Commenti alla lezione del 23/11/2005 (15ª lezione Corso)

Riferimento bibliografico : [2] Cap. 3 Sez. 3.5 (pag. 86; Formula 3.10
pag. 89; seconda metà di pag. 91;
Teorema 3.16)

Limiti di funzioni

Vista la generalità con la quale viene trattato questo argomento nel Cap. 3 di [2], raccolgo nel seguito le definizioni introdotte a lezione e le proprietà enunciate a lezione.

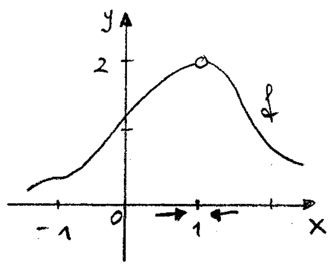
La continuità, come abbiamo visto, permette di dare una informazione condensata che in certi casi è sufficiente:

Se f è continua, e sappiamo che ad esempio $f(2) = 5$, sappiamo pure che per x sufficientemente vicino a 2, il valore di $f(x)$ sarà vicino a 5.

Ci sono però dei casi in cui questa possibilità viene meno: se una funzione non è definita in un punto a, o è definita ma non è continua, come possiamo dire "come essa si comporta vicino ad a"?

Talvolta la risposta non è semplice, o non è possibile darla, ma ci sono dei casi in cui ci riusciremo.

Esempio 1 : Comportamento di f "vicino ad un punto $\notin$ dom f" (interno) [f non è definita in $a = 1$] :



Osserviamo che per x che si "avvicina" a 1, (sia da destra che da sinistra), il valore assunto da f si "avvicina" a 2.

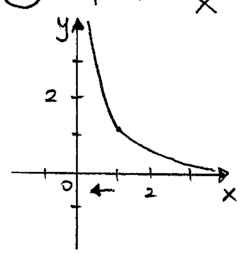
Per descrivere questo comportamento scriveremo

$$\boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = 2.}$$

(= limite di f in 1 è 2).

Esempio 2 : Comportamento di f "vicino ad un estremo del suo dominio"

ⓐ $f(x) = \frac{1}{x}$ su $]0, +\infty[$



Stando nell'insieme $]0, +\infty[$, possiamo avvicinarsi a 0 (da destra; cioè con $x > 0$ che tendono però a 0); come si comporta la funzione $\frac{1}{x}$ quando il suo argomento si avvicina a 0?

Possiamo dire che assumerà numeri positivi sempre più grandi, tanto più grandi quanto più gli x saranno vicino a 0.

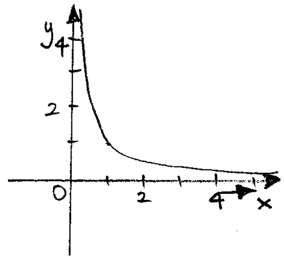
Per descrivere questo comportamento scriveremo

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.}$$

(= limite destro di f in 0 è $+\infty$).

NOTA: 0^+ non è un numero! vogliamo solo indicare che ci avviciniamo a 0 con $x > 0$ che tendono a 0. □

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$ su $]0, +\infty[$



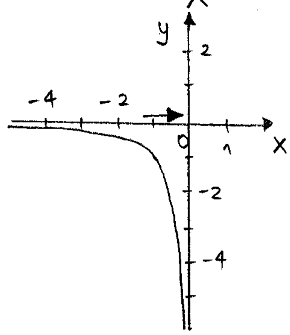
In questo caso possiamo anche chiederci come si comporta f quando x diventa arbitrariamente grande. Possiamo dire che assumerà valore positivo sempre più piccolo, tanto più piccolo quanto più x è "dalle parti di $+\infty$".
Per descrivere questo comportamento scriveremo

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 .}$$

(Il limite di f a $+\infty$ è 0).

□

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$ su $]-\infty, 0[$



Stando nell'insieme $]-\infty, 0[$ possiamo avvicinarsi a 0 (da sinistra; cioè con $x < 0$ che tendono però a 0); come si comporta la funzione $\frac{1}{x}$ quando il suo argomento si avvicina a 0?
Possiamo dire che assumerà numeri negativi molto grandi, tanto più grandi quanto più gli x saranno vicino a 0.
Per descrivere questo comportamento useremo la notazione

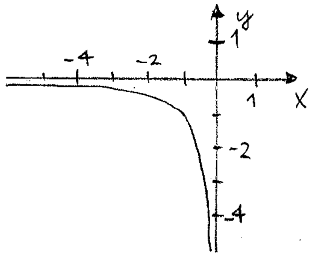
$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty .}$$

(= limite sinistro di f in 0 è $-\infty$).

<u>Ricordate!</u> 0^- non è un numero! vogliamo solo indicare che ci avviciniamo a 0 con $x < 0$ che tendono a 0.

□

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$ su $]-\infty, 0[$



In questo caso possiamo anche chiederci come si comporta f quando x assume valori negativi sempre più grandi in valore assoluto. Possiamo dire che $\frac{1}{x}$ assumerà valori negativi sempre più piccoli, tanto più piccoli quanto più x è "dalle parti di $-\infty$". Scriveremo

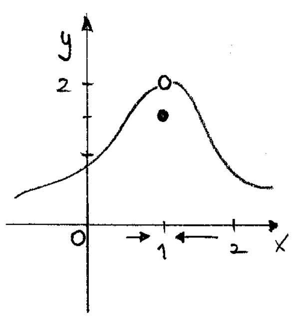
$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \ .}$$

(= limite di f a $-\infty$ è 0).

□

<u>Esempio 3</u> : <u>Comportamento di f "vicino ad un punto $\in$ dom f, in cui non è continua".</u>

(a)



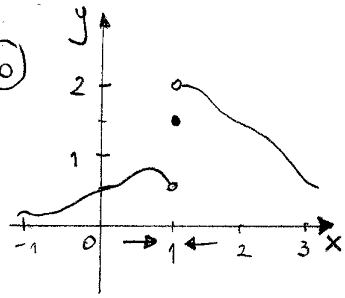
f non è continua in $x = 1$; osserviamo che per x che si "avvicina ad 1", il valore assunto da f si "avvicina" a 2 che è diverso dal valore di f assunto in $x = 1$. Questo comportamento descriveremo con la notazione

$$\boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = 2} \neq f(1) \ .$$

(= limite di f in 1 è 2).

□

(b)



f non è continua in $x=1$; osserviamo che per x che si "avvicina ad 1 da destra" (cioè con $x>1$ che tendono a 1) il valore di f si "avvicina" a 2, mentre per x che si "avvicina ad 1 da sinistra" (cioè con $x<1$ che tendono ad 1) il valore di f si "avvicina" ad $\frac{1}{2}$.
Questo comportamento descriveremo con la notazione

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{2} \quad , \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2} \neq f(1).$$

(= limite sinistro di f in 1 è $\frac{1}{2}$;
limite destro di f in 1 è 2) ■

Introduciamo la <u>retta reale estesa</u> : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; si ha

$$-\infty < x < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$x \pm \infty = \pm\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \quad \text{se } x>0$$
$$x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \quad \text{se } x<0$$

<u>Non è definito</u> $+\infty - \infty$!
$0 \cdot (\pm\infty)$ (e quindi nemmeno $\pm\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$)

□

Vediamo ora il concetto di limite destro, di limite sinistro, di limite (definizioni e proprietà) in modo più preciso.

Limite destro - limite sinistro

Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} a \text{ possibilmente anche } -\infty \\ b \text{ possibilmente anche } +\infty \end{pmatrix}$$

Vogliamo definire

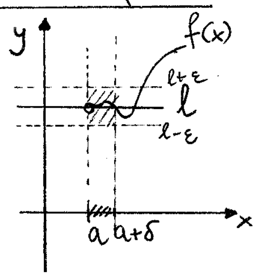
$\lim_{x \to a^+} f(x)$	: limite destro di f in a
	(se $a = -\infty$ si scrive $\lim_{x \to -\infty} f(x)$)
$\lim_{x \to b^-} f(x)$	: limite sinistro di f in b
	(se $b = +\infty$ si scrive $\lim_{x \to +\infty} f(x)$)

Per ciascuno di questi limiti possono verificarsi 3 casi:

1) il limite esiste finito;
2) il limite esiste ed è $+\infty$ oppure $-\infty$
3) il limite non esiste.

Caso 1: limite finito

$a \in \mathbb{R}$



Scriveremo: (*)

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}}$$

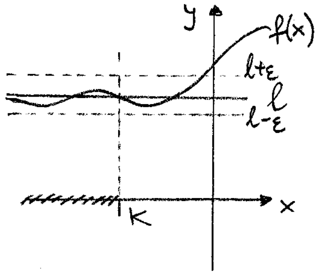
se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \quad \forall x \in]a, a+\delta[\cap \operatorname{dom} f$$

[ossia, se f si avvicina arbitrariamente ad ℓ quando $x \in \operatorname{dom} f$ decresce verso a].

(*) scriviamo anche $f(x) \longrightarrow \ell$ (e si legge "$f(x)$ tende ad ℓ") se $x \longrightarrow a^+$ (e si legge "se x tende ad a da destra").

$\underline{a=-\infty}$



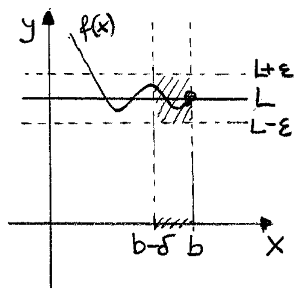
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}}$$ (*)

se $\forall \varepsilon>0 \ \exists K<0$ t.c.

$\ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon \quad \forall x \in \left]-\infty, K\right[\cap \mathrm{dom} f$

[ossia, se f si avvicina arbitrariamente ad ℓ quando x diminuisce assumendo valori negativi, arbitrariamente grandi in valore assoluto].

$\underline{b\in\mathbb{R}}$



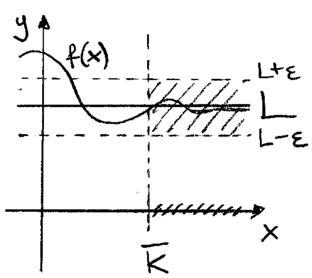
$$\boxed{\lim_{x\to b^-} f(x) = L \in \mathbb{R},}$$

se $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$ t.c.

$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon \quad \forall x \in \left]b-\delta, b\right[\cap \mathrm{dom} f$

[ossia, se f si avvicina arbitrariamente ad L quando $x \in \mathrm{dom} f$ cresce verso b].

$\underline{b=+\infty}$



$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}}$$

se $\forall \varepsilon>0 \ \exists \overline{K}>0$ t.c.

$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon \quad \forall x \in \left]\overline{K}, +\infty\right[\cap \mathrm{dom} f$

[ossia, se f si avvicina arbitrariamente ad L quando $x \in \mathrm{dom} f$ cresce assumendo valori positivi, arbitrariamente grandi].

(*) scriviamo anche "$f(x) \to \ell$, se $x \to -\infty$" e si legge "$f(x)$ tende ad ℓ se x tende a $-\infty$".
Analog. per gli altri limiti.

Esercizio 1. Calcolate i seguenti limiti:

i) $\lim_{x\to 2^+} (x+3)$ ii) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+3}{x-1}$

iii) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3}{x+2}$ iv) $\lim_{x\to -\infty} (e^x+3)$

v) $\lim_{x\to 3^-} (x+3)$ vi) $\lim_{x\to 3^-} (e^x+3)$

vii) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3}{x+2}$ viii) $\lim_{x\to +\infty} (e^{-x}+1)$

Svolgimento:

i) $\lim_{x\to 2^+} (x+3) = 5$ (infatti, $x+3 \longrightarrow 2+3$ se $x\to 2^+$).

ii) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+3}{x-1} = 7$ (infatti, $\left.\begin{array}{l} x^2+3 \to 2^2+3=7; \\ x-1 \to 2-1=1 \end{array}\right\}$ se $x\to 2^+$.).

iii) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3}{x+2} = 0$ (infatti, il denominatore diventa sempre più grande in valore assoluto, e quindi $\frac{3}{x+2}$ diventa sempre più piccolo; tende a 0).

iv) $\lim_{x\to -\infty} (e^x+3) = 3$ (infatti, $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$; allora, se $x\to -\infty$, $-x \to +\infty$; dunque $e^{-x} \longrightarrow +\infty$ e quindi $\frac{1}{e^{-x}} \longrightarrow 0$).

v) $\lim_{x\to 3^-} (x+3) = 6$ (infatti, $x+3 \to 3+3$ se $x\to 3^-$).

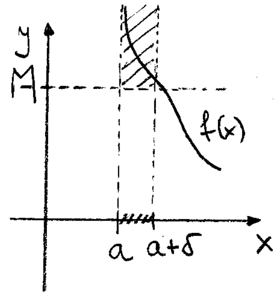
vi) $\lim_{x\to 3^-} (e^x+3) = e^3+3$ (infatti, $e^x+3 \to e^3+3$ se $x\to 3^-$).

vii) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3}{x+2} = 0$ (infatti, il denominatore diventa sempre più grande, e quindi $\frac{3}{x+2}$ diventa sempre più piccolo; tende a 0).

viii) $\lim_{x\to +\infty} (e^{-x}+1) = 1$ (infatti, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; allora, se $x\to +\infty$ $e^x \to +\infty$ e quindi $\frac{1}{e^x} \to 0$).

Caso 2: limite infinito $+\infty$ (analog. per $-\infty$). Scriveremo:

$a \in \mathbb{R}$



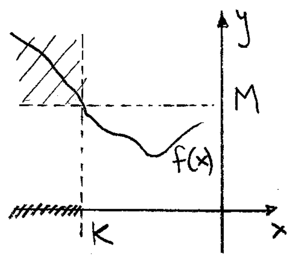
$$\boxed{\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty} \quad (*)$$

se $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.

$f(x) > M \quad \forall x \in]a, a+\delta[\cap \operatorname{dom} f$

[ossia, se f diventa arbitrariamente grande quando $x \in \operatorname{dom} f$ decresce verso a].

$a = -\infty$



$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$$

se $\forall M > 0 \ \exists K < 0$ t.c.

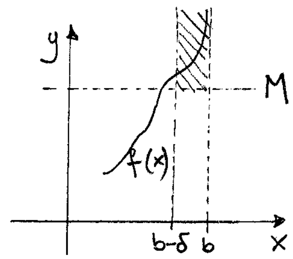
$f(x) > M \quad \forall \in]-\infty, K[\cap \operatorname{dom} f$

[ossia, se f diventa arbitrariamente grande quando x diminuisce assumendo valori negativi, arbitrariamente grandi in valore assoluto].

(*) scriviamo anche $f(x) \to +\infty$ se $x \to a^+$ (e si legge "$f(x)$ tende a $+\infty$ se x tende ad a da destra"),

e analogamente per gli altri limiti.

$b \in \mathbb{R}$

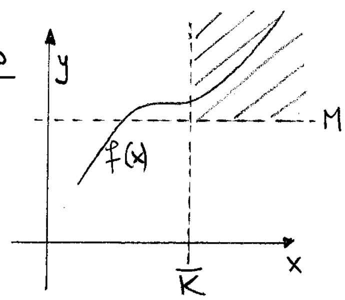


$$\boxed{\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty}$$

se $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.
$f(x) > M \quad \forall x \in \,]b-\delta, b[\, \cap \operatorname{dom} f$

[ossia, se f diventa arbitrariamente grande quando $x \in \operatorname{dom} f$ cresce verso b].

$b = +\infty$



$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

se $\forall M > 0 \ \exists \bar{K} > 0$ t.c.
$f(x) > M \quad \forall x \in \,]\bar{K}, +\infty[\, \cap \operatorname{dom} f$.

[ossia, se f diventa arbitrariamente grande quando $x \in \operatorname{dom} f$ cresce assumendo valori positivi, arbitrariamente grandi].

Esercizio 2. Calcolate i seguenti limiti:

i) $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2}$ ii) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \log x$

iii) $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2}$ iv) $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2}$

v) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (x^2 + 2)$ vi) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (x^2 + x)$

vii) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x^3 + x)$ viii) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3x^3)$

Svolgimento:

i) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ (infatti, se $x \to 2^+$, $x-2$ diventa sempre più piccolo, ma è sempre positivo e quindi $\frac{1}{x-2}$ diventa sempre più grande).

ii) $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$

iii) $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$ (infatti, se $x \to 2^-$, $x-2$ diventa sempre più piccolo, ma è sempre negativo e quindi $\frac{1}{x-2}$ diminuisce assumendo valori negativi arbitrariamente grandi in valore assoluto).

iv) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$ (se $x \to 0^-$, $x^2 > 0 \to 0$ e $\frac{1}{x^2}$ diventa arbitrariamente grande).

v) $\lim_{x\to -\infty} (x^2+2) = +\infty$

vi) $\lim_{x\to -\infty} (x^2+x) = +\infty$ (il termine dominante, per $x \to -\infty$, è x^2; infatti $x^2+x = x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Poichè $x^2 \to +\infty$ se $x \to -\infty$ e $\frac{1}{x} \to 0$ si ha quanto asserito).

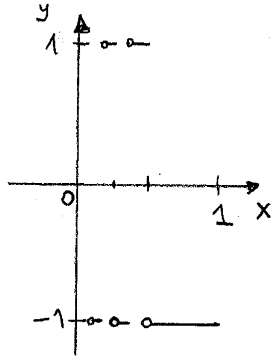
vii) $\lim_{x\to +\infty} (x^3+x) = +\infty$

viii) $\lim_{x\to -\infty} (-x^2-3x^3) = +\infty$ (abbiamo $x^3\left(-\frac{1}{x}-3\right)$; poichè $x^3 \to -\infty$, se $x \to -\infty$, e $-\frac{1}{x} \to 0$ si ha che $-x^2-3x^3 \to +\infty$, se $x \to -\infty$).

Caso 3. Il limite non esiste

Esempio: sia

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left]\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right], \left]\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right], \left]\frac{1}{7},\frac{1}{6}\right] \dots \\ -1 & \text{se } x \in \left]\frac{1}{2},1\right], \left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right], \left]\frac{1}{6},\frac{1}{5}\right] \dots \end{cases}$$



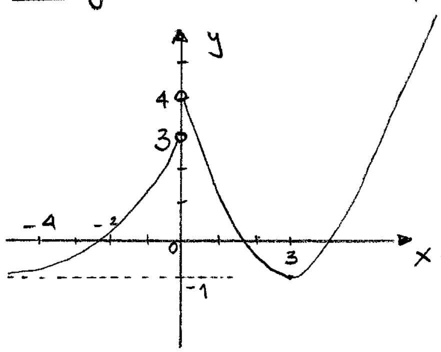
f è una funzione "oscillante": oscilla sempre più rapidamente tra 1 e −1 per $x \to 0^+$; quindi $\nexists \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

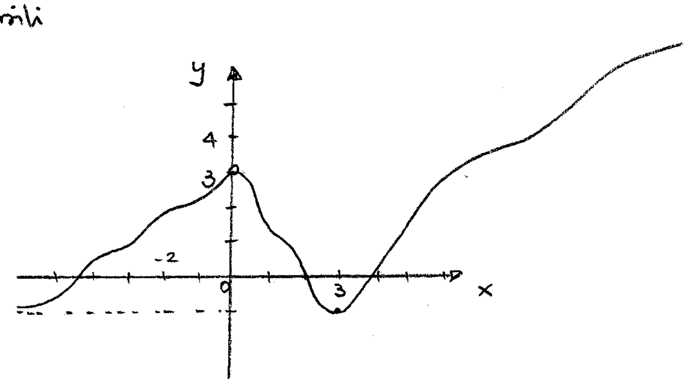
$\square$

Esercizio 3. Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy una funzione definita su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ soddisfacente le seguenti proprietà:

- f continua su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, su $]-\infty,0[$ crescente
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$
- su $]0,3]$ decrescente e $f(3)=-1$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e su $[3,+\infty[$ crescente.

Svolgimento: esempi possibili





$\blacksquare$

Limite

Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $c \in \mathbb{R}$,

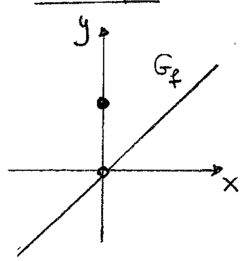
$$f :]a, c[\cup]c, b[\longrightarrow \mathbb{R}.$$

Sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Diremo che limite di f per $x \to c$ è ℓ, e scriveremo $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$, se esistono $\lim_{x \to c^+} f(x)$ e $\lim_{x \to c^-} f(x)$ e sono uguali ad ℓ, cioè

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = \ell \iff \exists \lim_{x \to c^-} f(x) = \ell \ \text{ e } \ \exists \lim_{x \to c^+} f(x) = \ell.}$$

NOTA: i) Se f è definita in c, cioè $c \in]a, b[$, se $\exists \lim_{x \to c} f(x) = \ell$, non è detto che $\ell = f(c)$.

Esempio: $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



Allora $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x = 0 \neq f(0)$

$(f(0) = 2)$.

$\square$

ii) Se f è definita in c, cioè $c \in]a, b[$, se $\exists \lim_{x \to c} f(x) = \ell$ e $\ell = f(c)$, allora f è continua in c.

$\square$

Unicità del limite: Se il limite (..., destro, sinistro) esiste, esso è unico.

Esercizio 4. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|}$

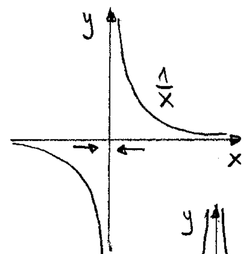
iii) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2+3)$

iv) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, dove $f(x)=\begin{cases} \log x & \text{se } x>1 \\ x^2-1 & \text{se } x\le 1 \end{cases}$

v) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, dove $f(x)=\begin{cases} \log x & \text{se } x>1 \\ 2 & \text{se } x=1 \\ x^2-1 & \text{se } x\le 1. \end{cases}$

Svolgimento:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \quad \nexists$:

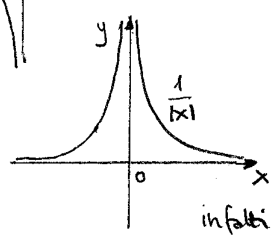


infatti $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

$\square$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$:



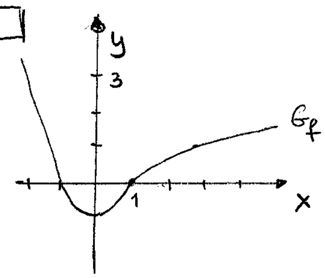
infatti $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{|x|} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

$\square$

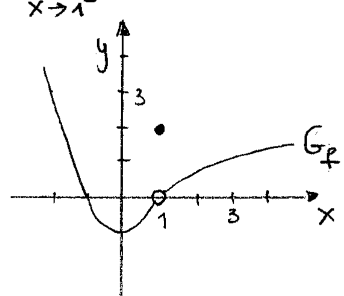
iii) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2+3) = 4+3=7$ $\square$

iv) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$:



infatti $\lim\limits_{x\to 1^-} (x^2-1) = f(1)=0 = \lim\limits_{x\to 1^+} \log x$ $\square$

v) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$:



infatti $\lim\limits_{x\to 1^-} (x^2-1) = 0 = \lim\limits_{x\to 1^+} \log x \quad \left(\neq f(1)\right)$ $\blacksquare$

Raccogliamo nel seguito le <u>proprietà algebriche dei limiti</u> (valgono sia per il limite destro, per il limite sinistro, che per il limite).

<u>Proposizione</u>: Se $\lim_{x\to c} f(x) = l_f$ $\quad \lim_{x\to c} g(x) = l_g$ $\quad l_f, l_g \in \mathbb{R}$

allora

$$f(x) \pm g(x) \longrightarrow l_f \pm l_g \qquad \text{per } x \to c$$
$$f(x)\cdot g(x) \longrightarrow l_f \cdot l_g \qquad \text{per } x \to c$$
$$f(x)/g(x) \longrightarrow l_f/l_g \quad (\text{se } l_g \neq 0) \qquad \text{per } x \to c$$

<u>OSS.</u> Risultati analoghi valgono ancora se $l_f = \begin{matrix}+\infty \\ (-\infty)\end{matrix}$ e $l_g \in \mathbb{R}$ o viceversa;

infatti se $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to c} g(x) = l_g$

allora

$$f(x) \pm g(x) \longrightarrow +\infty \qquad \text{se } x \to c$$
$$f(x)\cdot g(x) \longrightarrow \begin{matrix} +\infty & (\text{se } l_g > 0) \\ -\infty & (\text{se } l_g < 0)\end{matrix} \qquad \text{per } x \to c$$
$$f(x)/g(x) \longrightarrow \begin{matrix} +\infty & (\text{se } l_g > 0) \\ -\infty & (\text{se } l_g < 0)\end{matrix} \qquad \text{per } x \to c.$$

Analog. gli altri casi.

<u>Esercizio 5.</u> Calcolate, se esistono, i seguenti limiti:

i) $\lim_{x\to 2} \dfrac{e^x + x}{x^2+1}$ $\qquad$ ii) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2+1} + 4\right)$

iii) $\lim_{x\to +\infty} \left(e^{-x}+1\right)\left(\dfrac{3+\frac{1}{x^2}}{2+e^{-x}}\right)$ $\qquad$ iv) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x+2}{x-2}$

v) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$ $\qquad$ vi) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}-3\right)\left(e^x+1\right)$

<u>Svolgimento</u>: Usiamo i risultati enunciati alla pagina precedente.

i) $\lim_{x\to 2} \frac{e^x + x}{x^2+1} = \frac{e^2+2}{5}$ $\quad : \quad \frac{\overset{\nearrow e^2}{e^x} + \overset{\nearrow 2}{x}}{\underset{\searrow 4}{x^2+1}} \longrightarrow \frac{e^2+2}{4+1}$ per $x \to 2$ ☐

ii) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2+1} + 4\right) = 4$ $\quad : \quad \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{x}} + \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{3}{x^2+1}} + \underset{\downarrow \atop 4}{4} \longrightarrow 4$ per $x \to +\infty$ ☐

iii) $\lim_{x\to +\infty} (e^{-x}+1)\left(\frac{3+\frac{1}{x^2}}{2+e^{-x}}\right) = \frac{3}{2}$ $\quad : \quad (\underset{\downarrow \atop 0}{e^{-x}}+1)\,\frac{3+\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x^2}}}{2+\underset{\searrow 0}{e^{-x}}} \longrightarrow \frac{1\cdot 3}{2}$ per $x \to +\infty$ ☐

iv) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x-2} = +\infty$ $\quad : \quad \frac{\overset{\nearrow 4}{x+2}}{\underset{\searrow \text{infinitesimo positivo}}{x-2}} \longrightarrow +\infty$ se $x \to 2^+$ ☐

v) $\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^2-4} = +\infty$ $\quad : \quad \frac{\overset{\nearrow 4}{x+2}}{\underset{\searrow \text{infinitesimo positivo}}{x^2-4}} \longrightarrow +\infty$ se $x \to 2$ (sia se $x \to 2^+$, sia se $x \to 2^-$) ☐

vi) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - 3\right)(e^x+1) = -\infty$ $\quad : \quad \left(\underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{x^2}} - 3\right)(\underset{\downarrow \atop +\infty}{e^x}+1) \longrightarrow -\infty$ se $x \to +\infty$. ■

<u>OSS.</u> <u>ATTENZIONE</u>: Nulla si può dire <u>a priori</u> per

<u>la somma</u> se $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to -\infty$ per $x \to c$ (o viceversa)

<u>il prodotto</u> se $f(x) \to 0$, $g(x) \to \pm\infty$ per $x \to c$ (")

<u>il quoziente</u> se $f(x) \to \pm\infty$, $g(x) \to \pm\infty$ per $x \to c$

<u>oppure</u>

se $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ per $x \to c$.

Si dicono <u>FORME INDETERMINATE</u>: $\infty - \infty$; $0 \cdot (\pm\infty)$

$\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$