Commenti alla lezione del 19/10/05 (6ª lezione Corso)

Riferimento bibliografico: [1] Cap. 4 pag. 101 - 102.

Cap. 1 Sez. 1.3 : Funz. iniettiva, suriettiva pag. 17 - 18.

(B) Dato il grafico di una funzione, ed un numero $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, è facile disegnare i grafici delle funzioni

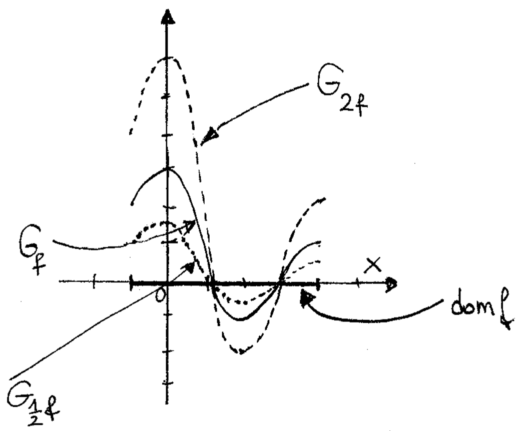
(a = 0 dà la funzione $af(x) \equiv 0$)

• $\mathrm{dom} f \ni x \longmapsto a f(x)$

•• $\frac{1}{a} \mathrm{dom} f \ni x \longmapsto f(ax)$

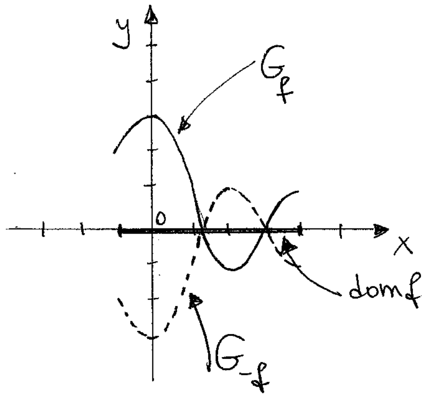
consideriamo solo il caso $a > 0$

• Cominciamo con $a > 0$: allora i valori di $af(x)$, che sono quelli di f moltiplicati per a, si ottengono cambiando scala sull'asse verticale; il grafico di f viene "gonfiato" se $a > 1$, "appiattito" se $0 < a < 1$.

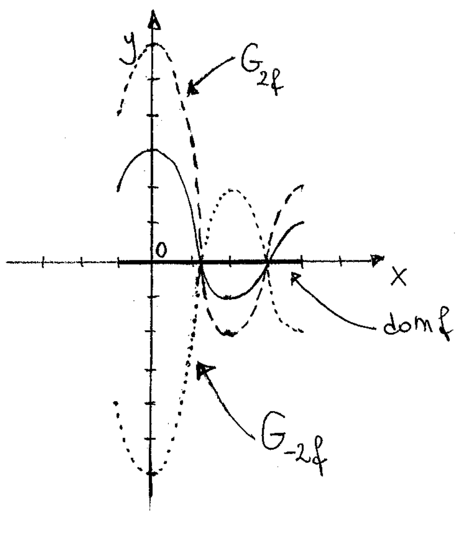


Un altro caso particolare è $a = -1$: in questo caso $af = -f$;

se $(x,y) \in G_f$ segue $(x,-y) \in G_{-f}$, che è dunque il simmetrico di quello di f rispetto all'asse x.

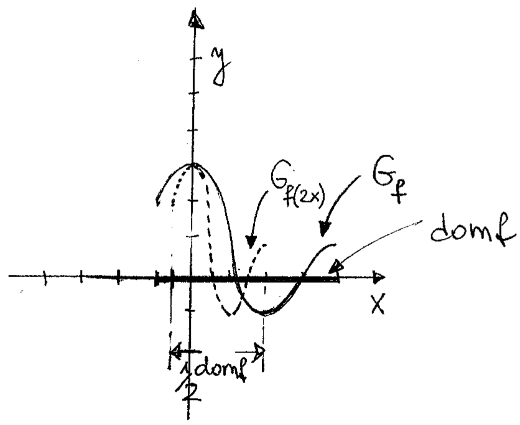


Se $a<0$ generico, il grafico di af si ottiene dapprima disegnando il grafico di $(-a)f$ (così $-a>0$) e poi ribaltandolo intorno all'asse x.

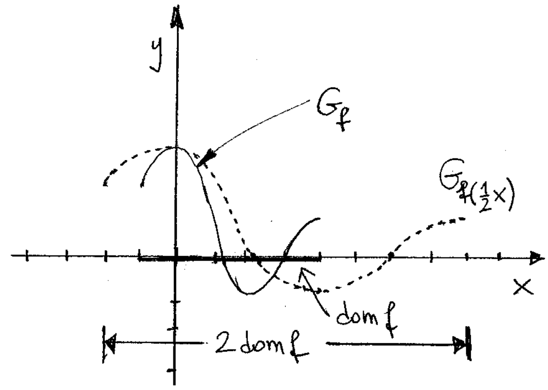


•• Consideriamo $x \longmapsto f(ax)$ per $a>0$ $\left(x \in \frac{1}{a} \operatorname{dom} f\right)$.
Il grafico di $f(ax)$ si ricava da quello di f con un riscalamento dell'asse x:

$a > 1$



$0 < a < 1$



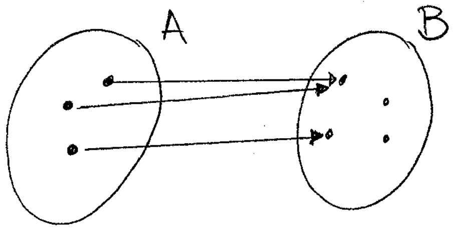
■

Def. Una funzione $f : A \to B$ si dice <u>iniettiva</u> se

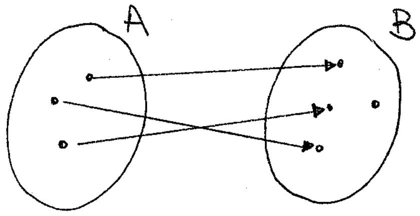
$$\forall\, a_1, a_2 \in A \qquad [a_1 \neq a_2 \;\Rightarrow\; f(a_1) \neq f(a_2)]$$

(cioè ad elementi distinti di A, f associa elementi distinti di B).

Esempio 1:



<u>non</u> è iniettiva!

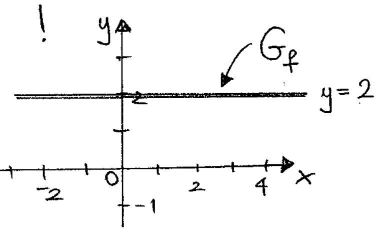


questa funzione è iniettiva!

■

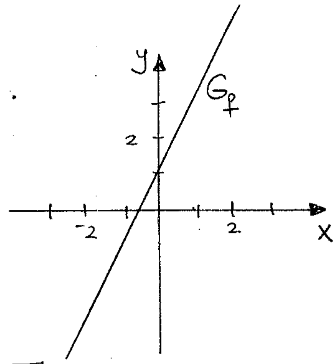
Esempio 2: (i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$ (o qualsiasi costante)

<u>non</u> è iniettiva!



(è ovvio: per esempio $x_1 = -1 \neq x_2 = 0$ mentre $f(x_1) = f(x_2) = 2$)

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+1$ è iniettiva.

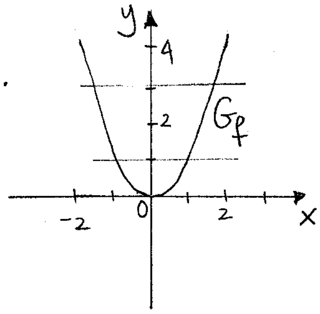


Infatti, siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $x_1 \neq x_2$.

Allora $2x_1 \neq 2x_2$, e $\underbrace{2x_1+1}_{f(x_1)} \neq \underbrace{2x_2+1}_{f(x_2)}$ $\square$

OSS: $f: A \to B$ è iniettiva $\Leftrightarrow$ $\forall a_1, a_2 \in A$ $[f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2]$.

(iii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ non è iniettiva.

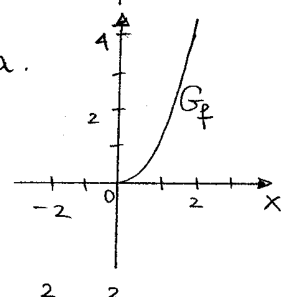


Infatti, $x_1 = -1 \neq x_2 = 1$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$!

$\square$

(iv) $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ è iniettiva.



Usiamo l'OSS. sopra:

Siano $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$: $f(x_1) = f(x_2)$.

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(x_1 - x_2)\underbrace{(x_1 + x_2)}_{\neq 0} = 0$

$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0$ $\quad \to \neq 0$ poiché $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (a meno che entrambi siano nulli)

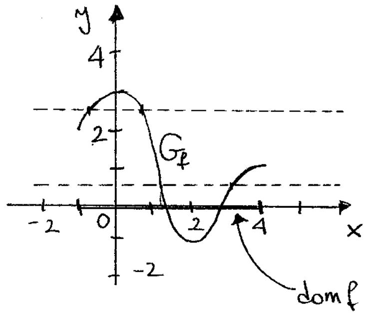
$\Rightarrow x_1 = x_2$ $\square$

(v) $A = \{$gli alunni di una scuola$\}$, $B = \{$classi della scuola$\}$

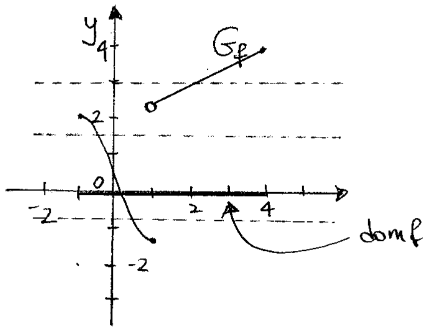
$f: A \to B$
studente $\mapsto$ classe.

Allora f non è iniettiva (due studenti (diversi) possono andare nella stessa classe) ■

<u>NOTA</u>: Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; f è iniettiva se ogni retta orizzontale interseca il grafico di f in al più un punto.



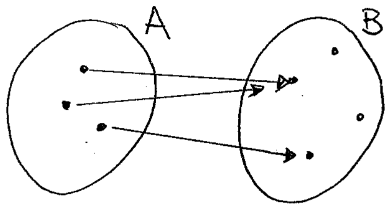
f non è iniettiva !



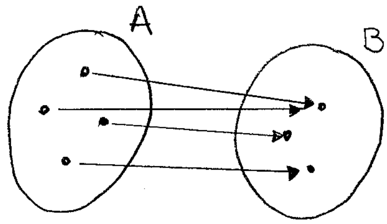
f è iniettiva !

Def. Una funzione $f: A \to B$ si dice <u>suriettiva</u> se $f(A) = B$ (cioè se $\forall\, b \in B \;\; \exists\, a \in A : f(a) = b$).

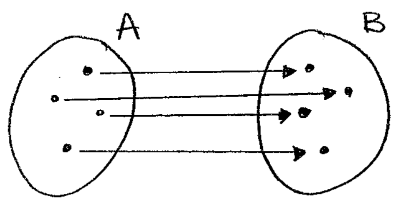
<u>Esempio 1</u>:



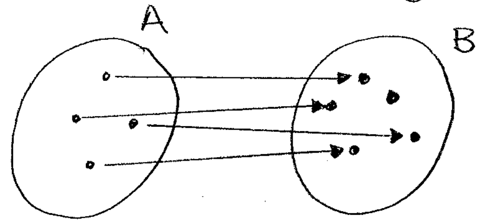
f <u>non</u> è suriettiva (e nemmeno iniettiva)



f è suriettiva (ma non è iniettiva).



f è suriettiva, ed è anche iniettiva.

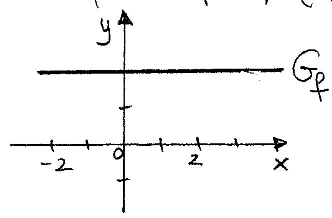


f è iniettiva, ma non è suriettiva.

□

Esempio 2: (i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)\equiv 2$ non è suriettiva!

infatti $f(\mathbb{R})=\{2\}\subsetneq\mathbb{R}$



□

(ii) $f:\mathbb{R}\to\{2\}$, $f(x)\equiv 2$ è suriettiva!

infatti $f(\mathbb{R})=\{2\}$

□

(iii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ è suriettiva!

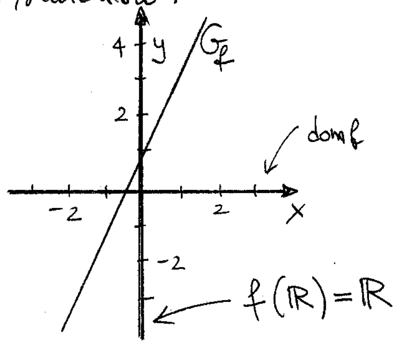
Abbiamo $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$:

infatti $\forall y\in\mathbb{R}\ \exists x\in\mathbb{R}$:

$f(x)=y$, ossia $2x+1=y$;

basta prendere

$$x=\frac{y-1}{2}\quad.$$



□

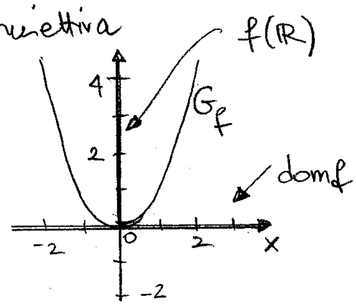
(iv) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ non è suriettiva

infatti $f(\mathbb{R})=[0,+\infty[$

$\subsetneq\mathbb{R}$,

ossia $\forall y\geq 0\ \exists x\in\mathbb{R}$:

$f(x)=x^2=y \quad (x_1=-\sqrt{y},\ x_2=\sqrt{y})$



Per $y<0\ \nexists x\in\mathbb{R}:\ x^2=y$ (Ricorda $\forall x\in\mathbb{R}$ $x^2\geq 0$) □

(v) $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty[$, $f(x)=x^2$ è suriettiva! ■