R}$ e definite su un intervallo sono in parole povere quelle il cui grafico può essere disegnato su un foglio di carta senza mai staccare la penna dal foglio! Esse non presentano "salti".

> **Def.** Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$. Si dice che <u>f è continua in x_0</u> se
> $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad (x \in A, \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Si dice poi che <u>f è continua in A</u> se è continua in ogni punto di A.

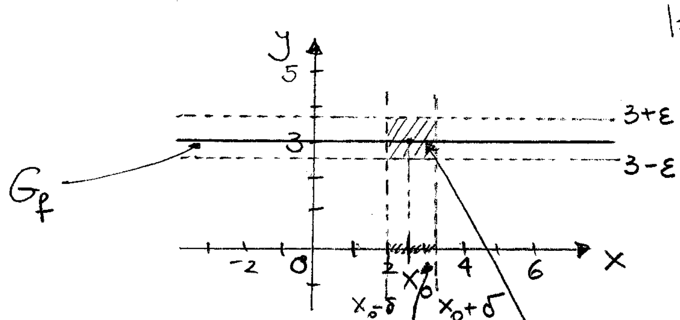
<u>Esempio:</u>

(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 3$ (o qualsiasi costante) è continua in $\mathbb{R}$.

: Infatti, prendiamo un qualunque $x_0 \in \mathbb{R}$.

Fissato $\varepsilon > 0$ qualsiasi, basta prendere $\delta = \varepsilon$ e si ha

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - 3| = 0 < \varepsilon.$$

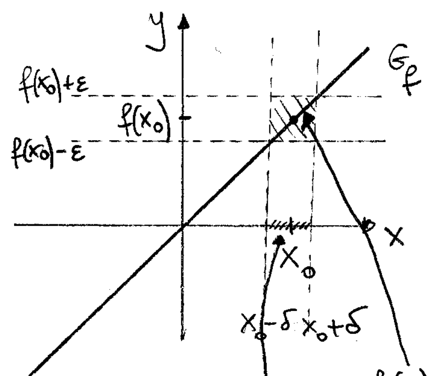


$f(x) \in \left]3-\varepsilon, 3+\varepsilon\right[$
$\forall x \in \left]x_0-\delta, x_0+\delta\right[$! $\square$

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ è continua in $\mathbb{R}$.

: Infatti, prendiamo un qualunque $x_0 \in \mathbb{R}$.
Fissato $\varepsilon > 0$ qualsiasi, basta prendere $\delta = \varepsilon$ e si ha

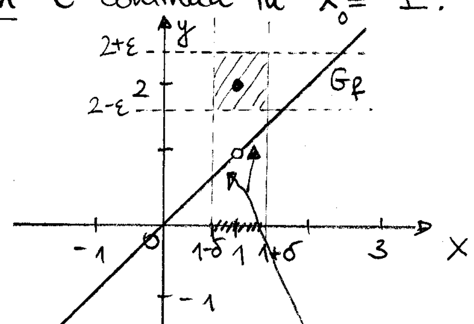
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\underset{x}{\underbrace{f(x)}} - \underset{x_0}{\underbrace{f(x_0)}}| < \varepsilon \quad !$$



$f(x) \in \left]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\right[$
$\forall x \in \left]x_0-\delta, x_0+\delta\right[$! $\square$

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1. \end{cases}$

Allora f <u>non</u> è continua in $x_0 = 1$.

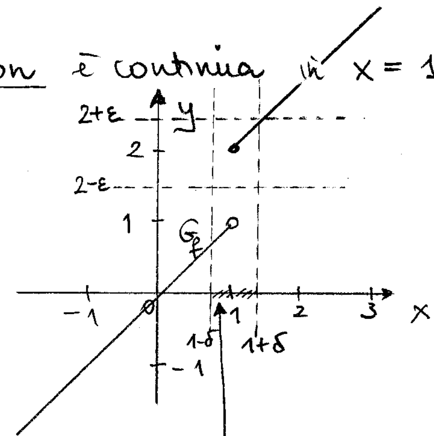


Infatti, abbiamo $f(1) = 2$; se prendiamo $\varepsilon < 1$
$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in A$ con $|x - 1| < \delta$ e $|f(x) - f(1)| > \varepsilon$.
Vedete nel disegno che $f(x)$, per $x \in \left]1-\delta, 1+\delta\right[$,
cade al di fuori dell'intervallo $\left]2-\varepsilon, 2+\varepsilon\right[$, quindi lontano da $f(1) = 2$!! $\blacksquare$

(iv) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ x+1 & \text{se } x \geq 1 . \end{cases}$$

Allora f <u>non</u> è continua in $x = 1$.



Infatti, abbiamo $f(1) = 2$; se prendiamo $\varepsilon < 1$

$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in A$ con $|x - 1| < \delta$ e $|f(x) - f(1)| > \varepsilon$!

per questi x si ha $|f(x) - f(1)| > \varepsilon$!!

■

Gli eventuali punti nei quali una funzione presenta dei "salti" si chiamano <u>punti di discontinuità</u>.

<u>Teorema:</u> Se f e g sono due funzioni continue in $x_0 \in A$, allora

$f + g$ è continua in x_0;

$f - g$ "

fg "

f/g è continua in x_0 se $g(x_0) \neq 0$;

$|f|$ è continua in x_0.

In particolare, se f e g sono continue in A, allora lo sono le funzioni $f+g$, $f-g$, fg, $|f|$ su A e $\frac{f}{g}$ su $A \cap \{x : g(x) \neq 0\}$.

<u>Esempi :</u> Dalla continuità della funzione $f(x) = x$ su $\mathbb{R}$ (vedi Esempio ⓘⓘ pag. 149) e dal teorema precedente si ottiene subito che le funzioni

→ $x^2, \ x^3, \ x^4, \dots$ sono continue su $\mathbb{R}$ (prodotto di funzioni continue !!)

→ $cx^2, \ c + x^4, \dots$ sono continue in $\mathbb{R}$ (prodotto, somma di funzioni continue !!)

→ $\frac{1}{x}, \ \frac{1}{x^2}, \ \frac{1}{x^3}, \dots$ sono continue su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

→ $|x^3|, \ \frac{1}{|x|}, \ \frac{1}{|x|^5}, \ \dots$ sono continue su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
↳ su $\mathbb{R}$

→ $\dfrac{x^2+1}{|x|+1}$ è continua in $\mathbb{R}$ (prodotto somma, rapporto di funzioni continue e $|x|+1 \neq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$). ■

$x_0 \xrightarrow{f} f(x_0) \xrightarrow{g}$

<u>Teorema</u> (<u>Continuità della composizione e dell'inversa</u>)

ⓘ Se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è continua in x_0. In particolare, se f è continua in A e g è continua in $f(A)$, allora $g \circ f$ è continua in A.

ⓘⓘ Se f è una funzione continua e biiettiva <u>definita nell'intervallo I</u>, allora la sua inversa f^{-1} è continua (in $f(I)$).

Usando allora questi due teoremi otteniamo una <u>vasta classe di funzioni continue</u> :

→ <u>funzioni polinomiali</u> : $f(x) = 3x^4 + 2x - 1$ su $\mathbb{R}$;
$f(x) = -10x^3 + 3x^7$ su $\mathbb{R}$.

→ funzioni razionali fratte (rapporto di polinomi) : $f(x) = \dfrac{3x^2-10}{x^4+1}$ su $\mathbb{R}$;

$f(x) = \dfrac{10x^8+3x^2}{x^3-1}$ su $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

→ funzioni radici (inverse delle funzioni potenze) : $f(x) = \sqrt[3]{x}$ su $\mathbb{R}$;

$f(x) = \sqrt[4]{x}$ su $[0,+\infty[$.

Infine si dimostra (non segue dai due teoremi precedenti) che le

→ funzioni esponenziali sono continue : $f(x) = 2^x$ su $\mathbb{R}$;

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ su $\mathbb{R}$.

Ne segue la continuità delle

→ funzioni logaritmiche : $f(x) = \log_2 x$ su $]0,+\infty[$;

$f(x) = \log_{1/3} x$ su $]0,+\infty[$.

■

Esempi : $f(x) = e^{-x+1} + \frac{x}{2}$ continua su $\mathbb{R}$

(composizione, prodotto, somma di funzioni continue).

$f(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$ continua su $]-1,+\infty[\setminus\{1\}$.

$f(x) = \sqrt{x^2-1}$ continua su $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

$f(x) = 2^{x^2} + \dfrac{x^2+1}{x}$ continua su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

■