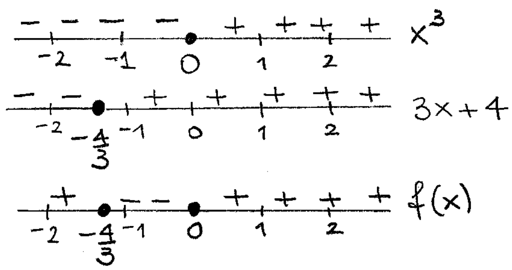
Commenti alla lezione del 7/12/2005 (21ª lezione Corso)

**Esercizio 1.** Studiate la funzione
$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 .$$

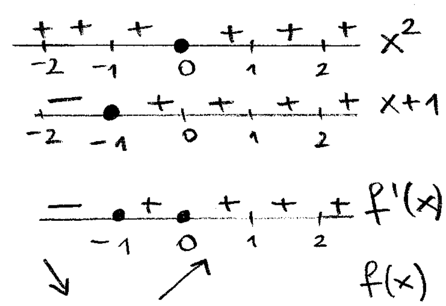
Svolgimento:

1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} = \left]-\infty, +\infty\right[$
2. $f(x) = x^3(3x+4)$



3. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ .
4. $f$ è continua in $\mathbb{R}$ essendo somma di funzioni continue
5. $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$ e

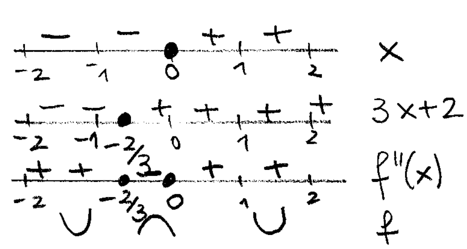
$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1)$$



$f'(x) = 0 \iff x = 0$, $x = -1$ .

$x=-1$ è pt. di minimo locale (stretto) di $f$; $f(-1) = -1$

6. $\operatorname{dom} f'' = \mathbb{R}$ $\quad f''(x) = 36x^2 + 24x$
$$= 12x(3x+2)$$



7.

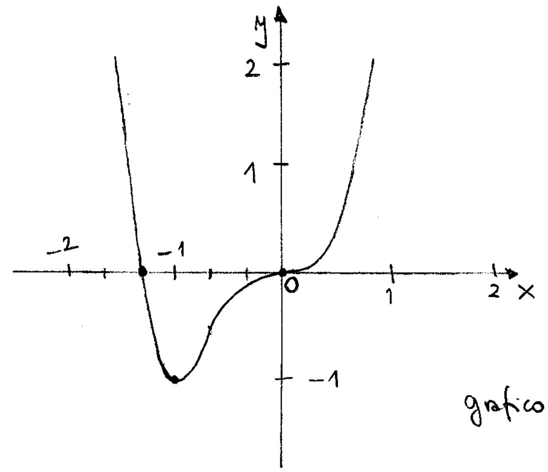



grafico approssimativo di f

---

**Esercizio 2.** Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{2x^2}{x+1}.$$

---

Svolgimento:

1. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (deve essere $x+1 \neq 0$).

2. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+1}$

| | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $+\ +$ | $+$ | $+$ | $\bullet$ | $+$ | $+\ +$ | $x^2$ |
| $-\ -$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+\ +$ | $x+1$ |
| $-\ -$ | $0$ | $+$ | $\bullet$ | $+$ | $+\ +$ | $f(x)$ |

3. $\operatorname{dom} f = \left]-\infty,-1\right[ \cup \left]-1,+\infty\right[$ ; valutiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty .$$

Abbiamo allora che $x=-1$ è un asintoto verticale.

Determiniamo anche l'asintoto obliquo di questa funzione (osserviamo che, per $x \to \underset{(-\infty)}{+\infty}$, $f(x)$ si comporta come $\dfrac{2x^2}{x} = 2x$

e quindi $f$ ha un asintoto obliquo). Calcoliamo

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} \frac{2x^2}{x^2+x} = 2 \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} \left[f(x)-2x\right] = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} \left[\frac{2x^2}{x+1}-2x\right] = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} \left(\frac{-2x}{x+1}\right) = -2; \end{cases}$$

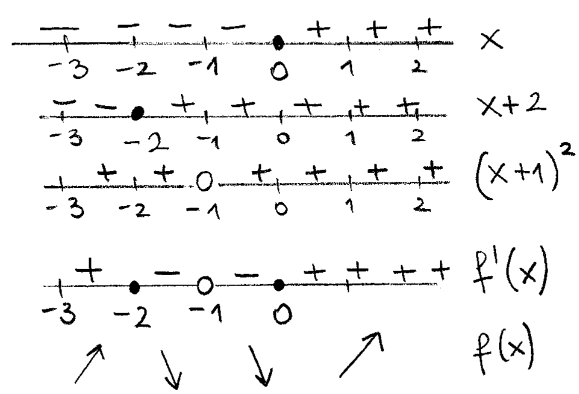
abbiamo dunque che $y = 2x-2$ è asintoto obliquo per $f$ per $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.

4. $f$ è continua in ogni punto $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (rapporto di funzioni continue).

5. $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $\quad f'(x) = \dfrac{4x(x+1)-2x^2}{(x+1)^2} =$

$$= \frac{2x^2+4x}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}$$

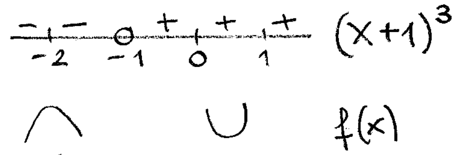
$x=0$, $x=-2$ sono i punti critici di $f$



Dal segno di $f'$ segue dunque che $x=-2$ è pt. di massimo locale (stretto) di $f$, e $f(-2) = -8$; inoltre $x=0$ è pt. di minimo locale (stretto) di $f$, e $f(0)=0$.

6. $\operatorname{dom} f'' = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $\quad f''(x) = \dfrac{(4x+4)(x+1)^{\cancel{2}} - (2x^2+4x)\,2\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}}$

$$= \frac{\cancel{4x^2}+\cancel{8x}+4-\cancel{4x^2}-\cancel{8x}}{(x+1)^3} = \frac{4}{(x+1)^3}$$




7.

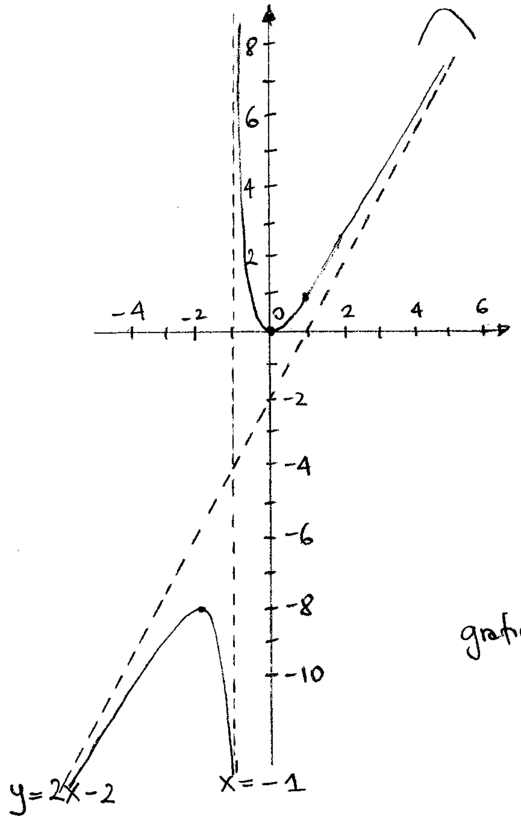



grafico approssimativo di f.

---

<u>Esercizio 3.</u> Tracciate un grafico approssimativo della seguente funzione

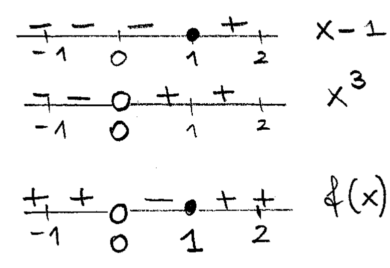
$$f(x) = \frac{x-1}{x^3} \quad .$$

---

<u>Svolgimento:</u>

1. $\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (deve essere $x \neq 0$).

2. studiamo il segno di f :



3. Abbiamo $\operatorname{dom} f = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ ; studiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 .$$

Quindi $x = 0$ è un asintoto verticale,

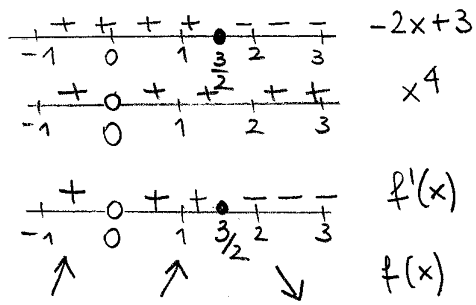
$y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ (per $x \to -\infty$).

4. $f$ è continua in ogni punto $x \in \operatorname{dom} f$ (rapporto di funzioni continue).

5. $\operatorname{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$f'(x) = \frac{x^{\cancel{3}} - (x-1)3\cancel{x^{2}}}{x^{\cancel{6}4}} = \frac{-2x+3}{x^4}$$

$f'(x) = 0 \iff x = \frac{3}{2}$ pt. critico.



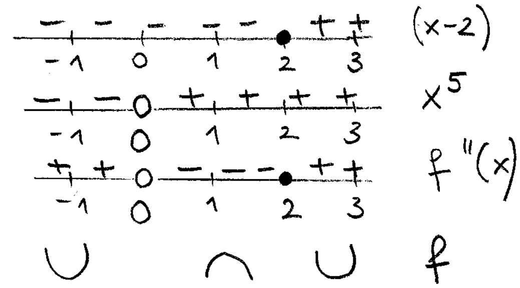
Risulta che $x = 3/2$ è pt. di massimo locale (stretto) di $f$.

Abbiamo $f(3/2) = \dfrac{1/2}{\frac{27}{8}} = \dfrac{4}{27}$

6. $\operatorname{dom} f'' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$f''(x) = \frac{-2x^{\cancel{4}} - (-2x+3)4\cancel{x^{3}}}{x^{\cancel{8}5}} = \frac{-2x+8x-12}{x^5}$$

$$= \frac{6x-12}{x^5} = \frac{6(x-2)}{x^5}$$



7.

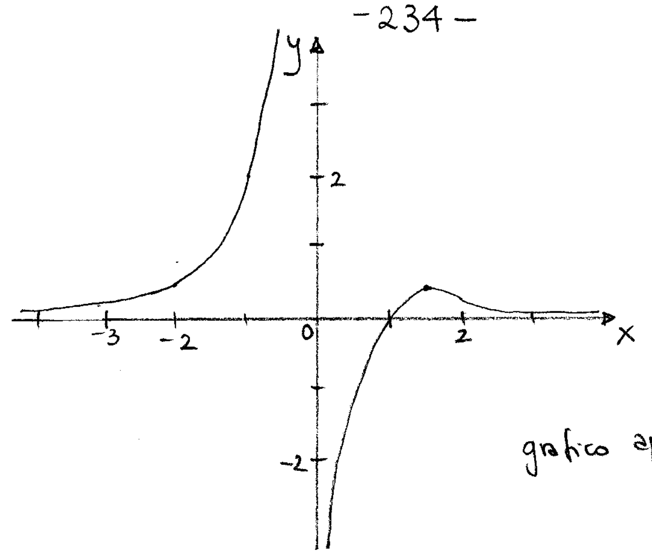



grafico approssimativo di $f$

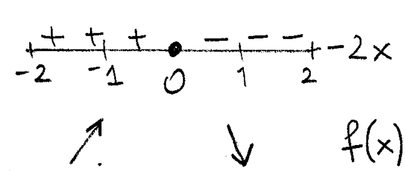
> **Esercizio 4.** Tracciare un grafico approssimativo della seguente funzione i) $f(x) = e^{-x^2}$ (funzione gaussiana)
>
> ii) $f(x) = -2e^{-(x-1)^2}$

Svolgimento: i)

1. $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$ ($f$ è pari)
2. $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$ è un asintoto orizzontale.
4. $f$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ essendo composizione di funzioni continue.
5. $\mathrm{dom}\, f' = \mathbb{R} \qquad f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)$

$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \quad \text{pt. critico per } f$$

Studiamo il segno di $f'$ : ricordiamo che $e^{-x^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.




Ne segue che $x = 0$ è pt. di massimo locale (stretto) per $f$ ; inoltre $f(0) = 1$.

6. $\mathrm{dom}\, f'' = \mathbb{R}$

$$f''(x) = e^{-x^2}(-2x)^2 - 2e^{-x^2}$$
$$= e^{-x^2}(4x^2 - 2) = \underbrace{2e^{-x^2}}_{>0}(2x^2 - 1)$$

$$\begin{array}{ccccccc} + + & \bullet & - & \bullet & + + + & & f'' \\ & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & \\ \cup & & \cap & & \cup & & f \end{array}$$

7.

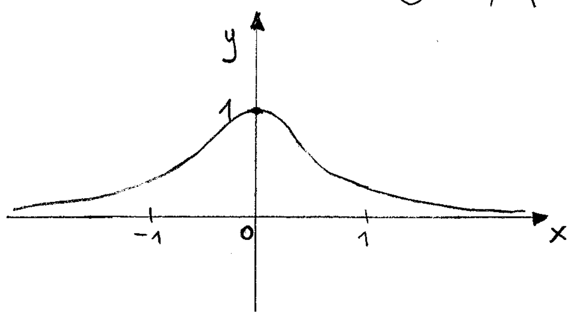



grafico approssimativo di $f(x) = e^{-x^2}$

ii)

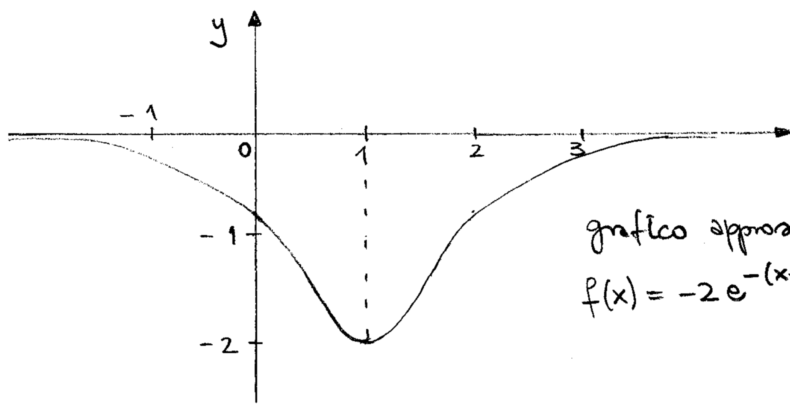



grafico approssimativo di $f(x) = -2e^{-(x-1)^2}$

**Esercizio 5.** Tracciate un grafico approssimativo della seguente funzione
$$f(x) = x^2(\log x - 1)$$

Svolgimento:

1. $\mathrm{dom}\, f = ]0, +\infty[$

2. segno di $f$

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & + & + & + & + & + & + & x^2 \\ 0 & 1 & & 2 & & 3 & 4 & \\ & - - & - & - - & \bullet & + & + & \log x - 1 \\ & 1 & & 2 & e & 3 & 4 & \\ 0 & - & - & - - & \bullet & + & + & f(x) \\ & 1 & & 2 & e & 3 & 4 & \end{array}$$

3. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$  **NOTA:** $\boxed{\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

4. $f$ è continua in tutti i pt. del suo dominio (prodotto di funz. continue).

5. $\mathrm{dom} f' = ]0,+\infty[$  $f'(x) = 2x(\log x - 1) + x^2\cdot\frac{1}{x}$

$= 2x\log x - 2x + x =$

$= x(2\log x - 1)$

$0$ : $+ \; + \; + \; +$ $\quad x$

$0$ : $- - -$ $\sqrt{e}$ $+ \; +$ $\quad 2\log x - 1$

$0$ : $- - -$ $\sqrt{e}$ $+ + +$ $\quad f'(x)$

$\searrow \qquad \nearrow \qquad f(x)$

$x = \sqrt{e}$ è un pt. critico per $f$

dal segno di $f'$ segue che $x = \sqrt{e}$ è pt. di minimo locale (stretto) per $f$; abbiamo

$$f(\sqrt{e}) = e(\log\sqrt{e} - 1) = e\left(\tfrac{1}{2}\log e - 1\right) = e\left(\tfrac{1}{2} - 1\right) = -\tfrac{e}{2}$$

6. $\mathrm{dom} f'' = ]0,+\infty[$  $f''(x) = 2\log x - 1 + x\cdot\frac{2}{x} = 2\log x + 1$

$0$ : $-$ $\frac{1}{\sqrt{e}}$ $+ + + +$ $\quad f''(x)$

$\frown \qquad \smile \qquad f(x)$

7.

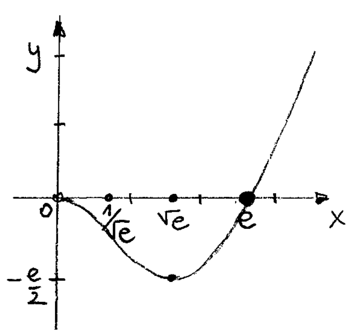


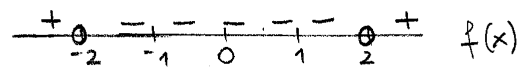

grafico approssimativo di $f$

**Esercizio 6.** Tracciate un grafico approssimativo della seguente funzione
$$f(x) = \frac{4}{x^2-4} .$$

Svolgimento:

1. $\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} = \,]-\infty, -2[\, \cup \,]-2, 2[\, \cup \,]2, +\infty[$. ($f$ è pari!)

2. segno di $f$



3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;

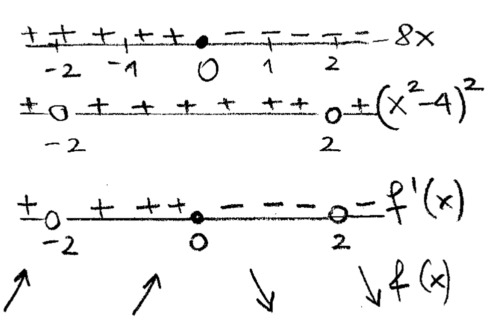
si ha che $x = -2$, $x = 2$ sono asintoti verticali;

$y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ (per $x \to -\infty$).

4. $f$ è continua in tutti i punti del dominio.

5. $\mathrm{dom} f' = \mathrm{dom} f$
$$f'(x) = \frac{-4 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$

$x = 0$ è pt. critico di $f$



dal segno di $f'$ segue che

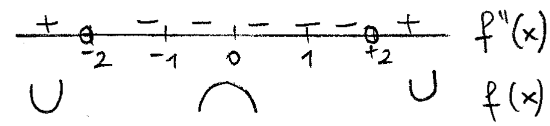
$x = 0$ è pt. di massimo locale (stretto) per $f$; inoltre $f(0) = -1$.

6. $\mathrm{dom}\, f'' = \mathrm{dom}\, f$ e si ha

$$f''(x) = \frac{-8(x^2-4)^{\cancel{2}} + 8x \cdot 2\cancel{(x^2-4)}\, 2x}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{-8x^2+32+32x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{24x^2+32}{(x^2-4)^3}$$

$$= \frac{8(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$




7.

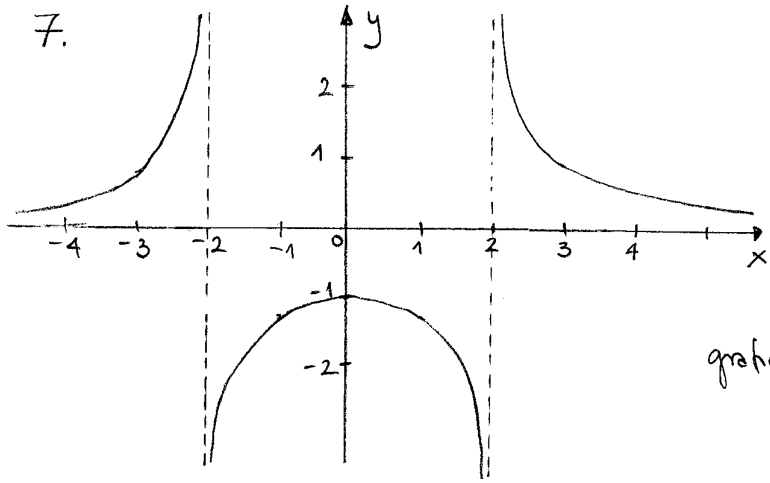


grafico approssimativo di $f$.

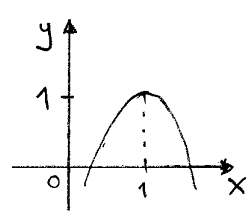
Esercizio 7. In ciascun caso seguente tracciate il grafico di una funzione avente tutte le proprietà richieste: $f$ derivabile e

i) $f(1)=1$, $f'(x)>0$ per $x<1$, $f'(x)<0$ per $x>1$.

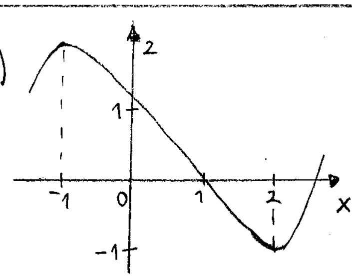
ii) $f(-1)=2$, $f(2)=-1$, $f'(x)>0$ per $x<-1$ o $x>2$, $f'(x)<0$ per $-1<x<2$;

iii) $f(-1)=1$, $f'(-1)=0$, $f'(x)<0$ per $x<-1$ o $-1<x<2$, $f'(x)>0$ per $x>2$.

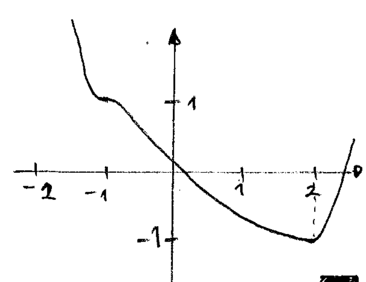
i)



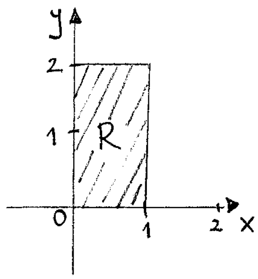
ii)



iii)

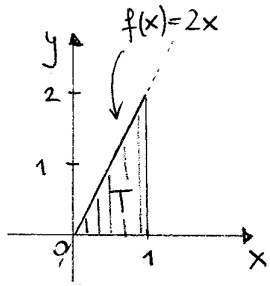


## Introduzione all' integrazione : casi elementari



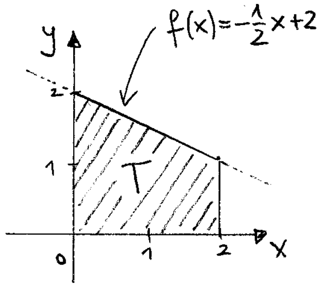

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ g(x) \le y \le f(x)\}$$
con $g(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 2$ $\forall x \in \mathbb{R}$;

area $(R) = 1 \cdot 2 = 2$. $\square$



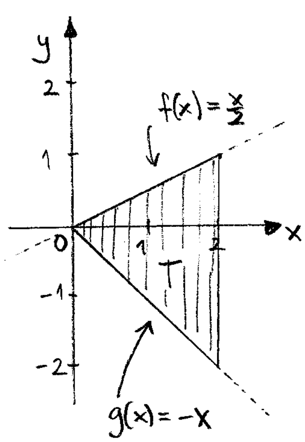

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2x\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ g(x) \le y \le f(x)\}$$
con $g(x) \equiv 0$, $f(x) = 2x$ $\forall x \in \mathbb{R}$;

area$(T) = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$. $\square$




$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le -\tfrac{1}{2}x+2\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ g(x) \le y \le f(x)\}$$
con $g(x) \equiv 0$, $f(x) = -\frac{1}{2}x+2$ $\forall x \in \mathbb{R}$;

area$(T) = \frac{2+1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = 3$. $\square$




$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ -x \le y \le \tfrac{x}{2}\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ g(x) \le y \le f(x)\}$$
con $g(x) = -x$, $f(x) = \frac{x}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$;

area $(T) = \frac{3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 3$. $\blacksquare$