Commenti alla lezione del 28/09/05 (5ª lezione Precorso)

Riferimento bibliografico : abbiamo lavorato ancora sulle proprietà dei numeri reali (vedi [1] Cap. 2 Sez. 2.1, Sez. 2.3 pag. 33 e fino metà pag. 34); ripasso delle rette ([1] Cap. 2 Sez. 2.10 ; da pag. 58 (fondo pag.) a pag. 59; + proprietà d) a pag. 60).

Prodotti notevoli : $\forall a, b \in \mathbb{R}$
i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
iii) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Esercizio 1. Siano a e b due numeri reali positivi. Se $a<b$, quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?

ⓐ : $a+b<b^2$ NO : basta prendere $a=\frac{1}{2}$, $b=1$! □

ⓑ : $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ NO : $\boxed{a<b} \Leftrightarrow a\cdot\frac{1}{b} < \underbrace{b\cdot\frac{1}{b}}_{=1}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{a}\cdot a}_{=1}\cdot\frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{b}<\frac{1}{a}}$

ⓒ : $ab<b^2$ SI : $a<b \Leftrightarrow a\cdot b<b\cdot b$ □

$\Rightarrow ab<b^2$ □

ⓓ : $a+1<b-1$ NO : basta prendere

$a=\frac{1}{2}$, $b=1$ e si ottiene $\frac{3}{2}<0$ (F)

■

Esercizio 2. Siano a e b due numeri reali positivi. Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

pag. 18

ⓐ : $2\sqrt{a}\sqrt{b} = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - a - b$ (V) : poichè $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$ si ha subito $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - a - b = \cancel{a} + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \cancel{b} - \cancel{a} - \cancel{b}$. ☐

ⓑ : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ (V) : infatti $a - b = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$,

pag. 18 e quindi si ha subito l'uguaglianza. ☐

ⓒ : $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ (F) : infatti

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$$ ☐

ⓓ : $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (V)

■

Esercizio 3. Quale delle seguenti diseguaglianze è falsa?

ⓐ $\dfrac{3}{0.5} > 5$ (V) : $\dfrac{3}{\frac{1}{2}} > 5 \iff 6 > 5$ ✓ ☐

ⓑ $-\dfrac{0.01}{0.2} \geqslant -\dfrac{1}{21}$ (F) : $\dfrac{0.01}{0.2} \leq \dfrac{1}{21} \iff \dfrac{\frac{1}{100}}{\frac{2}{10}} \leq \dfrac{1}{21}$

$\iff \dfrac{1}{\cancel{100}} \cdot \dfrac{\cancel{10}}{2} \leq \dfrac{1}{21} \iff \dfrac{1}{20} \leq \dfrac{1}{21}$ (F) ☐

ⓒ $\dfrac{1}{100} - \dfrac{2}{10} \leqslant -0.1$ (V) : $\dfrac{1-20}{100} \leqslant -0.1 \iff -\dfrac{19}{100} \leqslant -0.1$

$\iff 19 \geqslant 10$ ✓ ☐

ⓓ $\dfrac{4}{0.2} < \dfrac{9}{0.4}$ (V) : $\iff \dfrac{8}{0.4} < \dfrac{9}{0.4} \iff 8 < 9$ ✓ ■

Esercizio 4. Trovate l'errore !!

i) Sia $a \neq 0$. L'insieme delle soluzioni della disequazione

$$ax+b<0 \quad \text{è} \quad \{x\in\mathbb{R} : x < -\tfrac{b}{a}\}. \quad \text{FALSO!}$$

Non è detto che $a>0$!!

ricordate: Si ha $ax+b<0 \Leftrightarrow ax<-b$

$$\Leftrightarrow \quad x<-\frac{b}{a} \quad \text{se } a>0$$

$$\text{altrimenti} \quad x>-\frac{b}{a} \quad \text{se } a<0 \text{ !!}$$

$\square$

ii) La disequazione $x^2(x-2)\geq 0$ è equivalente a $x\geq 2$.

FALSO!

ricordate: $x^2>0 \quad \forall x\neq 0$, mentre $x^2=0$ se $x=0$.

Quindi $x^2(x-2)\geq 0$ è equivalente a

$$x=0 \quad \text{o} \quad x\geq 2.$$

$\blacksquare$

Esercizio 5. Risolvete le seguenti disequazioni:

i) $-3x+7 \leq 2x-\frac{1}{2}$;

ii) $\frac{2}{3}x-1 > -\frac{3}{2}x+2$.

Svolgimento: Si devono trovare tutti gli $x\in\mathbb{R}$ t.c. i) (rispettivamente) ii) è soddisfatta (usando le proprietà di $+, \cdot, \leq$ nei numeri reali viste a lezione: non "inventatevi" delle proprietà nuove (false, in generale!!!))

i) $-3x+7\leq 2x-\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -3x-2x \leq -7-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad -5x \leq -\frac{15}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x \geq \frac{15}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x\geq \frac{3}{2}.$$

Quindi l'insieme delle soluzioni di i) è

$$S=\left\{x\in\mathbb{R} : x\geq \frac{3}{2}\right\} = \left[\tfrac{3}{2},+\infty\right[.$$

$\square$

ii) $\frac{2}{3}x-1 > -\frac{3}{2}x+2 \iff \frac{2}{3}x+\frac{3}{2}x > 2+1$

$\iff \left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right)x > 3$

$\iff \frac{13}{6}x > 3$

$\iff x > \frac{18}{13}$.

Quindi l'insieme delle soluzioni di ii) è

$$S=\left\{x\in\mathbb{R} : x > \frac{18}{13}\right\} = \left]\frac{18}{13},+\infty\right[.$$

$\blacksquare$

Esercizio 6. Risolvete le seguenti disequazioni:

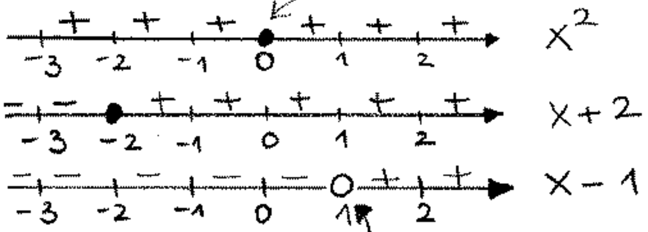
i) $\dfrac{x^2(x+2)}{x-1} \geq 0$

ii) $\dfrac{x-1}{x} > -1$.

Svolgimento:

i) Rappresentiamo in seguito i segni di x^2, $x+2$, $x-1$ e di $\dfrac{x^2(x+2)}{x-1}$ (prodotto dei segni):

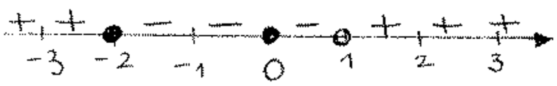
dove vale 0 !



$x-1$ si annulla in $x=1$, ma $x=1$ non è accettabile, poiché $x-1$ è al denominatore

ricordate: non potete dividere per 0 !! MAI !!!

Ricordando che $(-)\cdot(+) = -$, mentre $(-)\cdot(-) = +$ si ha



$\dfrac{x^2(x+2)}{x-1}$

e quindi $\dfrac{x^2(x+2)}{x-1} \geqslant 0 \iff \underline{\underline{x \in \,]-\infty,-2] \cup \{0\} \cup \,]1,+\infty[}}$.

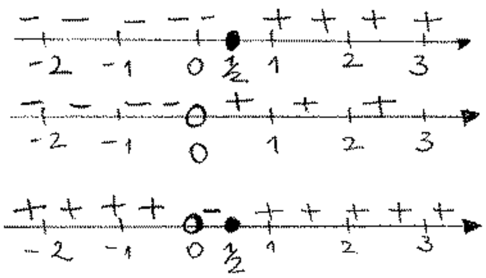
$\square$

ii) $\dfrac{x-1}{x} > -1 \iff \dfrac{x-1}{x} + 1 > 0$

$\iff \dfrac{x-1+x}{x} > 0$

$\iff \dfrac{2x-1}{x} > 0$

Rappresentiamo graficamente i segni di $2x-1$, x ed infine di $\dfrac{2x-1}{x}$:



$2x-1$

x

$\dfrac{2x-1}{x}$

e quindi $\dfrac{2x-1}{x} > 0 \iff \underline{\underline{x \in \,]-\infty,0[\, \cup \,]\tfrac{1}{2},+\infty[}}$.

<u>ATTENZIONE</u> : $\dfrac{x-1}{x} > -1 \;\cancel{\iff}\; x-1 > -x$

poiché non sapete se $x > 0$!!

Potete però scrivere (complicandovi comunque la vita!)

$$\frac{x-1}{x} > -1 \iff \begin{cases} x-1 > -x & \text{se } x>0 \\ \text{o} & \\ x-1 < -x & \text{se } x<0 \end{cases} ,$$

e risolvere le due disequazioni tenendo conto delle condizioni!