

Commenti alla lezione del 12/10/05 (3^a lezione Corso)

Riferimento bibliografico : [1] Cap. 2 Sez. 2.10 pag. 61
Sez. 2.5

Esercizio 1. Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy i punti (x,y) del piano soddisfacenti la diseq. :

i) $-x^2 - 2x + y^2 \geq 0;$

ii) $-x^2 + 2x + y^2 - 5 \geq 0;$

iii) $x^2 - 2x + y^2 + 2 \leq 0;$

iv) $x^2 - 2x + y^2 + 2 > 0.$

Svilgimento:

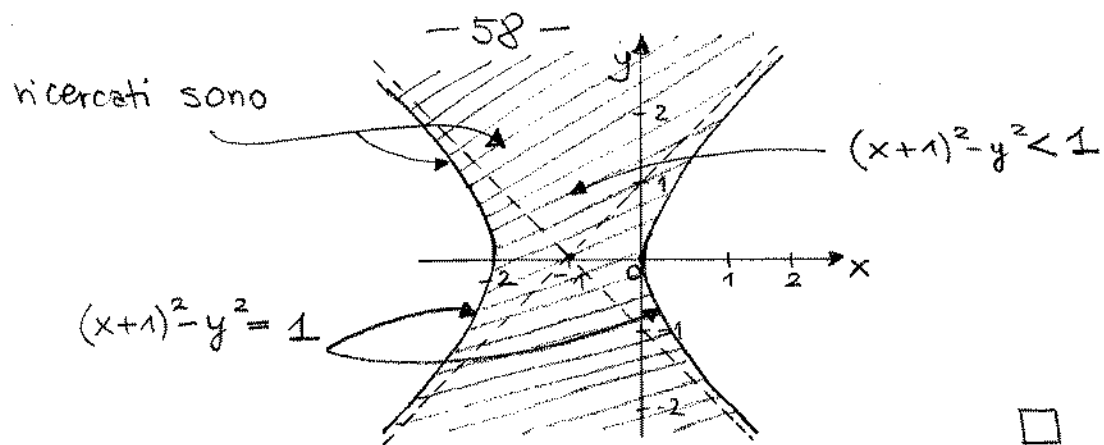
i) Abbiamo $-x^2 - 2x + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow$
 $-\underbrace{(x^2 + 2x)}_{(x+1)^2 - 1} + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow$
 $-(x+1)^2 + 1 + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow$
 $-(x+1)^2 + y^2 \geq -1$

Moltiplicando entrambi i membri della diseq. per -1 si

ha

$$(x+1)^2 - y^2 \leq 1.$$

Osservando che $(x+1)^2 - y^2 = 1$ è l'eq. canonica dell'iperbole di centro $C = (-1, 0)$, semiasse $a = b = 1$ (e asse parallela all'asse y) si ottiene facilmente (osservando, per esempio, che il punto $C = (-1, 0)$ soddisfa la disequazione risultando $0 \leq 1$) che i punti (x, y)

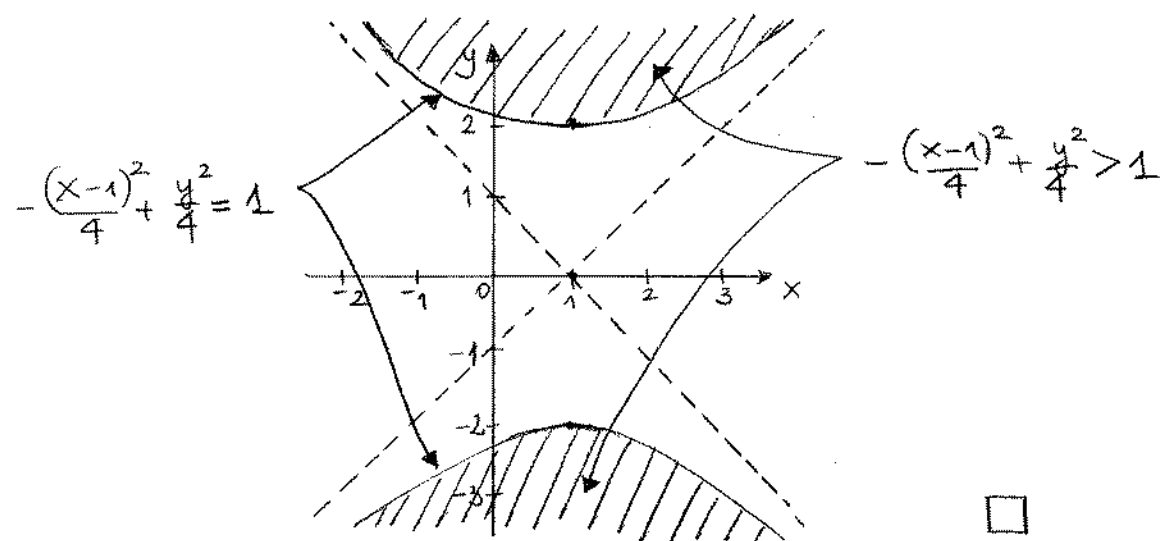


ii) Abbiamo

$$\begin{aligned}
 -x^2 + 2x + y^2 - 5 &\geq 0 && \Leftrightarrow \\
 -\underbrace{(x^2 - 2x)} + y^2 - 5 &\geq 0 && \Leftrightarrow \\
 -\underbrace{(x-1)^2 + 1} + y^2 - 5 &\geq 0 && \Leftrightarrow \\
 -(x-1)^2 + y^2 &\geq 4 \\
 -\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{4} &\geq 1
 \end{aligned}$$

Osservando che $-\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$ è l'eq. canonica dell'iperbole di centro $C = (1, 0)$, semiasse $a = b = 2$

(e asse x) si ottiene facilmente (osservando, per esempio, che il punto $C = (1, 0)$ non soddisfa la diseq. risultando $0 \geq 1$) che i punti (x, y) ricercati sono



$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad & \underbrace{x^2 - 2x + y^2 + 2}_{(x-1)^2 - 1 + y^2 + 2} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \\ & (x-1)^2 - 1 + y^2 + 2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \\ & (x-1)^2 + y^2 + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

Poichè $(x-1)^2 \geq 0 \quad \forall x$, $y^2 \geq 0 \quad \forall y$ si ha
 $(x-1)^2 + y^2 + 1 \geq 1$ e quindi la diseq.

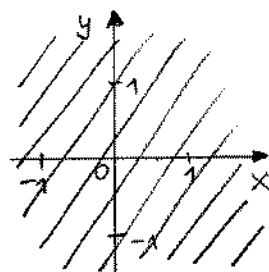
$$(x-1)^2 + y^2 + 1 \leq 0$$

non ha soluzioni. □

$$\begin{aligned} \text{iv)} \quad & \text{Abbiamo } x^2 - 2x + y^2 + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \\ & (x-1)^2 - 1 + y^2 + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$(x-1)^2 + y^2 + 1 > 0,$$

e questa diseq. è soddisfatta $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.



Esercizio 2. Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy i punti (x,y) del piano soddisfacenti il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 8y \leq 0 \\ y > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Svolgimento: Abbiamo

$$x^2 + 4y^2 + 8y \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$

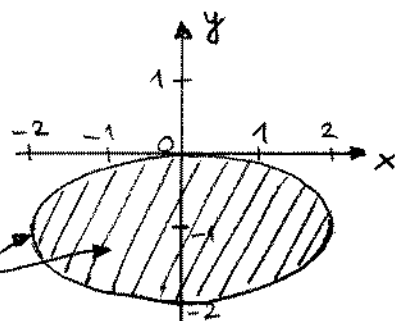
$$x^2 + 4(y^2 + 2y) \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 4(y+1)^2 - 4 \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 4(y+1)^2 \leq 4$$

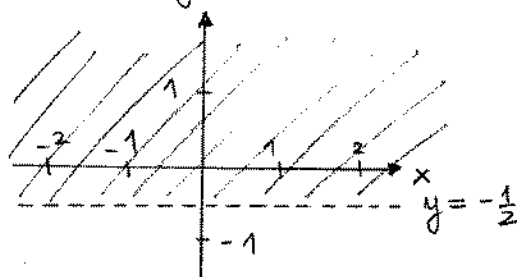
ossia

$$\frac{x^2}{4} + (y+1)^2 \leq 1$$

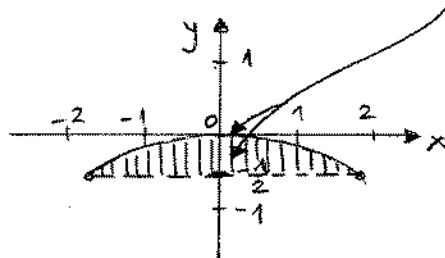


-60-

Inoltre $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -\frac{1}{2}\}$ ha rappresentazione grafica



Abbiamo quindi che i pt. (x,y) del piano soddisfacenti il sistema di diseq. dato sono rappresentati da



Esercizio 3. Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy i punti (x,y) del piano soddisfacenti il sistema di disequazioni

$$x^2 - 2x + y \leq 0$$

$$x^2 - 2x + 4y^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

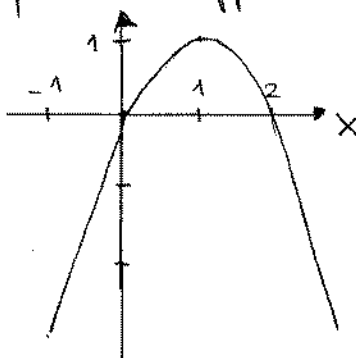
Svolgimento: Notiamo che

$$x^2 - 2x + y \leq 0 \Leftrightarrow$$

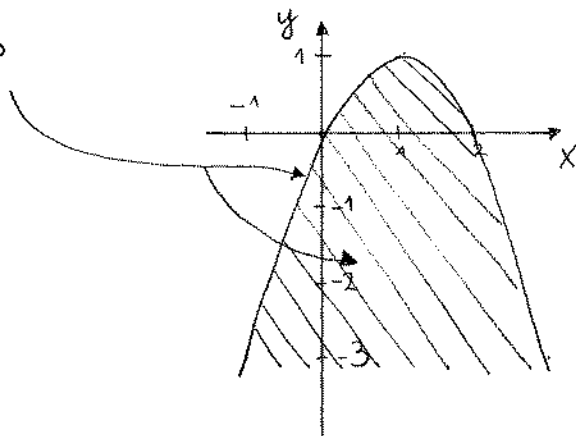
$$y \leq -x^2 + 2x$$

ossia $y \leq -(x-1)^2 + 1.$

Ricordiamo che $y = -(x-1)^2 + 1$ è l'eq. di una parabola di vertice $V=(1,1)$, la cui rappresentazione grafica è



I punti (x,y) che soddisfanno la disuguaglianza $y \leq -(x-1)^2 + 1$ sono



Inoltre $x^2 - 2x + 4y^2 + \frac{3}{4} > 0 \iff$

$$(x-1)^2 - 1 + 4y^2 + \frac{3}{4} > 0 \iff$$

$$(x-1)^2 + 4y^2 - \frac{1}{4} > 0 \iff$$

$$(x-1)^2 + 4y^2 > \frac{1}{4},$$

ossia

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{16}} > 1.$$

Poiché $\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{16}} = 1$ è l'eq. dell'ellisse di centro

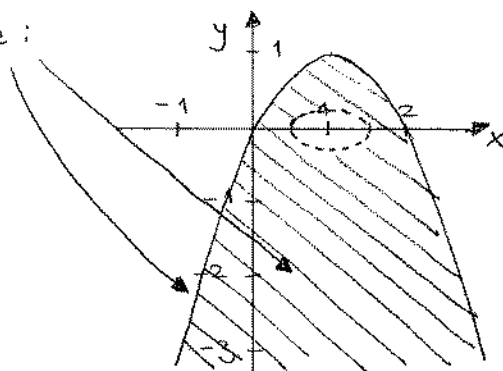
$C=(1,0)$ e semiasse $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$, si ottiene che i punti (x,y) soddisfacenti

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{16}} > 1,$$

sono i punti esterni all'ellisse. Abbiamo allora che i pt.

(x,y) soddisfacenti il sistema di diseq. dato si rappresentano

come segue:



Equazione dell'iperbole equilatera (incentra agli assi coordinati)

$$xy = k \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

(ha come asintoti gli assi coordinati)

o, più in generale,

$$(x-x_0)(y-y_0) = k \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ fissato},$$

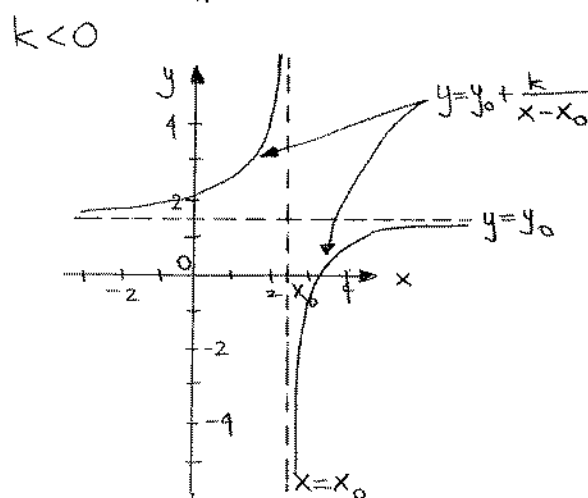
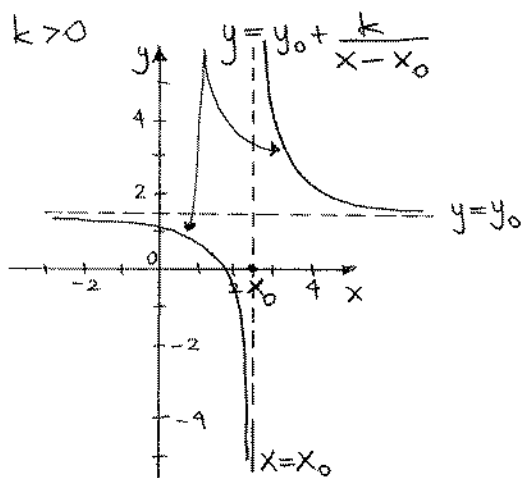
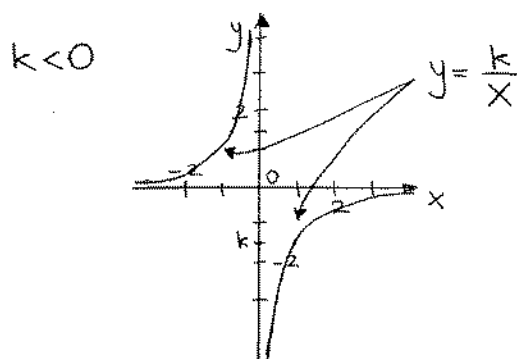
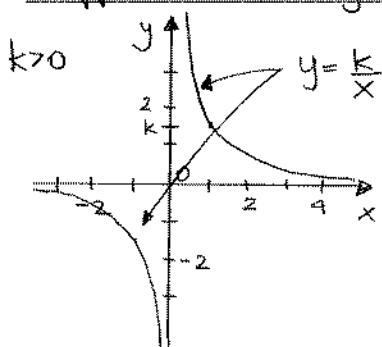
(ha come asintoti le rette $x=x_0, y=y_0$).

NOTA: Poiché $k \neq 0$, $xy = k \Leftrightarrow y = \frac{k}{x}$ (ovviamente $x \neq 0$)

$$(x-x_0)(y-y_0) = k \Leftrightarrow y = \frac{k}{x-x_0} + y_0$$

(ovviam. $x \neq x_0$)

Rappresentazione grafica:



Esercizio 4. Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy l'insieme dei punti (x,y) soddisfacenti

i) $x(y-1) = 2$;

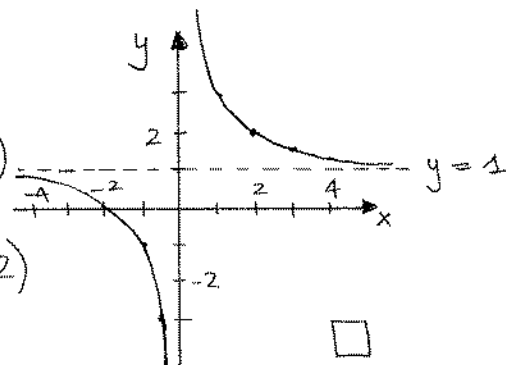
ii) $(x-1)y > 1$.

Svolgimento :

i) $x(y-1) = 2 \Leftrightarrow$

$(y-1) = \frac{2}{x}$ (ovviamente $x \neq 0$)

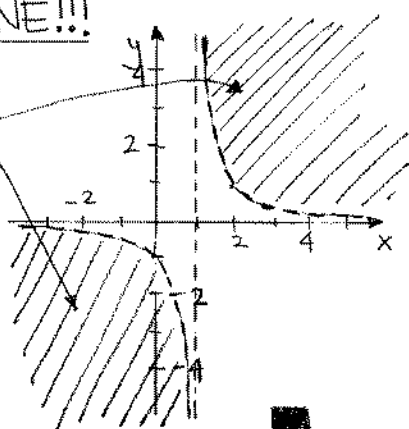
$\Leftrightarrow y = \frac{2}{x} + 1$ (asintoti $x=0, y=2$)



ii) $(x-1)y > 1 \Leftrightarrow$ ATTENZIONE!!!

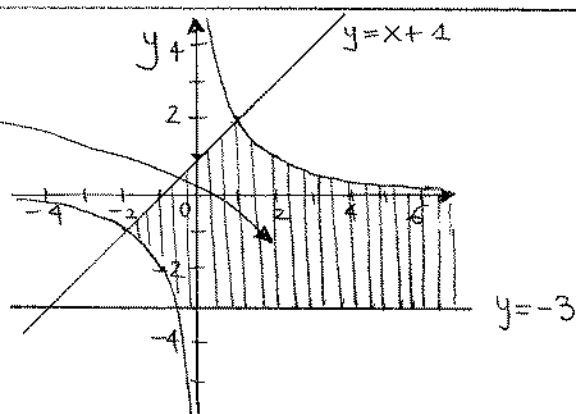
$$\begin{cases} y > \frac{1}{x-1} & \text{se } x > 1 \\ y < \frac{1}{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

(asintoti $x=1, y=0$)



Esercizio 5. Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy l'insieme dei punti (x,y) soddisfacenti il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} xy \leq 2 \\ y \leq x+1 \\ y \geq -3 \end{cases}$$



Svolgimento : ATTENZIONE !!

$$xy \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{se } x=0 \Rightarrow \forall y \in \mathbb{R} \\ \text{se } x>0 \Rightarrow y \leq \frac{2}{x} \\ \text{se } x<0 \Rightarrow y \geq \frac{2}{x} \end{cases}$$