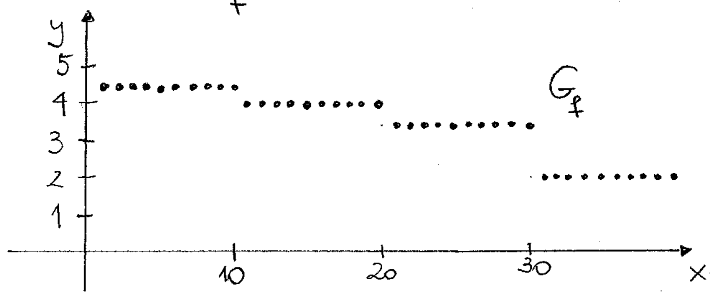
Commenti alla lezione del 18/10/05 (5ª lezione Corso)

Riferimento bibliografico [1] Cap. 1 Sez. 1.3 (immagine di un insieme tramite f pag. 20 - 21)

Cap. 4 (Grafici di funzioni reali ; varianti di un grafico : pag. 100 e pag. 101 fino alle fig. 4.9 e fig. 4.10)

Esempio (c) : sia $f: \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \{2, 3{,}5, 4, 4{,}5\}$ la funzione definita a pag. 69. Allora $G_f \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$



Def. Se $f: A \to B$ è una funzione, ed E un sottoinsieme di A (cioè $E \subseteq A$) si chiama <u>immagine di E tramite f</u> l'insieme (= sottoinsieme di B)

$$f(E) = \{b \in B : \exists a \in A : b = f(a)\}$$
$$= \{f(a) : a \in E\}$$ (insieme delle immagini dei punti di E)

Se $E = A$, allora $f(A)$ si dice brevemente <u>immagine di f</u>.

Graficamente :

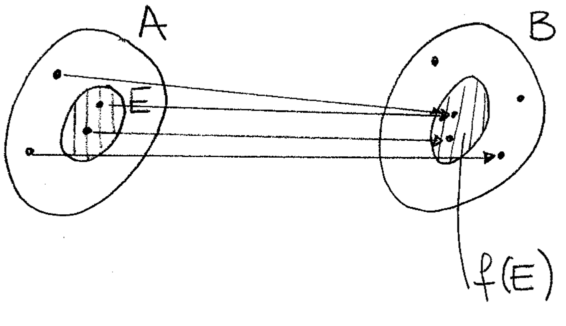


immagine di E tramite f.

Esercizio 1.

a) Sia f la funzione definita in Esempio (a), pag. 70.

Allora

$f(\{x_1, x_2\}) = \{y_1, y_3\}$;

$f(\{x_1, x_3\}) = \{y_1, y_4\}$;

$f(\{x_2\}) = \{y_3\}$; $\qquad f(A) = \{y_1, y_3, y_4\} \subset B.$ $\square$

b) Sia f la funzione definita in Esempio (b), pag. 70.

Allora

$f([0,1]) = [0, p]$; $\qquad f([1,3]) = [p, 3p]$;

$f([0,+\infty[) = [0,+\infty[$; $\qquad f(\{\frac{3}{2}\}) = \{\frac{3}{2}p\}$. $\square$

c) Sia f la funzione definita in Esempio (c), pag. 71.

Allora

$f(\{1, 2, 9\}) = \{4{,}5\}$; $\qquad f(\{2, 9, 25\}) = \{4{,}5\ ,\ 3{,}5\}$

$f(\{20, 45\}) = \{4, 2\}$; $\qquad f(\{39\}) = \{2\}$;

$f(\mathbb{N} \setminus \{0\}) = \{2,\ 3{,}5\ ,\ 4\ ,\ 4{,}5\}$. $\blacksquare$

<u>Def.</u> Se $f : A \to B \subseteq \mathbb{R}$ è una funzione, allora f si dice una <u>funzione reale</u> (o una funzione a valori reali).

Se $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ è una funzione, allora f si dice una <u>funzione reale di variabile reale</u> (in questo caso il grafico $G_f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

Esempi di funzioni reali di variabile reale: Es. (b) pag. 70, Es. (c) pag 71. $\blacksquare$

Esercizio 2: i) Dite se la scrittura $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $g(n)=n^2$ definisce una funzione.

ii) Determinate, se possibile, $g(2)$, $g(\frac{1}{2})$.

iii) Ha senso $g(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$?

iv) Determinate $g(\{3,4\})$.

Svolgimento:

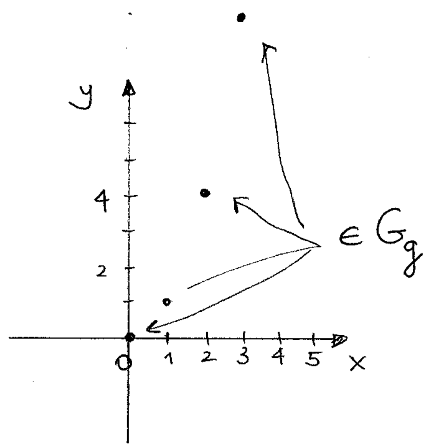
i) SI : è assegnato il dominio $(=\mathbb{N})$, il codominio $(=\mathbb{R})$, e la legge che ad ogni $n \in \operatorname{dom} g$ assegna un unico elemento $b \in \mathbb{R}$ t.c. $n^2 = g(n) = b$.

ii) $g(2)=4$; $g(\frac{1}{2})$ non è definito, poichè $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

iii) No, poichè $\frac{1}{2} \notin \operatorname{dom} g$, anche se $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

iv) $g(\{3,4\}) = \{9,16\}$. ■

Rappresentazione grafica di g



OSS. Sia $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x)=x^2$.

Allora $g(\mathbb{N}) = f(\mathbb{Z})$ (g nell'esercizio sopra), ma $g \neq f$ poichè $\operatorname{dom} f \neq \operatorname{dom} g$!!

Esercizio 3: i) Dite se la scrittura $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, data da

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

è una funzione.

ii) Dite se la scrittura $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ data da

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\le 0\\ 2 & \text{se } x>0\end{cases}$$

è una funzione.

iii) Rappresentatene nel piano cartesiano xy il grafico di f.

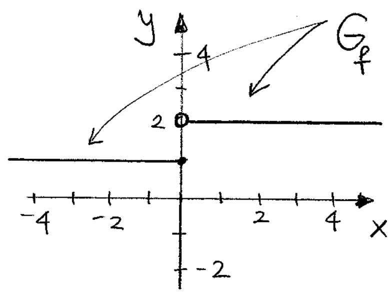
iv) Determinate $f(\mathbb{R})$.

Svolgimento:

i) g non è una funzione, poichè ad $x=0$ non corrisponde un solo valore in $\mathbb{R}$.

ii) f è una funzione (abbiamo $\text{dom} f=\mathbb{R}$, codominio $=\mathbb{R}$ ed inoltre ad ogni $x\in \text{dom} f$ corrisponde uno ed un solo valore in $\mathbb{R}$)

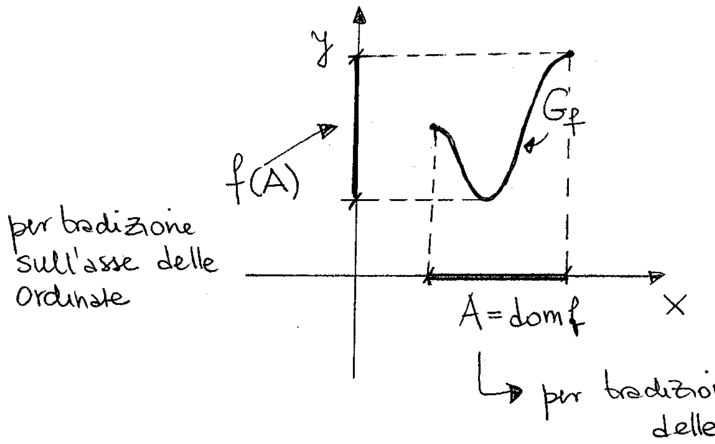
iii) $G_f \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$



iv) $f(\mathbb{R})=\{1,2\}$. ■

NOTA: Come abbiamo osservato, se $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, allora il suo grafico può essere "disegnato" sul piano cartesiano xy; le proprietà di una funzione si riflettono su quelle del grafico, e viceversa. Si possono leggere sul grafico:

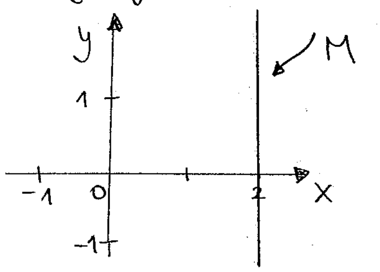
- La legge con cui opera la funzione;
- il dominio, che si ottiene proiettando il grafico sull'asse delle ascisse
- l'immagine, che è la proiezione del grafico sull'asse delle ordinate.



Grafico, dominio e immagine di una funzione reale a valori reali

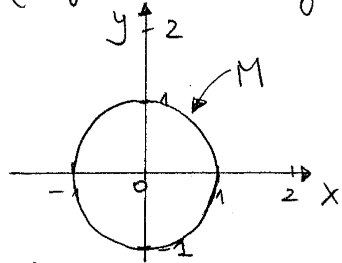
NOTA: Ogni sottoinsieme M di $\mathbb{R}^2$ è grafico di una funzione?
In generale questo non è vero.
Un criterio molto semplice per stabilire se M definisce una funzione reale di variabile reale è il seguente: "ogni retta parallela all'asse delle ordinate interseca M al più in un punto."

Esempio ⓐ: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\}$



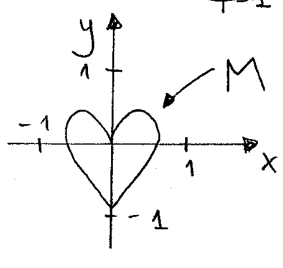
non è grafico di una funzione !!

ⓑ: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$



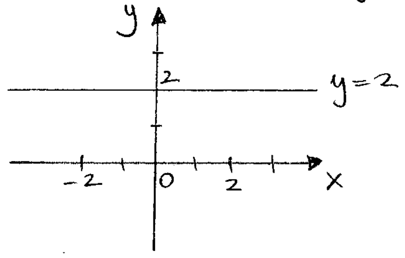
non è grafico di una funzione !!

ⓒ:



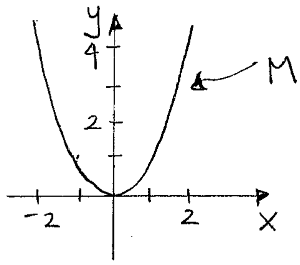
non è grafico di una funzione !!

(d) : $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 2\}$



$M = G_f$, dove
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione costante $f(x) = 2$.

(e) : $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2\}$



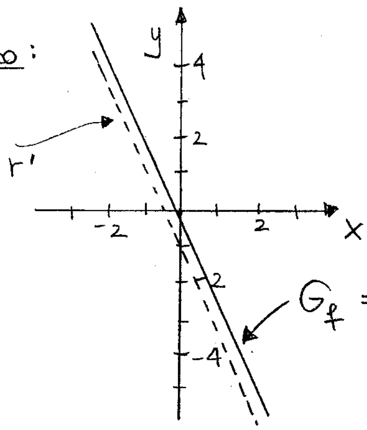
$M = G_f$, dove
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione $f(x) = x^2$. ■

Esercizio 4: Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -2x$.

i) Rappresentate nel piano cartesiano xy il grafico di f.
ii) Scrivete l'eq. della retta r che rappresenta il grafico di f.
iii) Scrivete l'eq. della retta r' parallela alla retta r e passante per il punto $(0,-1)$, e rappresentatela graficamente.
iv) r' coincide con il grafico di una funzione? Se sì, quale?
v) Scrivete l'eq. della retta r'' ortogonale alla retta r e passante per l'origine.
vi) r'' coincide con il grafico di una funzione? Se sì, quale?

Svolgimento:

i)



$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = f(x) = -2x\}$ □

ii) $r \;:\; y = -2x$.

iii) $r' \;:\; y = -2x - 1$.

iv) r' coincide con il grafico della funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -2x - 1$.

v) $r'' \;:\; y = \frac{1}{2} x$.

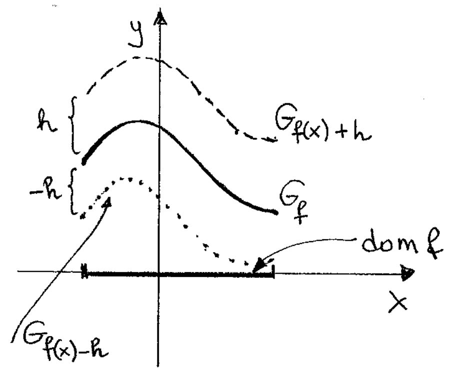
vi) r'' coincide con il grafico della funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{1}{2} x$.

Varianti di un grafico : dal grafico di $f(x)$ al grafico di ....

(A) **Traslazioni** : dato il grafico di una funzione f, ed un nr. reale $h > 0$, è facile disegnare i grafici delle funzioni

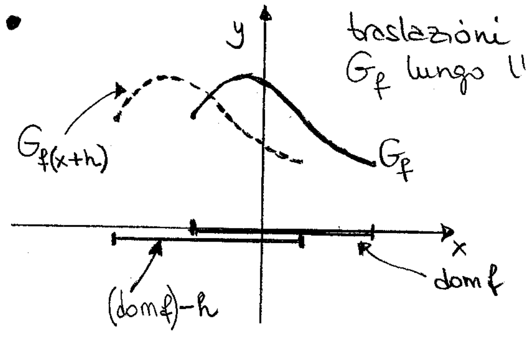
•	$\mathrm{dom} f \ni x \longmapsto f(x) \pm h$		(traslazioni lungo l'asse y)
••	$(\mathrm{dom} f) \mp h \ni x \longmapsto f(x \pm h)$		(traslazioni lungo l'asse x)

•



traslazioni del grafico G_f lungo l'asse y

••



traslazioni del grafico G_f lungo l'asse x