Commenti alla lezione del 28/11/2005 (16ª lezione Corso)

Riferimento bibliografico: [2] cap. 3 Sez. 3.6 (Esempi pag 96, pag. 97 fino a prop. 3.17 (esclusa). Prop. 3.18, Teor. 3.19: importante è prima metà di pag. 99).

Abbiamo asserito nella lezione precedente che $\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ sono forme indeterminate. Questo non significa, naturalmente, che non potremo mai dirne alcunché: però, occorrerà sapere esattamente quali sono le funzioni in questione, come vedremo nel seguito.

$\boxed{\infty - \infty}$: Sia $f(x) = x$, così $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$; vediamo qui di seguito che, scegliendo opportunamente diverse funzioni $g(x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$, la funzione somma $f(x)+g(x)$ può esibire diversi comportamenti:

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)+g(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x))$
x	$-\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	$+\infty$
x	$-x+2$	2	2
x	$-2x$	$-x$	$-\infty$

$\square$

$\boxed{0 \cdot (\pm\infty)}$: Sia $f(x) = \frac{1}{x^2}$, così $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$; vediamo qui di seguito che, scegliendo opportunamente diverse funzioni $g(x) \to \underset{(-\infty)}{+\infty}$ per $x \to +\infty$, la funzione prodotto $f(x)\,g(x)$ può esibire diversi comportamenti:

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)\,g(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\,g(x)\right)$
$\frac{1}{x^2}$	x^3	x	$+\infty$
$\frac{1}{x^2}$	$2x^2$	2	2
$\frac{1}{x^2}$	x	$\frac{1}{x}$	0
$\frac{1}{x^2}$	$-x^3$	$-x$	$-\infty$

$\square$

$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ $\left(= \frac{1}{\infty}\cdot\infty = 0\cdot\infty\right.$ e quindi è una forma indeterminata); possiamo comunque anche qua fare una tabella come sopra.

: Sia $f(x)=x^2$, così $f(x)\to+\infty$ per $x\to+\infty$; vediamo qui di seguito che, scegliendo opportunamente diverse funzioni $g(x)\to\underset{(-\infty)}{+\infty}$ per $x\to+\infty$, la funzione $\frac{f(x)}{g(x)}$ può esibire diversi comportamenti:

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)/g(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$
x^2	x	x	$+\infty$
x^2	$2x^2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x^2	x^3	$\frac{1}{x}$	0
x^2	$-x$	$-x$	$-\infty$

$\square$

$\boxed{\frac{0}{0}}$ $\left(= 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty\right.$ e quindi è una forma indeterminata); possiamo comunque anche qua fare una tabella come sopra.

: Sia $f(x) = x^2$, così $f(x) \to 0$ per $x \to 0$; vediamo qui di seguito che, scegliendo opportunamente diverse funzioni $g(x) \to 0$ per $x \to 0$, la funzione $\frac{f(x)}{g(x)}$ può esibire diversi comportamenti:

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)/g(x)$	$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$
x^2	x	x	0
x^2	$2x^2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x^2	x^3	$\frac{1}{x}$	$\nexists$
x^2	x^4	$\frac{1}{x^2}$	$+\infty$
x^2	$-x^4$	$-\frac{1}{x^2}$	$-\infty$

$\square$

<u>Esercizio 1.</u> Calcolate, se esistono, i seguenti limiti:

i) $\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - x^4\right) \underset{\uparrow\,(\infty-\infty)}{=} -\infty$: $x^2 - x^4 = \underbrace{x^4}_{\to+\infty}\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} - 1\right)}_{\to -1} \longrightarrow -\infty$ $\square$

ii) $\lim_{x\to-\infty} \left(x^2 - x^4\right) \underset{\uparrow\,(\infty-\infty)}{=} -\infty$: come sopra. $\square$

iii) $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}\right) \underset{\uparrow\,(\infty-\infty)}{=} +\infty$: $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x^2-1} = \frac{\overset{\to 1}{x}}{\underbrace{x^2-1}_{\text{infinitesimo positivo}}} \to +\infty$ $\square$

iv) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x^2+x+1} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} 0$: $\dfrac{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^{\cancel{2}}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} \to 0.$

v) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3-x}{x} \underset{\left(\frac{\infty}{-\infty}\right)}{=} -1$: $\dfrac{\cancel{x}\left(\frac{3}{x}-1\right)}{\cancel{x}} \to -1.$

vi) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2-1}{x-1} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 2$: $\dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} \to 2.$

vii) $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0 \\ -\infty & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$ dove $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinomio di grado n $a_i \in \mathbb{R}$

viii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \frac{a_n}{b_m} > 0 \text{ e } n > m \\ \frac{a_n}{b_n} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$

dove $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$

Casi particolari:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^3 + 2} = +\infty$ (in questo caso $n = 4$, $m = 3$, $a_4 = 1$ $b_3 = 1$)

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^7 + 4x^4 - 1}{8x^3 + 4x^7} = \dfrac{3}{4}$ (in questo caso $n = 7 = m$, $a_7 = 3$, $b_7 = 4$)

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 1}{-4x^3 + x^2} = 0$ (in questo caso $n = 2$, $m = 3$, $a_2 = 3$, $b_3 = -4$)

<u>OSS. IMPORTANTE</u> : Sia $f: \,]a,b[\to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \,]a,b[$.
Si ha che f è <u>continua in x_0</u> se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
(ossia, se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ e coincide con $f(x_0)$).

Questo fatto segue subito dalla definizione di limite e dalla definizione di continuità di f in x_0. $\square$

<u>Esercizio 2.</u> Stabilite se la seguente funzione è continua nel suo dominio:

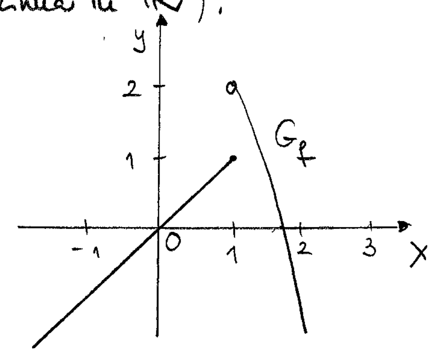
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ 3-x^2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

<u>Svolgimento:</u> f è definita su tutto $\mathbb{R}$. In ogni punto $x < 1$ e in ogni punto $x > 1$ la f è continua (abbiamo visto che $g(x) = x$ e $\tilde{g}(x) = 3 - x^2$ sono funzioni continue in tutti i pt. di $\mathbb{R}$, e quindi in particolare $g(x)$ è continua $\forall x < 1$ e $\tilde{g}(x)$ è continua $\forall x > 1$).
Vediamo in $x = 1$. Abbiamo

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1 = f(1)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3 - x^2) = 3 - 1 = 2.$$

Quindi $\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$ e quindi f non è continua in $x = 1$ (e quindi non è continua in $\mathbb{R}$).



Esercizio 3. Stabilire se la seguente funzione è continua nel suo dominio:

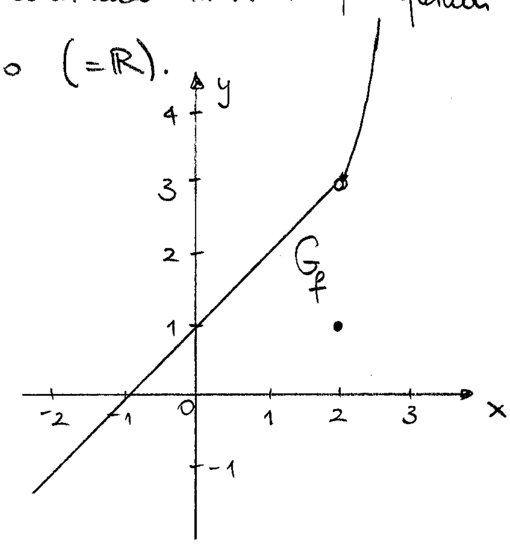
$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{se } x<2 \\ 1 & \text{se } x=2 \\ x^2-1 & \text{se } x>2. \end{cases}$$

Svolgimento: f è definita su tutto $\mathbb{R}$. In ogni punto $x<2$ e in ogni punto $x>2$ la f è continua (analog. all'esercizio 2). Vediamo in $x=2$. Abbiamo

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+1) = 3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2-1) = 3 \quad .$$

Quindi $\exists \lim_{x\to 2} f(x)$ e vale 3; poiché $f(2)=1\neq 3$, risulta che f non è continua in $x=2$, e quindi f non è continua nel suo dominio $(=\mathbb{R})$.



■

Esercizio 4. Stabilire se la seguente funzione è continua nel suo dominio:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Svolgimento: Vedi Es. 3 pag. precedente.

Vediamo in $x = 2$. Abbiamo

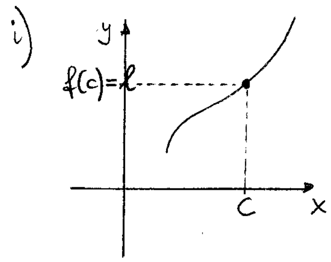
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x+1) = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3 = f(2).$$

Si ha $\lim_{x \to 2} f(x) = 3 = f(2)$ e quindi f è continua in $x = 2$. Essendo continua in tutti i pt. $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, risulta che f è continua su tutto $\mathbb{R}$. ■

Esercizio 5. Deducete dal grafico il comportamento delle funzioni rappresentate di seguito:

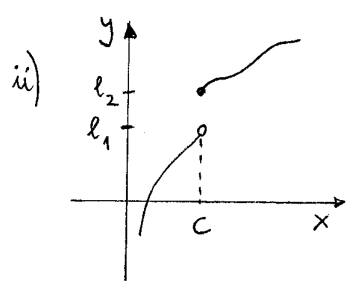
i)



$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = \ell.$$

□

ii)

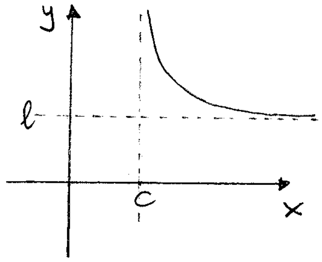


$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \ell_1$$

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \ell_2 = f(c).$$

□

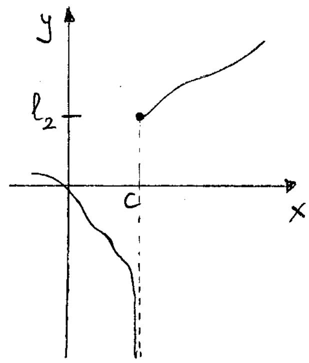
iii)



$$\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \,.$$

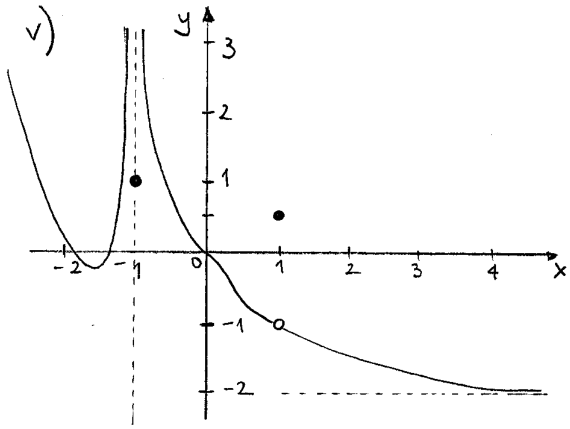
iv)



$$\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \ell_2 = f(c)$$

v)



$f(-1) = 1 \qquad f(1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2 \,.$$