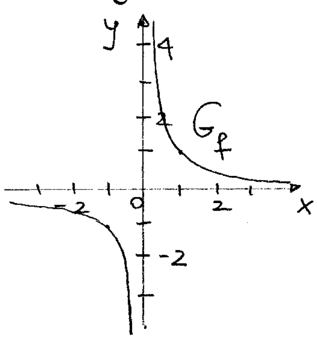
Commenti alla lezione del 14/11/2005 (10ª lezione Corso)

Riferimento bibliografico: [1] Cap. 3 Sez. 3.4 (pag. 76).

Il prossimo esempio è particolarmente importante.

Esempio 1: Sia $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$.
Allora f è decrescente su $]-\infty, 0[$, è decrescente su $]0, +\infty[$, ma non è monotòna su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Svolgimento. Si ha che



$f|_{]-\infty,0[}$ è decrescente: infatti siano

$x_1, x_2 \in]-\infty, 0[$, $x_1 < x_2 < 0$. Allora moltipl. questa disuguaglianza per $\frac{1}{x_2}$ e ricordando che $\frac{1}{x_2} < 0$, si ha

$$x_1 \cdot \frac{1}{x_2} > x_2 \cdot \frac{1}{x_2} = 1 \quad \text{, ossia}$$

$$x_1 \cdot \frac{1}{x_2} > 1 .$$

Moltiplicando questa disuguaglianza per $\frac{1}{x_1}$ e ricordando che $\frac{1}{x_1} < 0$, si ha

$$\frac{1}{x_1} \cdot x_1 \cdot \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \quad \text{, ossia} \quad \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} .$$

Abbiamo così provato che se $x_1 < x_2 < 0 \implies f(x_2) = \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} = f(x_1)$ ossia $f|_{]-\infty,0[}$ è decrescente.

Proviamo che $f|_{]0,+\infty[}$ è decrescente: siano $x_1, x_2 \in]0, +\infty[$

$x_1 < x_2$. Proseguendo come sopra (ma ora $\frac{1}{x_1}$ e $\frac{1}{x_2} > 0$) si ottiene $f(x_2) = \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} = f(x_1)$, cioè quanto si vuole.
Vediamo subito che f però non è decrescente su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$: infatti, prendendo $x_1 = -1 < x_2 = 1$ si ha $f(x_1) = -1 < 1 = f(x_2)$, che è il contrario della disuguaglianza di decrescenza. ∎

Il prossimo risultato, molto facile ed intuitivo, ha vaste applicazioni, perchè generalmente non è semplice provare direttamente che una funzione è iniettiva.

Proposizione: $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente monotòna $\Rightarrow f$ è iniettiva.

Non bisogna però credere che le uniche funzioni iniettive siano quelle strettamente monotòne.

Esempio: $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$ è iniettiva (ad elementi x_1, x_2 distinti di $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, corrispondono $f(x_1)$, $f(x_2)$ distinti), ma f non è monotòna su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (vedi Es. 1 pag. 118). ∎

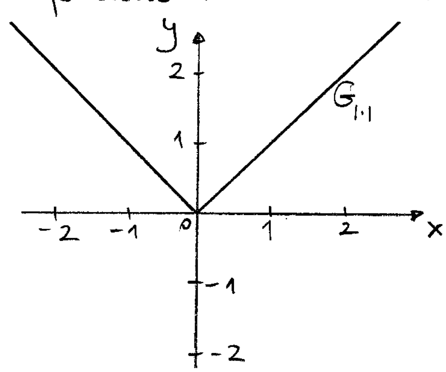
Ancora qualche funzione elementare

Funzione valore assoluto

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \underbrace{|x|}_{\text{notazione}} = \max\{x, -x\} \doteq \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Il grafico della funzione valore assoluto è dunque



NOTA: f è pari, è limitata inferiormente.

<u>Esempio</u>: $|2.5| = 2.5$; $|0| = 0$; $|-3.1| = 3.1$; $|-\pi| = \pi$.

Avendo presente la rappresentazione grafica della funzione valore assoluto si ottengono immediatamente le seguenti proprietà:

<u>Proposizione</u>:

i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$ e $= 0 \iff x = 0$;

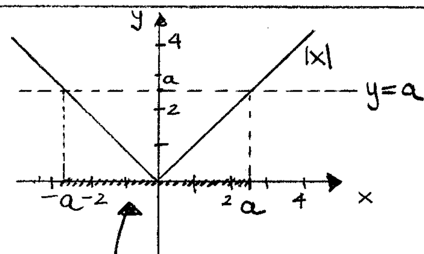
ii) $\forall x \in \mathbb{R}$; $|x| = |-x|$;

iii) $\forall a \geq 0$ $\left(|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a\right)$

iv) $\forall a < 0$ $\left(|x| \geq a \text{ è valida } \forall x \in \mathbb{R}\right)$

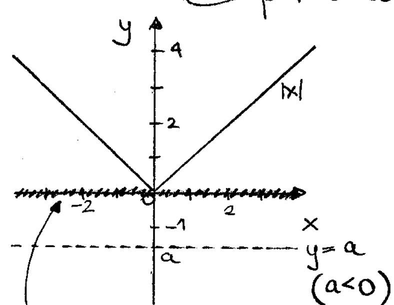
$\forall a \geq 0$ $\left(|x| \geq a \iff (x \geq a) \text{ o } (x \leq -a)\right)$

Per iii) vedi

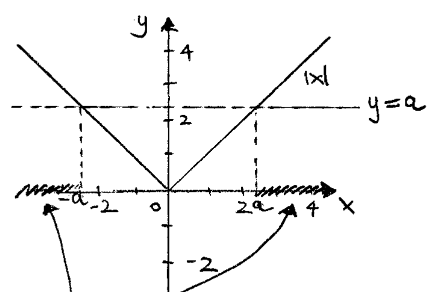


per tutti questi x si ha $|x| \leq a$.

Per iv) vedi



per tutti questi x si ha $|x| \geq a$

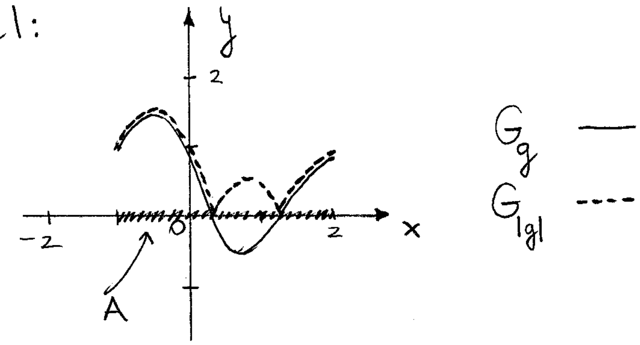


per tutti questi x si ha $|x| \geq a$.

NOTA: Sia $g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; consideriamo la funzione composta $|g(x)|: A \to \mathbb{R}$. Si ha

$$|g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{se } g(x) < 0 \end{cases}$$

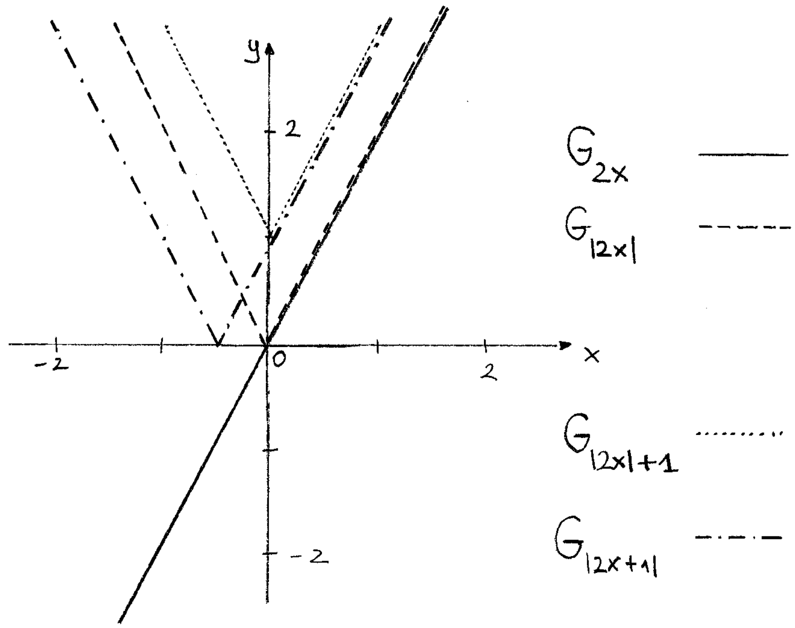
Graficamente si ottiene immediatamente dal grafico di g il grafico della funzione $|g|$:



Esercizio 2. Disegnate le seguenti funzioni (nello stesso sistema di riferimento): (definite su $\mathbb{R}$)

$f(x) = 2x$ $\quad |2x| \quad |2x|+1 \quad |2x+1|$

Svolgimento:



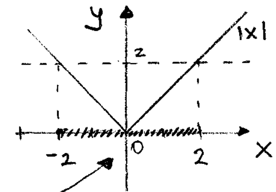
Esercizio 3. Risolvete le seguenti disequazioni:

(i) $|x| \leq 2$ (ii) $|x| > 3$ (iii) $|x+1| < 2$

(iv) $|2x-3| \geq 1$ (v) $|2x-3| \geq -1$.

Svolgimento:

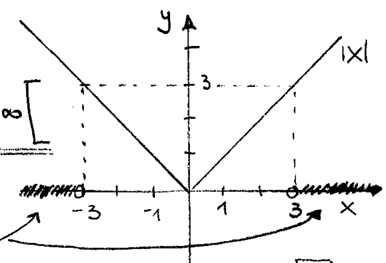
(i) $|x| \leq 2 \iff \underline{\underline{x \in [-2,2]}}$



□

(ii) $|x| > 3 \iff x < -3$ o $x > 3$

$\iff \underline{\underline{x \in \left]-\infty,-3\right[\cup \left]3,+\infty\right[}}$



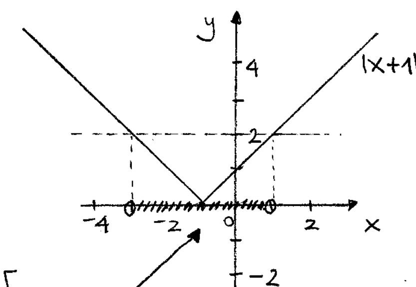
□

(iii) $|\underbrace{x+1}_{⌂}| < 2 \iff -2 < \underbrace{x+1}_{⌂} < 2$

$\iff -2-1 < x < 2-1$

$\iff -3 < x < 1$

ossia $\underline{\underline{x \in \left]-3,1\right[}}$



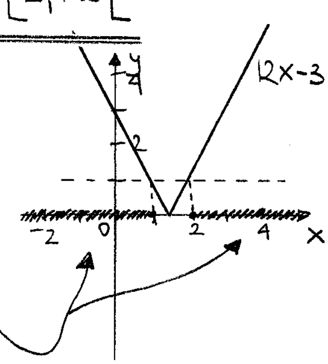
□

(iv) $|\underbrace{2x-3}_{\heartsuit}| \geq 1 \iff (\underbrace{2x-3}_{\heartsuit} \geq 1)$ o $(\underbrace{2x-3}_{\heartsuit} \leq -1)$

$\iff (2x \geq 4)$ o $(2x \leq 2)$

$\iff (x \geq 2)$ o $(x \leq 1)$

ossia $\underline{\underline{x \in \left]-\infty,1\right] \cup \left[2,+\infty\right[}}$



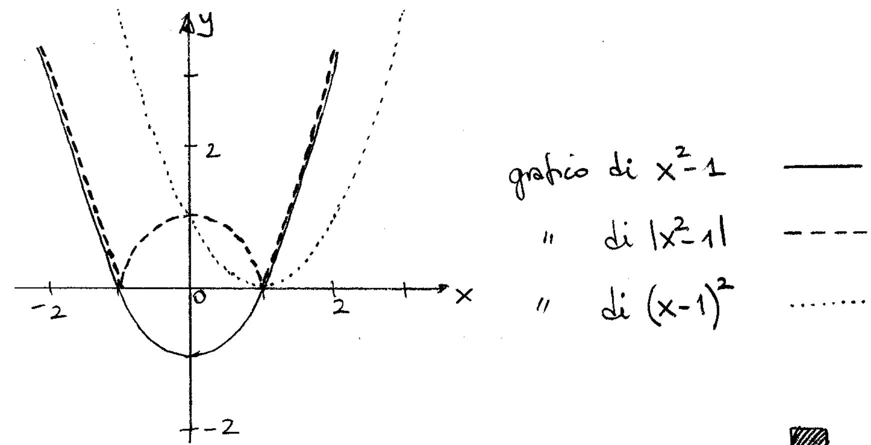
(v) $|2x-3| \geq -1$ $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}}}$ (poiché $\forall x \in \mathbb{R}$ $|2x-3| \geq 0$)

■

Esercizio 4. Disegnate (nello stesso sistema di riferimento) le seguenti funzioni (definite su $\mathbb{R}$):

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad |x^2 - 1| \qquad (x-1)^2 .$$

Svolgimento:



Esercizio 5. Risolvete la seguente disequazione:

$$2|x| + x^2 \geq 3 .$$

Svolgimento: La diseq. data si riduce a risolvere i due sistemi

$$\text{I}\ \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x + x^2 \geq 3 \end{cases} \qquad \text{II}\ \begin{cases} x < 0 \\ -2x + x^2 \geq 3 \end{cases},$$ ossia

$$\text{I}\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \qquad \text{II}\ \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0 \end{cases}.$$

Poichè $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ e $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$ abbiamo che

$$\text{I} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -3 \ \text{ o } \ x \geq 1 \end{cases} \qquad \text{II} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \leq -1 \ \text{ o } \ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{I} \Leftrightarrow \{x \geq 1\} \qquad \text{II} \Leftrightarrow \{x \leq -1\}.$$

Unendo queste due insiemi di soluzioni abbiamo che

$2|x| + x^2 \geq 3$ se e solo se $x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$.

■

Esercizio 6.

(i) Determinate gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni (conoscendo gli insiemi di definizione e le immagini delle funzioni elementari):

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1} \; ; \qquad \frac{1}{(x-1)^2} \; ; \qquad \frac{1}{|x|+1} \; ; \qquad \frac{1}{|x|-1} \, .$$

(ii) Rappresentate graficamente, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni

$$\sqrt{x} + 1 \; ; \qquad \frac{1}{(x-1)^4} \; ; \qquad \sqrt[3]{x+1} \; ; \qquad \sqrt{|x|}$$

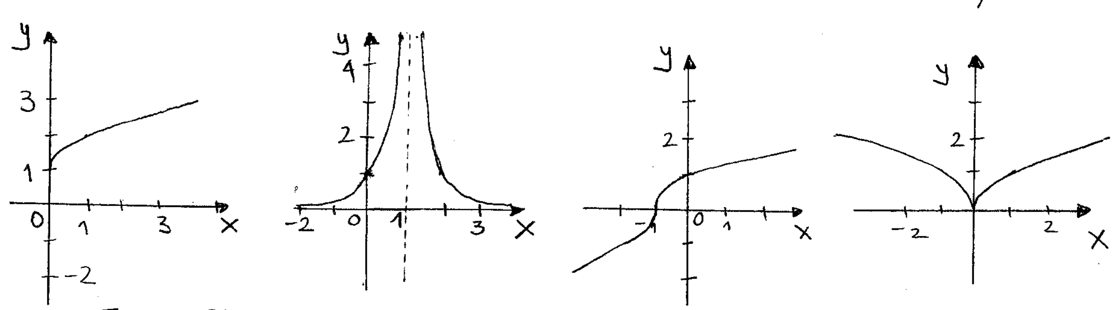
(i) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ $\qquad \underline{\underline{\mathbb{R}}}$ $\qquad$ (poiché $\sqrt[3]{x}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$)

$f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ $\qquad \underline{\underline{\mathbb{R} \setminus \{1\}}}$ $\qquad$ (poiché $\dfrac{1}{x}$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$f(x) = \dfrac{1}{|x|+1}$ $\qquad \mathbb{R}$ $\qquad$ (poiché $|x|$ è definita su $\mathbb{R}$ e $|x| \geq 0$ e quindi $|x|+1 \neq 0$)

$f(x) = \dfrac{1}{|x|-1}$ $\qquad \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ $\qquad$ (poiché $|x| - 1 = 0 \iff |x| = 1 \iff x = -1$ o $x = 1$). □

(ii)



$\underline{\underline{x \in \left[0, +\infty\right[}}$ $\qquad \underline{\underline{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}}}$ $\qquad \underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}$ $\qquad \underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}$

■