Commenti alla lezione del 26/09/05 (3ª lezione Precorso)

Riferimento bibliografico [1] Cap. 1 Sez. 1.2 (Formula (1.8) pag. 12
leggi di de Morgan pag. 13)

Esercizio 1. Provare che la proposizione
"$[\mathcal{P} \text{ e } (\mathcal{P} \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$" (Modus Ponens)
è sempre vera (qualunque siano i valori di $\mathcal{P}$ e di Q). È una tautologia.

Svolgimento:

$\mathcal{P}$:	V	V	F	F
Q :	V	F	V	F
$\mathcal{P} \Rightarrow Q$:	V	F	V	V
$\mathcal{P} \text{ e } (\mathcal{P} \Rightarrow Q)$:	V	F	F	F
$[\mathcal{P} \text{ e } (\mathcal{P} \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$:	V	V	V	V

OSS. Dal punto di vista pratico il Modus Ponens opera così:
Se $\mathcal{P}$ è vera e si vuole dimostrare che
Q è vera, si procede dimostrando che
$\mathcal{P} \Rightarrow Q$ è vera! ■

Esercizio 2. Tradurre in buon linguaggio corrente le proposizioni seguenti:

i) $\forall x \ \exists y : \mathcal{P}(x,y)$ dove $\mathcal{P}(x,y)$ = "La persona x siede sulla sedia y".

↳ "Tutte le persone sono sedute su una sedia". □

ii) $\forall x\ \exists y : \mathcal{P}(x,y)$ dove $\mathcal{P}(x,y) =$ " la casa x è abitata dalla persona y " ;

↳ " Ogni casa è abitata da una persona ". □

iii) $\exists x : \forall y, \mathcal{P}(x,y)$ con $\mathcal{P}(x,y)$ precedente ;

↳ " C'è una casa abitata dall' umanità !! " □

iv) $\exists x : (\mathcal{P}(x) \text{ e } \forall y, \mathcal{Q}(x,y))$ dove $\mathcal{P}(x) =$ " il ragazzo x è uno studente " e $\mathcal{Q}(x,y) =$ " il ragazzo x ha superato l'esame y " ;

↳ " C'è (almeno) uno studente che ha superato tutti gli esami ". ■

Esercizio 3. Individuate le parole chiave e traducete in " matematichese " ciascuna delle proposizioni seguenti :

i) " Qualcuno ha dei fratelli " : $\Leftrightarrow$ " $\exists x : \mathcal{P}(x)$ " con $\mathcal{P}(x) =$ " La persona x ha dei fratelli ". □

ii) " C'è chi non sa come superare l'esame di Analisi " :
$\Leftrightarrow$ " $\exists x : \mathcal{P}(x)$ " con
$\mathcal{P}(x) =$ " lo studente x non sa superare l'esame di Analisi. " □

iii) " Chiunque abbia studiato bene supera l'esame di Analisi "
(usare l'implicazione!)
$\Leftrightarrow\ \forall x, (\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x))$ con $\mathcal{P}(x) =$ " lo studente x studia bene "
$\mathcal{Q}(x) =$ " lo studente x supera l'esame di Analisi ". □

NOTA: Aver studiato è una condizione sufficiente per superare l'esame di Analisi!!
Nella frase precedente non è detto che non si possa superare l'esame di Analisi senza aver studiato bene!! (non fatevi però ingannare!!!)

iv) "Solo chi ha studiato bene supera l'esame di Analisi"
(usare l'implicazione)

$\iff \quad \forall x, \ (\mathcal{P}(x) \iff Q(x))$ dove $\mathcal{P}(x)$ e $Q(x)$ come in iii)

NOTA: aver studiato bene condizione necessaria e sufficiente per il superamento dell'esame di Analisi!!

Esercizio 4. Dire se la seguente proposizione è vera

$$\text{non}\left[\forall x, \ \left(x^2-3x+2 \geq 0 \ \Rightarrow \ (x \leq 1 \ \text{o} \ x \geq 2)\right)\right]$$

Svolgimento:

$$\text{non}\left[\forall x, \left(x^2-3x+2 \geq 0 \ \Rightarrow \ (x \leq 1 \ \text{o} \ x \geq 2)\right)\right] \iff$$

$$\exists x : \text{non}\left(x^2-3x+2 \geq 0 \ \Rightarrow (x \leq 1 \ \text{o} \ x \geq 2)\right)$$

$$\iff \ \exists x : \left(x^2-3x+2 \geq 0\right) \ \text{e} \ \left(\text{non}\left(x \leq 1 \ \text{o} \ x \geq 2\right)\right)$$

$$\iff \ \exists x : \left(x^2-3x+2 \geq 0\right) \text{e} \ \left(1 < x < 2\right)$$

Poiché quest'ultima proposizione è falsa (infatti le radici dell'equazione $x^2-3x+2=0$ sono 1 e 2, dunque $x^2-3x+2 \geq 0$ solo per $x \leq 1$ o $x \geq 2$), è falsa anche

$$\text{non}\left[\forall x,\ (x^2-3x+2\geq 0 \Rightarrow (x\leq 1 \text{ o } x\geq 2))\right].$$

Quindi è vera la sua negazione, che è

$$\forall x,\ (x^2-3x+2\geq 0 \Rightarrow (x\leq 1 \text{ o } x\geq 2))$$

■

Esercizio 5. Determinate l'insieme

i) $A=\{x\in\mathbb{R} :\ x+2<5 \ \text{ e } \ 3x\geq 13\}$

ii) $B=\{x\in\mathbb{R} :\ x+2<5 \ \text{ o } \ 3x\geq 13\}$

Svolgimento:

i) $A=\{x\in\mathbb{R} :\ x<3 \ \text{ e } \ x\geq \frac{13}{3}\} = \emptyset$

ii) $B=\{x\in\mathbb{R} :\ x<3 \ \text{ o } \ x\geq \frac{13}{3}\} =]-\infty,3[\ \cup\ [\frac{13}{3},+\infty[$

■

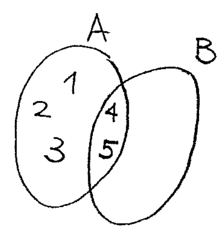
Esercizio 6. Sia $A\setminus B=\{n\in\mathbb{N} :\ 1\leq n\leq 3\}$ e $A\cap B=\{4,5\}$.
Quale delle seguenti affermazioni può essere vera?

a) $B=\{4,6\}$ (F) poichè $5\in B$;

b) $A=\{1,2,3,6\}$ (F) poichè $5\in A$;

c) $B=\{4,5,6\}$ può essere vera!!

d) $A=A\cap B$ (F) poichè $A\cap B=\{4,5\}$ mentre $A\ni 3$.



■

Esercizio 7. Siano dati i due insiemi $A=\{a,b,c\}$ e $B=\{b,d\}$. Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

a) $B\subset A$ (F) infatti $d\in B$, ma $d\notin A$;

b) $b\in B$ (V);

c) $A \cup B = \{a, b, c, d\}$ (V) ;

d) $A \cap B = \{b\}$, (V) . $\blacksquare$

<u>Esercizio 8.</u> Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : 3 < n \leq 11\}$, sia B l'insieme dei numeri pari e C l'insieme dei numeri divisibili per 4. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) $6 \in (B \cap C) \cup A$ (V) poiché $6 \in A$. <u>NOTA</u>: $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$;

b) $A \subseteq B \cup C$ (F) poiché $7 \notin B \cup C$;

c) $A \cap C = \{4, 8, 12\}$ (F) poiché $12 \notin A$;

d) nessuna delle precedenti (F) poiché a) è vera. $\blacksquare$

<u>Esercizio 9.</u> Siano dati gli intervalli $A = [-1, 2]$, $B =]-2, 1]$ e $C = [0, 2[$. Allora l'insieme $(A \cap B) \cup C$ è dato da

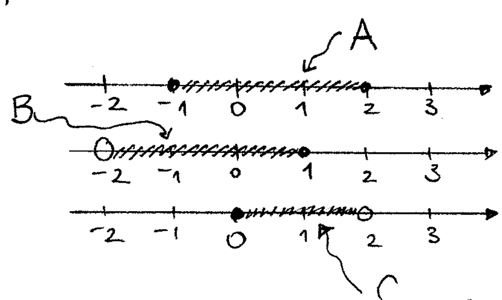
a) $[0, 2]$; (F)

b) $[0, 2[$; (F)

c) $[-1, 2[$; (V)

d) $]-2, 2]$; (F) .

Infatti



$A \cap B = [-1, 1]$ $(A \cap B) \cup C = [-1, 1] \cup [0, 2[\; = [-1, 2[$. $\blacksquare$

Esercizio 10.

Dati gli insiemi $A = \{t, z\}$, $B = \{v, z, t\}$ dite se sono vere le seguenti relazioni:

a) $A \in B$ (F) (poiché A non è un elemento di B, ma un sottoinsieme di B);

b) $A \subseteq B$ (V)

c) $A \subset B$ (V)

d) $z \in B$ (V)

e) $v \subseteq B$ (F) (v è un elemento di B, non un sottoinsieme!) ■

Esercizio 11. Dati gli insiemi A e B dell'Es. 10, trovate $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ e $B \setminus A$.

Svolgimento:

$A \cup B = \{t, z, v\}$ (= B poiché $A \subset B$)

$A \cap B = \{t, z\}$ (= A poiché $A \subset B$)

$A \setminus B = \emptyset$

$B \setminus A = \{v\}$. ■