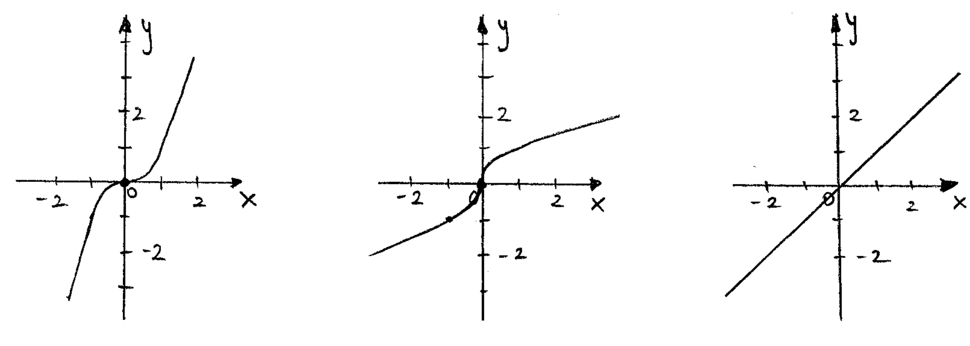
Commenti alla lezione del 30/11/2005 (18ª lezione Corso)

Riferimento bibliografico : [2] Cap.4 Sez.4.1 (pag. 137 , Def. , Prop. 4.1
pag.138 : esempi e definizione).
Sez.4.2 (pag.139 : Prop. 4.2
Corollario 4.3).

Derivate

Affrontiamo ora lo studio del comportamento locale (cioè nell'intorno di un punto assegnato) delle funzioni di una variabile reale.

Se una funzione f è continua in un punto x_0 e si ha $f(x_0)=y_0$, la sola conoscenza del valore y_0 rende ovviamente possibile un'ampia varietà di comportamenti della funzione f nelle vicinanze del punto x_0 ; ad esempio, la condizione $f(0)=0$ non identifica il comportamento di f fra i tre seguenti :



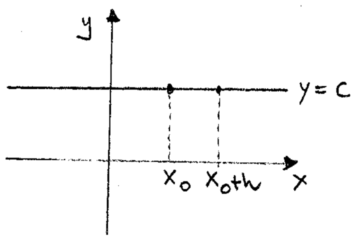
x^3 è "piatta" in 0 $\qquad$ $\sqrt[3]{x}$ è "ripida" $\qquad$ x è intermedia

Per uno studio più dettagliato (per un'analisi locale della f intorno a x_0), è necessario introdurre la nozione di derivata.

Studieremo poi le regole di derivazione delle funzioni elementari ed i risultati più importanti riguardanti le funzioni derivabili. Infine applicheremo tali risultati allo studio qualitativo delle funzioni di una variabile reale.

Per capire come si comporta una funzione $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ in un intorno di un punto $x_0 \in]a,b[$, andiamo ad indagare come "varia la quota al variare del percorso".

<u>Es. 1.</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) =$ costante $= c$. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$ (qualsiasi),



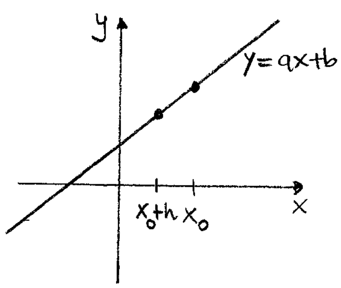
consideriamo $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$; per esempio $h > 0$. Allora abbiamo

$$\frac{\text{variazione di quota}}{\text{variazione di percorso}} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h - x_0} =$$

$$= \frac{c - c}{h} = 0 \quad \forall h > 0$$

(analog. per $h < 0$); quindi non abbiamo variazione di quota al variare del percorso (ovvio!) (la pendenza della retta tangente al grafico di f nel pt. $(x_0, f(x_0))$ — che coincide con il grafico! — è 0) $\square$

<u>Es. 2.</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = ax + b$ (funzione affine). Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$



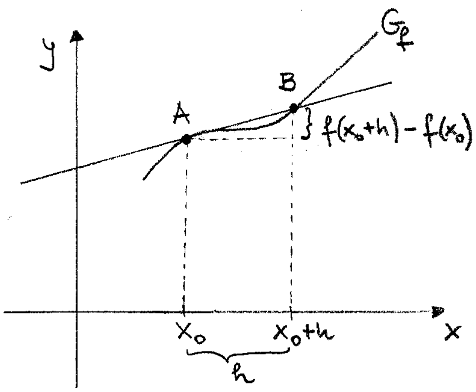
(qualsiasi), consideriamo $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$; per esempio $h < 0$ (per ricordarci che h può essere sia positivo che negativo; vogliamo studiare il comportamento di f sia in un intorno destro ($h > 0$) che in un intorno sinistro ($h < 0$) di x_0). Allora abbiamo

$$\frac{\text{variazione di quota}}{\text{variazione di percorso}} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h - x_0} = \frac{a(x_0+h) \cancel{+b} - ax_0 \cancel{-b}}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{ax_0} + ah - \cancel{ax_0}}{h} = a \quad \forall h < 0$$

(analog. per $h > 0$); quindi il rapporto $\frac{\text{variazione di quota}}{\text{variazione di percorso}}$ è costante e uguale ad a (la pendenza della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ — che coincide con il grafico di f — è a). □

<u>Es. 3</u> Sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in]a,b[$; sia $h \in \mathbb{R}$ $h \neq 0$ t.c. $x_0 + h \in]a,b[$. Supponiamo $h > 0$ (analog. per $h < 0$)



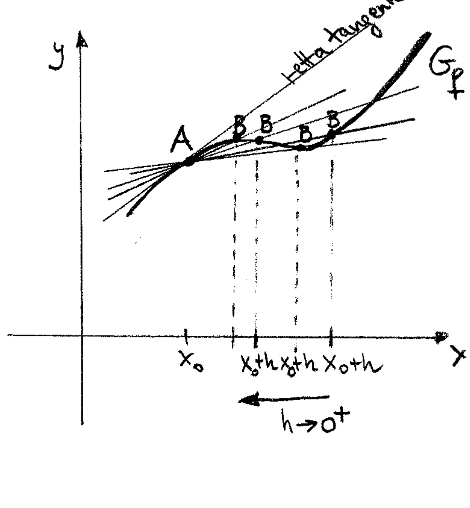
Si ha

$$\frac{\text{variazione di quota}}{\text{variazione di percorso}} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

= <u>rapporto incrementale di f nel pt. x_0</u>

= coefficiente angolare della retta passante per i punti $A = (x_0, f(x_0))$ e $B = (x_0+h, f(x_0+h))$.

Per descrivere il comportamento della f vicino a x_0 ovviamente siamo interessati ad h piccoli!! Quindi facciamo tendere $h \to 0$! (sia $h \to 0^+$ che $h \to 0^-$!).



Questo significa geometricamente che il punto B si muove verso il punto A (che rimane fisso) mantenendosi nel grafico di f.

La pendenza della retta AB

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

varia, la sua pendenza assestandosi su una posizione limite; essa prende il nome di derivata (prima) di f nel punto x_0, e la retta limite il nome di retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Abbiamo allora

eq. retta passante per A e B : $y = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}\cdot(x-x_0)$

$\downarrow$ $h \to 0$ (se $\exists$ finito il limite)

eq. retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0)) = A$: $\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0)}$ $\square$

Def. Sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$. f si dice <u>derivabile in</u> $x_0 \in]a,b[$ se <u>esiste finito</u>

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} ;$$

tale limite indichiamo con $f'(x_0)$ [$\stackrel{\circ}{=}$ derivata di f in x_0].
La retta di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

si chiama <u>retta tangente al grafico di f nel punto</u> $(x_0, f(x_0))$.

<u>Notazione</u>: oltre a $f'(x_0)$ si usano i simboli $\frac{df}{dx}(x_0)$, $Df(x_0)$, $\dot{f}(x_0)$.

NOTA: Se $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \begin{matrix} +\infty \\ (-\infty) \end{matrix}$, useremo ancora la notazione $f'(x_0) = \begin{matrix} +\infty \\ (-\infty) \end{matrix}$, cioè la derivata di f in x_0 è $\begin{matrix} +\infty \\ (-\infty) \end{matrix}$, ma la funzione non è derivabile in x_0 (vedi pt. b) pag. 205).

Def. Se $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ è derivabile in ogni punto x di $]a,b[$, allora è definita la funzione derivata

$$f' :]a,b[\to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f'(x).$$

Def. Se esistono, i limiti

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

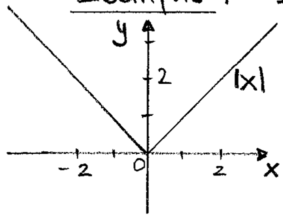
vengono chiamati rispettiv. derivata sinistra e derivata destra di f in x_0 e scriviamo rispettiv.

$$f'_-(x_0) \qquad f'_+(x_0).$$

Punti di non derivabilità di una funzione

a) Punto angoloso: f è continua in x_0, $\exists$ sono finiti $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$, ma $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$.

Esempio: $f(x) = |x|$ ha un punto angoloso in $x_0 = 0$. Infatti



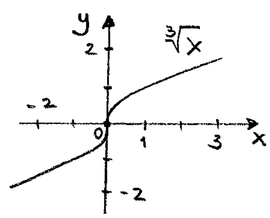
$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

"La funzione $|x|$ cambia troppo bruscamente vicino a 0 nel passaggio da $h<0$ ad $h>0$; quindi la funzione non è derivabile in $x=0$." □

b) **Punto a tangente verticale**: f è continua in x_0, e $f'(x_0) = \begin{matrix} +\infty \\ (-\infty) \end{matrix}$.

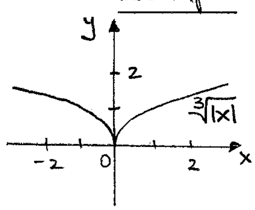
Esempio: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ha un punto a tangente verticale in $x_0 = 0$.



Infatti $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = +\infty$. □

c) **Cuspide**: f è continua in x_0, e $f'_-(x_0) = \begin{matrix} -\infty \\ (+\infty) \end{matrix}$, $f'_+(x_0) = \begin{matrix} +\infty \\ (-\infty) \end{matrix}$

Esempio: $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$ ha una cuspide in $x_0 = 0$.



Infatti

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{|h|}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\sqrt[3]{h}}{h} = -\infty,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{|h|}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = +\infty.$$ ■

Prop. Se f è derivabile in $x_0 \in]a,b[$, allora f è continua in x_0

Nota: il viceversa non è vero; vedi gli esempi sopra.

Derivate di funzioni elementari

Raccogliamo nel seguito le derivate delle funzioni elementari più comunemente usate riportando il loro dominio naturale:

	$f(x)$		$f'(x)$		
	costante	$(\mathbb{R})$	0	$(\mathbb{R})$	
	x	$(\mathbb{R})$	1	$(\mathbb{R})$	
$n\in\mathbb{N}$	x^n	$(\mathbb{R})$	nx^{n-1}	$(\mathbb{R})$	
$n\in\mathbb{N}$	$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$(\mathbb{R}\setminus\{0\})$	
$\alpha\in\mathbb{R}$	x^α	$(x>0)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$(x>0)$	
$a>0$	a^x	$(\mathbb{R})$	$a^x\log a$	$(\mathbb{R})$	caso speciale: $(e^x)'=e^x$
$a>0$, $a\neq 1$	$\log_a x$	$(x>0)$	$\frac{1}{x\log a}$	$(x>0)$	caso speciale: $(\log x)'=\frac{1}{x}$

Proviamo alcuni di questi risultati:

i) $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Infatti, sia $x\in\mathbb{R}$ qualsiasi. Allora, $\forall h\neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{x+h-x}{h}=1$$

Quindi $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=1$. $\square$

ii) $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Infatti, sia $x\in\mathbb{R}$ qualsiasi. Allora, $\forall h\neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}$$

$$= 2xh + h^2 .$$

Quindi $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x.$ $\square$

iii) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Infatti, sia $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Allora, $\forall h \neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x(e^h-1)}{h} .$$

Ricordando il limite notevole $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$, si

ottiene

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x.$$ $\blacksquare$

NOTA: Possiamo allora dire che per $f(x) = x^3$ abbiamo $f'(x) = 3x^2$ e dunque $f'(0) = 0$; quindi la retta tangente al grafico di f in $(0,0)$ è $y = 0$. Per la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ si ha $f'(0) = +\infty$ (vedi b) a pag. 205) (ossia la retta tangente al grafico di f in $(0,0)$ coincide con la retta $x=0$), e per la funzione $f(x) = x$ si ha $f'(0) = 1$: dunque la derivata permette di distinguere i tre comportamenti segnalati nell'introduzione alla derivata a pag. 200.

Esercizio 1. Determinate l'equazione della retta tangente al grafico delle seguenti funzioni

i) $f(x) = e^x$ nel punto $(x_0, f(x_0)) = (0,1)$

ii) $g(x) = x^3$ nel punto $(x_0, g(x_0)) = (1,1)$

iii) $h(x) = \log x$ nel punto $(x_0, h(x_0)) = (e, 1)$

e rappresentatela graficamente insieme alla funzione.

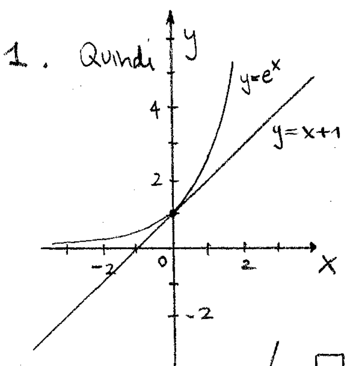
Svolgimento:

i) $f'(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$; $f'(0) = e^0 = 1$. Quindi

$y = f(0) + f'(0)(x-0)$, da cui

$y = 1 + 1 \cdot x$, ossia

$\Rightarrow \quad y = x+1$.

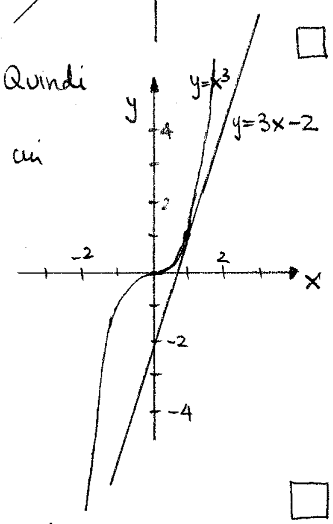


ii) $g'(x) = 3x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; $g'(1) = 3$. Quindi

$y = g(1) + g'(1)(x-1)$, da cui

$y = 1 + 3(x-1)$, ossia

$\Rightarrow \quad y = 3x - 2$.

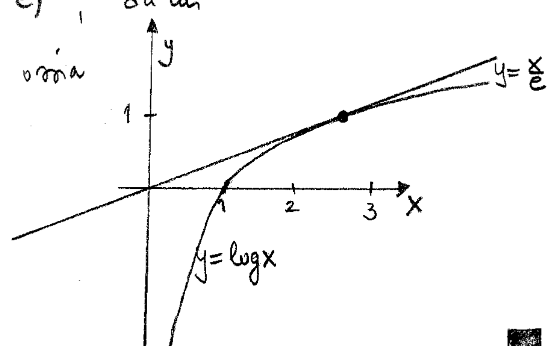


iii) $h'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$; $h'(e) = \frac{1}{e}$. Quindi

$y = h(e) + h'(e)(x-e)$, da cui

$y = 1 + \frac{1}{e}(x-e)$ ossia

$\Rightarrow \quad y = \frac{x}{e}$.



Regole di calcolo differenziale

Teorema (algebra delle derivate): Siano $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabili in $]a,b[$. Allora $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g $(g \neq 0)$ sono derivabili in $]a,b[$ e valgono le seguenti formule:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg' \quad ; \text{ in particolare } (kf') = kf' \ \forall \text{costante } k \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{in ogni punto in cui } g \neq 0.$$

Esercizio 2. Calcolate le seguenti derivate (dove esistono):

i) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)' = (x^2)' + (x^{-1})' = 2x - x^{-2} = 2x - \frac{1}{x^2}$. □

ii) $(e^x + x^3)' = (e^x)' + (x^3)' = e^x + 3x^2$. □

iii) $(\log x + x^{\frac{1}{2}})' = (\log x)' + (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$. □

iv) $(e^x x^3)' = (e^x)' x^3 + e^x (x^3)' = e^x x^3 + 3x^2 e^x$
$= e^x x^2 (x + 3)$ □

v) $\left(\frac{x^3}{e^x}\right)' = \frac{(x^3)' e^x - x^3 (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{3x^2 \cancel{e^x} - x^3 \cancel{e^x}}{(e^x)^{\cancel{2}}} =$
$= \frac{3x^2 - x^3}{e^x}$. □

vi) $\left[\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \log x\right]' = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)' \log x + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)(\log x)' =$
$= \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) \log x + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}$. □

vii) $\left(\frac{\log x}{e^x + 1}\right)' = \frac{(\log x)'(e^x + 1) - (\log x)(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = \frac{\frac{1}{x}(e^x + 1) - (\log x) e^x}{(e^x + 1)^2}$. ■