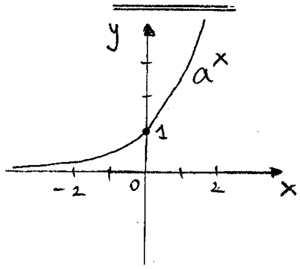
Commenti alla lezione del 29/11/2005 (17^a lezione Corso)

Riferimento bibliografico [2] Cap. 3 Sez. 3.6 (Teor. di confronto 3.14 2);
Teor. dei carabinieri 3.15;).
Sez. 3.7 (Limiti fondamentali (3.21); (3.22)
limite della composizione Teor. 3.20).
Cap. 4 Sez. 4.7 (Asintoti: pag. 176 ff)).

Formalizziamo nel seguito i comportamenti della funzione esponenziale e della funzione logaritmo agli estremi del loro insieme di definizione.

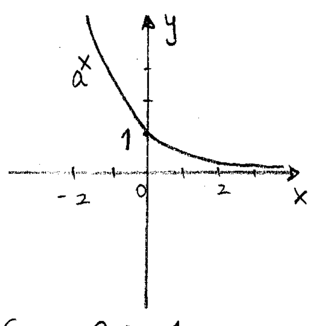
OSS. 1

Se $a > 1$



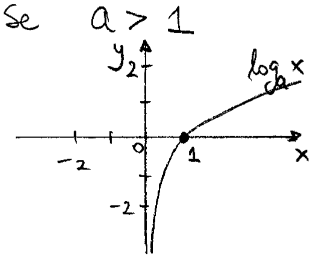
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty .$$

Se $0 < a < 1$



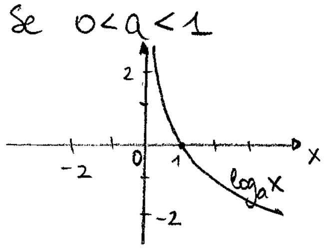
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0 .$$

Se $a > 1$



$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty .$$

Se $0 < a < 1$



$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty .$$

<u>OSS. 2.</u> Confrontiamo la crescita, per $x \to +\infty$, delle funzioni $\log_a x$, x^n, a^x se $a > 1$. Notiamo che tutte tre le funzioni tendono a $+\infty$ se $x \to +\infty$, ma con "velocità" assai diversa: a^x cresce molto più forte di qualunque potenza x^n che a sua volta cresce molto più forte di $\log_a x$; questo scriviamo nel seg. modo: se $\underline{a > 1}$

$$\boxed{\log_a x << x^n << a^x \quad \text{per } x \to +\infty,}$$

ossia

ⓐ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^n} = 0 \qquad \forall n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ (questo fatto è vero anche se $0 < a < 1$)

ⓑ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \qquad \forall n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. □

<u>Esercizio 1.</u> Calcolate, se esistono, i seguenti limiti:

i) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(e^x - x^{100}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ (\infty - \infty)}}{=} +\infty$: $\displaystyle\underbrace{e^x}_{\downarrow +\infty}\underbrace{\Big(1 - \underbrace{\frac{x^{100}}{e^x}}_{\downarrow ⓑ\ 0}\Big)}_{\to 1} \longrightarrow +\infty$ se $x \to +\infty$. □

ii) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1 + x^{100})}{x^2 + \frac{1}{x}} \underset{\substack{\uparrow \\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right)}}{=} 0$: $\displaystyle\frac{\log(1 + x^{100})}{x^2 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow 0}} = \frac{\log x^{100}\left(1 + \frac{1}{x^{100}}\right)}{x^2 + \frac{1}{x}} =$

$$= \underbrace{\frac{100 \log x}{x^2 + \frac{1}{x}}}_{ⓐ\ \to 0} + \frac{\log\Big(1 + \overbrace{\tfrac{1}{x^{100}}}^{\to 0}\Big)^{\to 0}}{\underbrace{x^2 + \frac{1}{x}}_{\to \infty}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$ □

iii) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x} + 3x}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \left(\frac{\infty - \infty}{-\infty}\right)}}{=} -\infty$: $\displaystyle\frac{\overbrace{e^{-x}}^{\nearrow +\infty}\Big(1 + \overbrace{\frac{3x}{e^{-x}}}^{\nearrow 0}\Big)}{\underbrace{x}_{\downarrow -\infty}} \xrightarrow[\text{usiamo ⓑ}]{} -\infty$ □

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+4}{x+e^{-2x}} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} +\infty$: $\dfrac{\cancel{x^2}\left(1+\overbrace{\frac{4}{x^2}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(1+\underbrace{\frac{e^{-2x}}{x}}_{0}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

$\square$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+4}{x^2+e^{-2x}} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} 1$: $\dfrac{\cancel{x^2}\left(1+\overbrace{\frac{4}{x^2}}^{0}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\underbrace{\frac{e^{-2x}}{x^2}}_{0}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

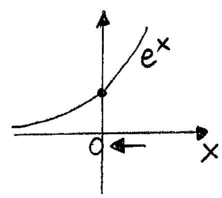
$\square$

vi) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - x^{100}}{\log x^2} \underset{\left(\frac{\infty-\infty}{\infty}\right)}{=} +\infty$: $\dfrac{e^x\left(1-\overbrace{\frac{x^{100}}{e^x}}^{\to 0}\right)}{2\log x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

poichè $\log x \underset{se\ x\to+\infty}{<<} e^x$.

$\square$

vii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1-e^x} = -\infty$:



se $x\to 0^+$ e^x <u>decresce</u> verso 1, quindi $1-e^x$ è un infinitesimo negativo, e quindi $\dfrac{1}{1-e^x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$

$\square$

viii) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{e^x - \frac{1}{x-1}}{\log(1+x)} = -\infty$: $\dfrac{e^x - \frac{1}{x-1}}{\log(1+x)} \xrightarrow[x\to 1^+]{}$

$\dfrac{e^1 - \overbrace{\left(\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}\right)}^{\to+\infty}}{\log 2} \longrightarrow -\infty$

$\blacksquare$

<u>NOTA</u>: Poichè per $x>1$, $\dfrac{\log_a x}{x^n} > 0$ (<u>se $a>1$</u>) e $\dfrac{x^n}{a^x} > 0$ ⓐ e ⓑ nella pagina precedente sono equivalenti, se $a>1$, a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\log_a x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty.$$

$\blacksquare$

Ricordiamo ancora due risultati riguardanti i limiti che spesso sono utili (valgono anche per il limite destro e il limite sinistro).

<u>Teorema del confronto; teorema dei 2 carabinieri.</u>

Supponiamo che

(i) $f(x) \leq g(x)$ per tutti gli x vicini al punto c (escluso eventualmente in $x = c$).

Allora, se $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to c} g(x) = +\infty$;

se $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to c} g(x) = -\infty$.

(ii) $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ per tutti gli x vicini al punto c (il punto c eventualmente escluso).

Allora, se $\lim_{x \to c} h(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \ell$, allora anche f ha limite per $x \to c$ e si ha $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$.

<u>Teorema (limite della composizione):</u> Siano f e g due funzioni tali che

i) $\lim_{y \to y_0} f(y) = \ell$, f è continua in y_0

ii) $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$

Allora $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to y_0} f(y) = \ell$.

Questo teorema è di importanza fondamentale per il calcolo dei limiti, in quanto permette in molti casi di ridurre un limite composto a una sequenza di limiti più semplici.

Esercizio 2. Calcolate, se esistono, i seguenti limiti:

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2+x} = 0$: vediamo che $e^{-x^2+x} = f(g(x))$

dove $g(x) = -x^2+x$

$f(y) = e^y$ continua in $\mathbb{R}$

Poichè $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty = y_0$ ($+\infty = x_0$) del teor. prec.

e $\lim\limits_{y \to -\infty} f(y) = \lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0$

si ha $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2+x} = 0$.

Senza fare tutti questi passi, basta procedere ragionando come segue (la giustificazione però è il teorema!) Per $x \to +\infty$, $-x^2+x \to -\infty$; quindi dobbiamo ricordarci come si comporta $e^{\square}$ quando $\square \to -\infty$; sappiamo $e^{\square} \to 0$; quindi $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2+x} = 0$. $\square$

ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log(1+e^x) = 0$: infatti, se $x \to -\infty$, $1+e^x \to 1$; ora $\log \square \to 0$ per $\square \to 1$; quindi $\lim\limits_{x \to -\infty} \log(1+e^x) = 0$ $\square$

iii) $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right)^3 = +\infty$: infatti, se $x \to 1^+$, $x-1$ è un infinitesimo positivo; quindi $\frac{1}{x-1} \to +\infty$; ora $\square^3 \to +\infty$ per $\square \to +\infty$; dunque $\left(\frac{1}{x-1}\right)^3 \to +\infty$ se $x \to 1^+$. $\square$

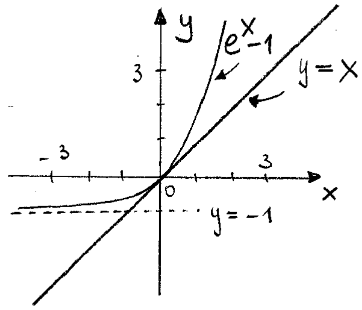
iv) $\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{x-1}\right)^4 = +\infty$: infatti, se $x \to 1^-$, $(x-1)$ è un infinitesimo negativo, quindi $\frac{1}{x-1} \to -\infty$; ora $\square^4 \to +\infty$ per $\square \to -\infty$; dunque $\left(\frac{1}{x-1}\right)^4 \to +\infty$ se $x \to 1^-$ $\square$

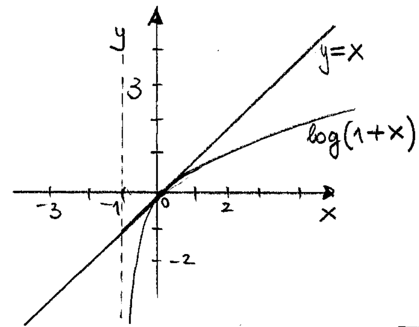
v) $\lim_{x\to -\infty} e^{x^2+1} = +\infty$: infatti, se $x \to -\infty$, $x^2+1 \to +\infty$; ora $e^{\square} \to +\infty$ se $\square \to +\infty$; quindi $\lim_{x\to -\infty} e^{x^2+1} = +\infty$. ■

Ricordiamo due limiti notevoli (che saranno utili anche nel seguito):

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 .}$$

Osserviamo che $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ e $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$ si presentano nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Questi due limiti (la cui validità deve essere dimostrata!) esprimono il fatto che le funzioni $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = \log(1+x)$ tendono a 0, per $x \to 0$, come la funzione x! Graficamente abbiamo





$\blacksquare$

<u>Esercizio 3.</u> Usando il teorema del limite della composizione e i limiti notevoli sopra, calcolate i seguenti limiti:

i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 1$: infatti, se $x \to 0$, $x^2 \to 0$, ora $\dfrac{e^{\square}-1}{\square} \to 1$ se $\square \to 0$ e quindi $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} = 1$. $\square$

ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{3x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 1$: come sopra. $\square$

iii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 3$: infatti, $\dfrac{e^{3x}-1}{x} = \underbrace{\dfrac{e^{3x}-1}{3x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{3}_{\downarrow 3} \to 3$. $\square$

iv) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^2)}{x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 0$: infatti, $\dfrac{\log(1+x^2)}{x} = \underbrace{\dfrac{\log(1+x^2)}{x^2}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{x}_{\downarrow 0} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ $\square$

v) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\log(1+x)} = 1$ $\left(\frac{0}{0}\right)$: infatti $\displaystyle \frac{e^x-1}{\log(1+x)} = \underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\frac{x}{\log(1+x)}}_{\downarrow\, 1}$ $x\to 0$ ■

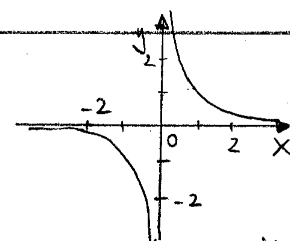
Asintoti

Asintoto verticale:

se $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ (oppure $-\infty$), allora la retta verticale $x=a$ si chiama <u>asintoto verticale</u> per f;

Se $\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ (oppure $-\infty$), la retta verticale $x=b$ si chiama asintoto verticale per f.

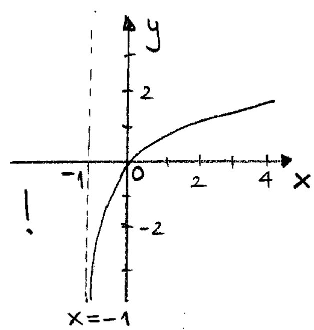
Esempi: i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$



$x=0$ è un asintoto verticale per f! □

ii) $f(x) = \log(1+x)$

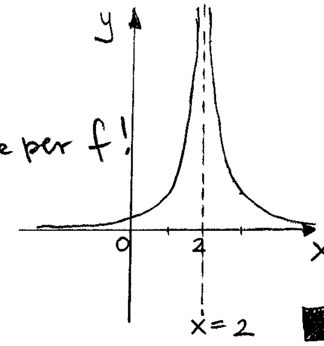
$x=-1$ è un asintoto verticale per f!



□

iii) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

$x=2$ è un asintoto verticale per f!



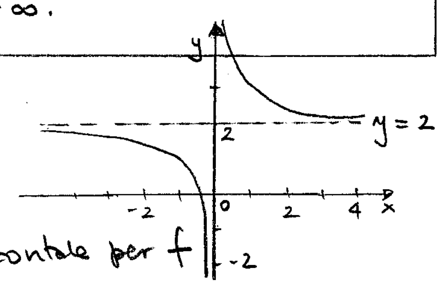
■

<u>Asintoto orizzontale</u>:

Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, la retta orizzontale $y = \ell$ si chiama <u>asintoto orizzontale</u> per f, per $x \to +\infty$.

Se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, la retta orizzontale $y = \ell$ si chiama asintoto orizzontale per f, per $x \to -\infty$.

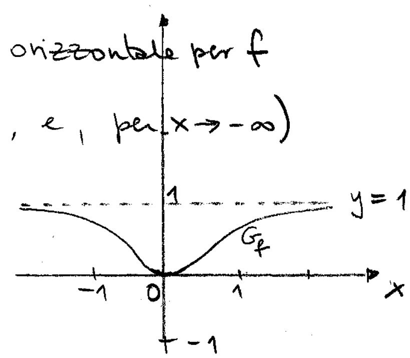
<u>Esempi</u>: i) $f(x) = \frac{1}{x} + 2$



$y = 2$ è un asintoto orizzontale per f
(per $x \to +\infty$, e, per $x \to -\infty$) $\square$

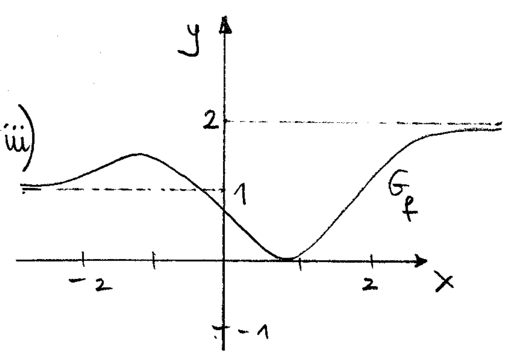
ii) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2}$

$y = 1$ è un asintoto orizzontale per f
(per $x \to +\infty$, e, per $x \to -\infty$)



$\square$

iii)



$y = 1$ è un asintoto orizzontale per f, per $x \to -\infty$
$y = 2$ è un asintoto orizzontale per f, per $x \to +\infty$. ■

Asintoto obliquo:

La retta $y = ax+b$ è un asintoto obliquo per f, per $x \to +\infty$ se

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - ax\right] = b\right].$$

Analog. per $x \to -\infty$.

Esempio: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$; notiamo che per $x \to \pm\infty$, x^2+1 si comporta come x^2 e quindi $f(x)$ si comporta come $\dfrac{x^2}{2x} = \dfrac{1}{2}x$

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

e quindi è "naturale" aspettarsi che la funzione abbia un asintoto obliquo (lo stesso per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$)!

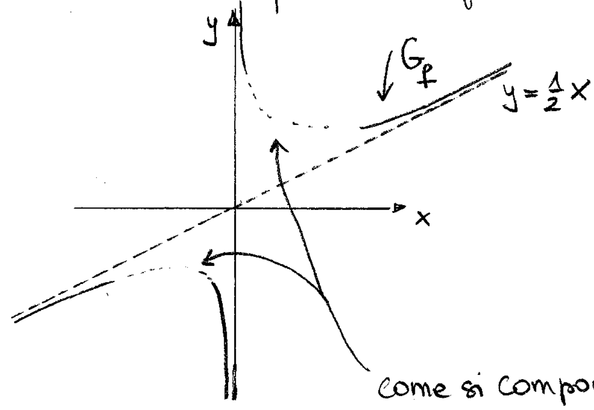
Abbiamo

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} \frac{x^2+1}{2x^2} = \frac{1}{2} \\[2ex] \displaystyle\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} \left[f(x) - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} \frac{1}{2x} = 0 . \end{cases}$$

Quindi, la retta $y = \frac{1}{2}x$ è un asintoto obliquo per f, per $x \to +\infty$ (e anche per $x \to -\infty$).

Notiamo inoltre che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$,

quindi $x=0$ è un asintoto verticale. Infine, osservando che $f(x)>0$ se $x>0$, $f(x)<0$ se $x<0$, è continua su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ possiamo tracciare un "parziale" grafico di f:



Per avere delle informazioni complete di f abbiamo bisogno del concetto di derivata.

<u>OSS.</u> $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x} = \dfrac{x^2}{2x} + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2x}$;

da questa scomposizione si vede subito che,

per $x \to 0^+$, $x \to 0^-$ } la funzione f si comporta come la funzione $\frac{1}{2x}$

$\left(\text{poichè } \frac{1}{2}x \xrightarrow[x\to 0]{} 0\right)$

mentre

per $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ } la funzione f si comporta come la funzione $\frac{1}{2}x$

$\left(\text{poichè } \frac{1}{2x} \xrightarrow[x\to +\infty\,(-\infty)]{} 0\right)$.

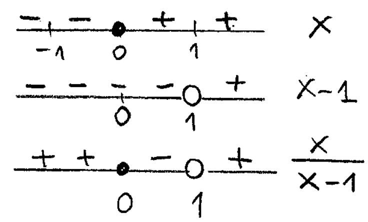
Quindi, il grafico molto approssimativo della f fatto sopra non ci deve stupire! ■

<u>Esercizio 4.</u> Tracciato un grafico (molto approssimativo) della funzione $f(x) = \log \frac{x}{x-1}$.

<u>Svolgimento:</u>

i) $\operatorname{dom} f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x-1} > 0 \right\} =$

$= \left]-\infty, 0\right[\cup \left]1, +\infty\right[.$



ii) f è continua: somma, rapporto, composizione di funzioni continue.

iii) $f(x) \geq 0$ se $\frac{x}{x-1} \geq 1 \iff \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + 1}{x-1} \geq 0$

$\iff x > 1$

iv) comportamento agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \log\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0;$$

: infatti, per $x \to -\infty$, $\frac{x}{x-1} \to 1$

e $\log \square \to 0$ se $\square \to 1$. $\square$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \log\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\infty;$$

: infatti, per $x \to 0^-$, $\frac{x}{x-1} \to 0^+$

e $\log \square \to -\infty$ se $\square \to 0^+$.

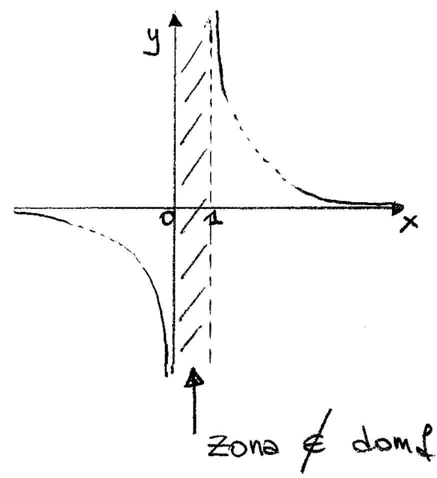
$\square$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \log\left(\frac{x}{x-1}\right) = +\infty \quad ;$$

infatti, per $x \to 1^+$, $\dfrac{x}{x-1} \longrightarrow +\infty$
e $\log \square \to +\infty$ se $\square \to +\infty$. $\square$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \log\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0 \qquad (\text{come il limite per } x \to -\infty)$$

$\square$



Con l'uso della derivata raccoglieremo ulteriori informazioni sulla f che ci permetteranno di disegnare "anche nelle zone intermedie" la funzione f ■