Commenti alla lezione del 5/12/2005 (19ª lezione Corso)

Riferimento bibliografico: [2] Cap. 4 Sez. 4.2 (Prop. 4.4);

Sez. 4.4 (Prop. 4.6; Def. pag. 151
Prop. 4.7, 4.9
Teor. di Lagrange pag. 154
Prop. 4.10; Prop. 4.11
Prop. 4.12; Coroll. 4.13)

Teorema (derivata della funzione composta): se f è derivabile in $x \in]a,b[$ e g è derivabile in $y = f(x)$, allora

i) $g \circ f$ è derivabile in x e vale

ii) $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Esempi:

ⓘ $(e^{3x})' = e^{3x} \cdot 3$: infatti $e^{3x} = (g \circ f)(x)$ con

$f(x) = 3x \qquad g(y) = e^{y}$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} e^{3x}$$

ora $g'(y) = e^{y} \qquad f'(x) = 3$

quindi $g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{3x} \cdot 3$. $\square$

ⓘⓘ $(e^{x^3})' = e^{x^3} \cdot 3x^2$: infatti $e^{x^3} = (g \circ f)(x)$ con

$f(x) = x^3 \qquad g(y) = e^{y}$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} e^{x^3}$$

ora

$g'(y) = e^{y} \qquad f'(x) = 3x^2$

quindi

$g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2$. $\square$

(iii) $\left[(1+x^2)^3\right]' = 3(1+x^2)^2 \cdot 2x$: infatti $(1+x^2)^3 = (g \circ f)(x)$

con $f(x) = (1+x^2)$ $\quad g(y) = y^3$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} (f(x))^3$$

ora $g'(y) = 3y^2 \quad f'(x) = 2x$

quindi

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 3(1+x^2)^2 \cdot 2x.$$

$\square$

(iv) $\left[\log(1+2x)\right]' = \dfrac{1}{1+2x} \cdot 2$

$= \dfrac{2}{1+2x}$. : infatti $\log(1+2x) = (g \circ f)(x)$

con $f(x) = 1+2x \quad g(y) = \log y$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} \log(1+2x)$$

Ora

$$g'(y) = \frac{1}{y} \quad f'(x) = 2$$

quindi

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{1+2x} \cdot 2$$

$\square$

(v) $\left[\log(e^x + x^2)\right]' = \dfrac{1}{e^x + x^2} \cdot (e^x + 2x)$

$= \dfrac{e^x + 2x}{e^x + x^2}$. : infatti $\log(e^x + x^2) = (g \circ f)(x)$

con $f(x) = e^x + x^2 \quad g(y) = \log y$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} \log(e^x + x^2)$$

Ora

$$g'(y) = \frac{1}{y} \quad f'(x) = e^x + 2x$$

quindi

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{e^x + x^2} \cdot (e^x + 2x) \quad \square$$

(vi) $$\left(x^2\log x^2 + e^{3x+x^2}x\right)' = \left(x^2\log x^2\right)' + \left(e^{3x+x^2}\cdot x\right)' =$$

$$= (x^2)'\log x^2 + x^2(\log x^2)' + (e^{3x+x^2})'\cdot x + e^{3x+x^2}\cdot(x)' =$$

$$= 2x\log x^2 + \cancel{x^2}\cdot\frac{1}{\cancel{x^2}}\cdot 2x + e^{3x+x^2}(3+2x)\,x + e^{3x+x^2}$$

$$= 2x\left[\log x^2 + 1\right] + e^{3x+x^2}\left[1+3x+2x^2\right].$$

■

Massimi e/o minimi locali (o relativi). Punti stazionari.

Def. (massimo locale): Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$; M è massimo locale per f e x_0 è punto di massimo locale se $\exists$ un intervallo $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ t.c.

$$f(x) \leq f(x_0) = M \qquad \forall x\in\,]x_0-\delta, x_0+\delta[\,\cap[a,b].$$

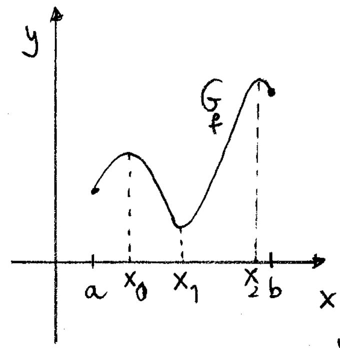
Analogamente, m è minimo locale per f e x_0 è pt. di minimo locale se $\exists$ un intervallo $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ t.c.

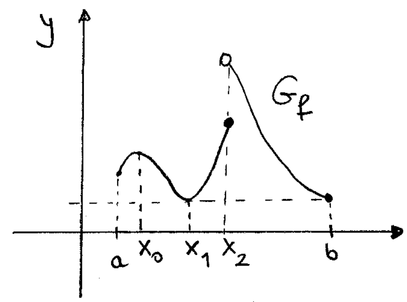
$$f(x) \geq f(x_0) = m \qquad \forall x\in\,]x_0-\delta, x_0+\delta[\,\cap[a,b].$$

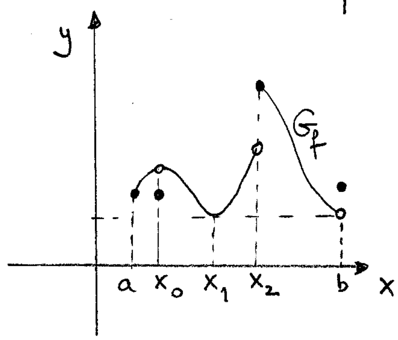
<u>OSS. 1</u> (i) Il minimo e il massimo (globale; cioè su tutto il dominio della funzione) — se esistono — sono <u>unici</u>; massimi e/o minimi locali possono essere più di uno.

(ii) Ogni massimo e/o minimo globale è anche locale.

<u>Esercizio 1.</u> Determinate i massimi e/o minimi locali (i pt. di massimo e/o di minimo locale) delle seguenti funzioni:

i) 

ii) 



<u>Svolgimento:</u>

i) $f(a)$ minimo locale; $x = a$ pt. di minimo loc.;

$f(x_0)$ massimo locale; $x = x_0$ pt. di massimo loc.;

$f(x_1)$ minimo locale e minimo (globale $= \min\limits_{[a,b]} f$); $x = x_1$ pt. di minimo (loc.);

$f(x_2)$ massimo locale e massimo (globale $= \max\limits_{[a,b]} f$); $x = x_2$ pt. di massimo (loc.)

$f(b)$ minimo locale; $x = b$ pt. di minimo locale.

$\square$

ii) $f(a)$ minimo locale ; $x=a$ pt. di minimo locale ;

$f(x_0)$ massimo locale ; $x=x_0$ pt. di massimo locale ;

$f(x_1)$ minimo locale e minimo (globale) ; $x=x_1$ pt. di minimo (loc.) ;

$f(b)$ minimo locale e minimo (globale) ; $x=b$ pt. di minimo (loc.). □

iii) $f(a)$ minimo locale ; $x=a$ pt. di minimo locale ;

$f(x_0)$ minimo locale ; $x=x_0$ pt. di minimo locale ;

$f(x_1)$ minimo locale e minimo (globale) ; $x=x_1$ pt. di minimo (loc.) ;

$f(x_2)$ massimo locale e massimo (globale) ;

$x=x_2$ pt. di massimo (loc.). ■

<u>OSS. 2.</u> Es. 1 ii) mostra che in un pt. di massimo (o minimo ; locale o globale) f può non essere derivabile ed essere perfino discontinua !
Se però $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è derivabile in un pt. $x_0\in\,]a,b[$ che sia di max. o min. locale, allora $f'(x_0)=0$, ossia la tangente al grafico in $(x_0,f(x_0))$ è orizzontale ed uguale a $y=f(x_0)$.

Precisamente abbiamo il

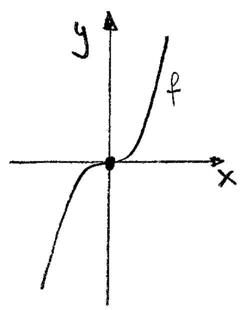
<u>Teorema (di Fermat)</u> : Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile $\forall\, x\in\,]a,b[$.
Se $x_0\in\,]a,b[$ è un pt. di massimo (o di minimo) locale, allora

$$f'(x_0)=0.$$

<u>Def.</u> Se $x\in\,]a,b[$ tale che $f'(x)=0$, allora x si chiama <u>pt. critico</u> (o <u>stazionario</u>) per f.

Il teorema precedente ci dice allora che cond. necessaria affinché un pt. $x_0 \in]a,b[$ sia un pt. di massimo (o di minimo) locale per una funzione derivabile è che x_0 sia un pt. critico per f.

La condizione $f'(x_0)=0$ non è però sufficiente affinché x_0 sia pt. di massimo (o di minimo) locale per f.

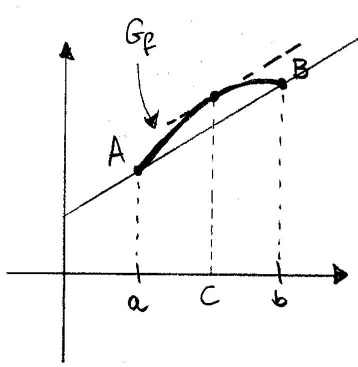


<u>Esempio</u>: $f(x) = x^3$; allora $f'(x) = 3x^2$. Si ha $f'(x) = 0 \iff x=0$. Quindi $x=0$ è pt. critico per f, ma $x=0$ non è un pt. di massimo (o di minimo) locale per f !

$\blacksquare$

Vediamo di ottenere un criterio per la ricerca dei pt. di massimo o di minimo locale (vedi corollario 3).

> <u>Teorema del valor medio (di Lagrange)</u>: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, derivabile in $]a,b[$. Allora $\exists\, c \in]a,b[$ t.c.
>
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$



pendenza della retta passante per i pt. $A=(a,f(a))$ e $B=(b,f(b))$

pendenza della retta tg. al grafico di f nel pt. $(c,f(c))$

Usando questo teorema si ottengono vari corollari molto importanti nel seguito.

Corollario 1. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, derivabile in $]a,b[$ e t.c. $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a,b[$.
Allora $f(x) =$ costante .

Corollario 2 (test di monotonia): Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabile. Allora

(i) f debolmente crescente $\Longleftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$
f debolmente decrescente $\Longleftrightarrow$ $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, derivabile in $]a,b[$. Allora

(ii) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]a,b[\quad \Rightarrow \quad f$ è crescente in $[a,b]$
$f'(x) < 0 \quad \forall x \in]a,b[\quad \Rightarrow \quad f$ è decrescente in $[a,b]$.

NOTA: in (ii) non vale la freccia $\Leftarrow$.
Infatti $f(x) = x^3$ è crescente in $\mathbb{R}$, ma $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ su $\mathbb{R}$!!

Corollario 3. Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabile e sia $x_0 \in]a,b[$ t.c. $f'(x_0) = 0$. Allora:

(i) se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0[$ ed $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]x_0, x_0+\delta[$, allora x_0 è punto di minimo locale (stretto) per f;

(ii) se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0[$ ed $f'(x) < 0 \quad \forall x \in]x_0, x_0+\delta[$, allora x_0 è punto di massimo locale (stretto) per f;

(iii) se $f'(x)$ non cambia segno in un intorno di x_0, allora f è monotona in un intorno di x_0 e quindi x_0 non è né di massimo né di min. loc. (stretto).

Esercizio 2 : Tracciate un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 \quad \text{su } \mathbb{R}.$$

Determinate massimo e minimo di f su $[-1,2]$ (su $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$)

Svolgimento: • f è continua su $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\quad \underbrace{x^3}_{\downarrow -\infty}\Big(2 - \underbrace{\tfrac{3}{x}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\tfrac{1}{x^3}}_{\downarrow 0}\Big) \longrightarrow -\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

• $\text{dom} f' = \mathbb{R}$ e $f'(x) = 6x^2 - 6x$.

$f'(x) = 0 \iff 6x(x-1) = 0 \iff x=0$, $x=1$.

Quindi i pt. critici sono $x=0$, $x=1$.

• Per determinare la natura dei pt. critici studiamo il segno di f':

$$\begin{array}{ccccccc} + & + & \bullet & - & \bullet & + & + & + & f' \\ -1 & & 0 & & 1 & 2 & 3 & & \\ & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & & f \end{array}$$

Quindi $x=0$ è pt. di max loc. (stretto) e $f(0) = 1$

$x=1$ è pt. di min loc. (stretto) e $f(1) = 0$

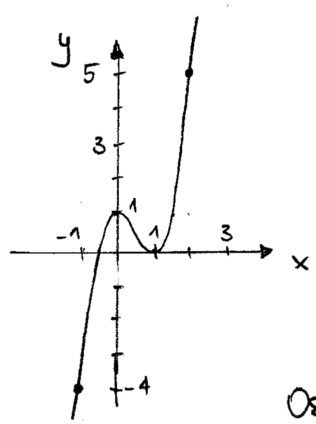


Grafico approssimativo di f. $\square$

Oss. che per Weierstrass $\exists$ sono max e min di f su $[-1,2]$:

Poichè $f(-1) = -4$

$f(2) = 5$, — f negli estremi di $[-1,2]$

mentre $f(0) = 1$, $f(1) = 0$,

segue che $\min_{[-1,2]} f = -4$ $\quad x=-1$ pt. di min. di f su $[-1,2]$

$\max_{[-1,2]} f = 5$ $\quad x = 2$ pt. di max. di f su $[-1,2]$

$\square$

Consideriamo infine f su $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Poichè $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$, otteniamo

$\min_{[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]} f = 0$ $\quad x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$ pt. di min. di f su $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

$\max_{[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]} f = 1$ $\quad x = 0$, $x = \frac{3}{2}$ pt. di max. di f su $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

$\blacksquare$

<u>Esercizio 3.</u> Tracciate un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = xe^{-x} \qquad \left(= \frac{x}{e^x}\right) \quad \text{su } \mathbb{R}.$$

Determinate massimo e minimo di f su $[0,2]$.

<u>Svolgimento</u>: f continua su tutto $\mathbb{R}$

- segno di f : $f(x) > 0$ se $x > 0$

  $f(0) = 0$

  $f(x) < 0$ se $x < 0$.

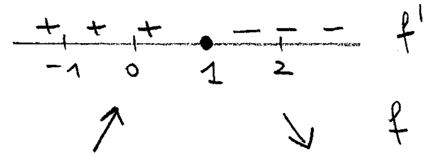
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

- $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$.

  Abbiamo $f'(x) = 0 \iff x = 1$ (ricordare $e^{-x} > 0$)

  Quindi il pt. critico è $x = 1$.

- Per determinare la natura del pt. critico studiamo il segno di f':



$\Rightarrow$ $x = 1$ è pt. di max locale (stretto) per f.

Inoltre $f(1) = \frac{1}{e}$.

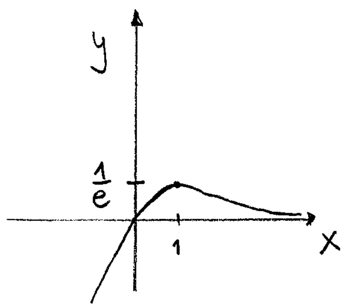


Grafico approssimativo di f $\square$

Oss. che per Weierstrass $\exists$ sono max e min di f su $[0,2]$.

Poichè $f(0) = 0$, $f(2) = \frac{2}{e^2}$ $f(1) = \frac{1}{e}$

f agli estremi di $[0,2]$ — f nel pt. critico interno di $[0,2]$

si ha

$$\min_{[0,2]} f = 0 \qquad x = 0 \text{ pt. di minimo di } f \text{ su } [0,2]$$

$$\max_{[0,2]} f = f(1) = \frac{1}{e} \qquad x = 1 \text{ pt. di massimo di } f \text{ su } [0,2].$$

■