Commenti alla lezione del 17/10/05 (4ª lezione Corso)

Riferimento bibliografico: [2] Cap. 2 Sez. 2.5 (vedere le definizioni ed esempi a pag. 32, 33, 34), e vedi sotto.

[1] Cap. 1 Sez. 1.3 (pag. 15, 16, prima metà pag. 17)

Insiemi numerici limitati e non. Massimo e/o minimo

Def. Sia E un insieme numerico. E si dice limitato inferiormente se $\exists m \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq x \quad \forall x \in E$.
E si dice limitato superiormente se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq M \quad \forall x \in E$.
E si dice limitato se E è limitato inferiormente e limitato superiormente.

Esempi: (i) $A =]2, 3]$ è limitato inferiormente (come m si può prendere un qualunque nr. reale minore o uguale a 2) ed è limitato superiormente (come M si può prendere un qualunque nr. reale maggiore o uguale a 3).
Quindi A è limitato. □

(ii) $B = [3, +\infty[$ è limitato inferiormente (come m si può scegliere un qualunque nr. reale minore o uguale a 3), ma B non è limitato superiormente. Infatti, $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists x \in B$

(basta prendere, per esempio, $x = M+1$) tale che $M < x$ (e quindi è vero la negazione della definizione di limitatezza superiore). $\square$

(iii) $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$ è limitato. Infatti $E = [2,3]$! $\square$

(iv) $A = \{-10^6\} \cup [-2,1[\cup [2,5] \cup \{100\}$ è limitato.
(basta prendere come m un qualsiasi nr. $\leq -10^6$ e vale $m \leq x \quad \forall x \in A$; inoltre come M basta scegliere un qualunque nr. ≥ 100 e si ha che $x \leq M \ \forall x \in A$) $\blacksquare$

Def. Sia E un insieme numerico. Diremo che $\underline{\bar{x} \in \mathbb{R} \text{ è massimo di } E}$ se
i) $x \leq \bar{x} \quad \forall x \in E$
ii) $\bar{x} \in E$.

Denotiamo $\bar{x} = \max E$.

Analogamente, diremo che $\underline{\hat{x} \in \mathbb{R} \text{ è minimo di } E}$ se
i) $\hat{x} \leq x \quad \forall x \in E$
ii) $\hat{x} \in E$.

Denotiamo $\hat{x} = \min E$.

OSS. a) Affinché il massimo esista, l'insieme E deve essere limitato superiormente!
Affinché il minimo esista, l'insieme E deve essere limitato inferiormente!

b) Ogni insieme numerico con un <u>numero finito</u> di elementi ha massimo e minimo

<u>Es.</u> $E = \{3, 8, -1, 0, -5\}$; allora

$\min E = -5 \qquad \max E = 8.$ $\square$

<u>ATTENZIONE</u>: non confondere E costituito da un numero finito di elementi con E insieme limitato!

<u>Es.</u> $E =]0,1[$ è un insieme limitato, ma $\nexists \min E$, $\nexists \max E$ $\square$

<u>Esempio</u>

Insieme E	$\min E$	$\max E$
$\mathbb{N}$	0	$\nexists$
$\mathbb{Z}$	$\nexists$	$\nexists$
$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$	$\nexists$	1
$\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1\}$	-1	1
$]0,1[$	$\nexists$	$\nexists$

$[-1,1]$

<u>Svolgimento</u>: Un qualunque numero < 0 non appartiene ad E e quindi non può essere minimo. Se prendiamo un numero $\hat{x}$ tale che $0 < \hat{x} < 1$, allora $\hat{x}$ non può essere minimo.
Infatti, si ha, per esempio che $0 < \frac{\hat{x}}{2} < 1$ e quindi appartiene ancora ad E, ma $\frac{\hat{x}}{2} < \hat{x}$ invece di soddisfare la disuguaglianza opposta (affinché $\hat{x}$ è minimo).
Analogamente si prova che $]0,1[$ non ha massimo. $\square$

Funzioni generiche

Def. Si dice <u>funzione</u> (o applicazione) una terna di oggetti, di cui i primi due, detti rispettiv. <u>dominio</u> e <u>codominio</u>, sono insiemi, e il terzo è una legge che ad ogni elemento del dominio fa corrispondere <u>uno ed un solo</u> elemento del codominio. Si scrive

$$\underset{\substack{\uparrow \\ [\text{dominio} \\ = \text{dom} f]}}{f : A} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ [\text{codominio}]}}{B} \qquad (\text{"}f \text{ da } A \text{ in } B\text{"})$$

$$a \longmapsto f(a) = b$$

- Dunque, perchè f sia una funzione occorre che

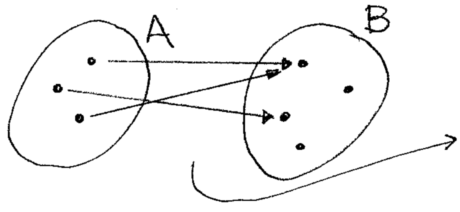
$$\forall a \in A \quad \exists!\, b \in B \quad : \quad b = f(a) \,.$$

- Spesso scriveremo anche $y = f(x)$ per $x \in A$ ($= \text{dom} f$)

  x ↳ <u>variabile indipendente</u>

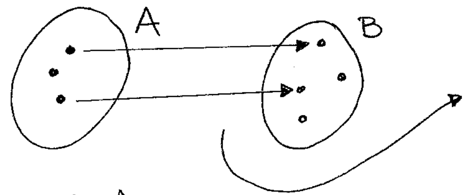
  y ↳ <u>variabile dipendente</u>

NOTA: i)



$f : A \to B$ è una funzione!!

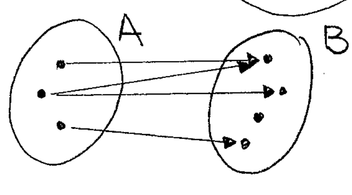
ii)



<u>NON</u> è una funzione $f : A \to B$

(la legge <u>non</u> è definita $\forall a \in A$..)

iii)



<u>NON</u> è una funzione $f : A \to B$

(per un elemento di A esistono più elementi di B) !!

Esempi di funzioni

<u>Esempio 1.</u> Quando si fa rifornimento di benzina ad una stazione di servizio, il prezzo pagato dipende dalla quantità di carburante acquistato. Diciamo che il prezzo totale è "funzione della quantità" di benzina acquistata.

Se x è la quantità di benzina acquistata (in litri) e p è il prezzo unitario per litro, allora il costo totale è dato da $p \cdot x$; possiamo allora scrivere

$$\boxed{\begin{array}{l} f : \overbrace{[0, +\infty[}^{A} \longrightarrow \overbrace{[0, +\infty[}^{B} \\ \qquad x \longmapsto f(x) = p \cdot x \end{array}}$$

[Se $p = 1{,}34\ (€/\ell)$ ed $x = 2\ (\ell) \Rightarrow f(2) = \text{costo totale} = 1{,}34 \cdot 2 = 2{,}68\ (€)$

$x = 4{,}5\ (\ell) \Rightarrow f(4{,}5) = \text{"} = 1{,}34 \cdot 4{,}5 = 6{,}03\ (€)$].

<u>Esempio 2.</u> La legge che associa ad ogni individuo maschio sposato del comune di Trento la propria moglie permette di individuare (poiché in Italia la poligamia non è consentita!) una funzione.

Se $A = \{\text{maschi sposati a Trento}\}$, $B = \{\text{femmine sposate a Trento}\}$

$$f : A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto y = f(x) \text{ tale che } y \text{ è moglie di } x$$

<u>Esempio 3.</u> Supponiamo di voler acquistare dei dischetti per il computer. Ci rechiamo in un negozio e chiediamo il listino prezzi. Da questo listino scopriamo che il prezzo unitario dei dischetti

dipende dalla quantità acquistata. Nel listino troviamo la seguente tabella

Nr. di dischetti	Prezzo unitario
da 1 a 10	4,5 €
da 11 a 20	4 €
da 21 a 30	3,5 €
più di 30	2 €

Possiamo scrivere in questo caso

$$\boxed{\begin{array}{l} f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \{2, 3{,}5, 4, 4{,}5\} \\ f(x) = \begin{cases} 4{,}5 & \text{se } 1 \leq x \leq 10 \\ 4 & \text{se } 11 \leq x \leq 20 \\ 3{,}5 & \text{se } 21 \leq x \leq 30 \\ 2 & \text{se } x \geq 31 \end{cases} \end{array}}$$

e ci rappresenta il prezzo unitario dei dischetti (in funzione del numero di dischetti acquistati e indicato con x).

[si ha $f(12) = 4$, $f(17) = 4$, $f(25) = 3{,}5$, $f(34) = 2$...]

■

NOTA IMPORTANTE: Due funzioni f e g sono uguali se e solo se hanno lo stesso dominio, lo stesso codominio, ed inoltre $f(x) = g(x)$ per ogni x del dominio.

Non basta dunque che la "regola" (la "legge") sia la stessa: occorre anche che il dominio ed il codominio dati siano gli stessi.

Commetteremo però qualche abuso nei confronti di quanto appena detto: intenderemo spesso che due funzioni f e g sono uguali se hanno lo stesso dominio e $f(x) = g(x)$ per ogni x del dominio (trascurando i loro codomini !!).

<u>Esempio 1.</u> Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$

$g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = x^2$

Allora $f(x) \neq g(x)$!! si ha $f(2) = 4$, mentre $g(2)$ non è definita □

<u>Esempio 2.</u> Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$

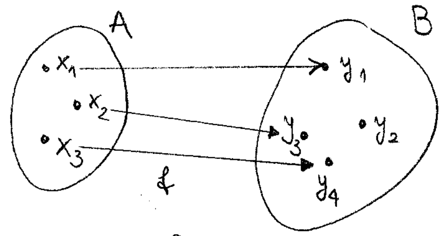
$g : \mathbb{R} \to [0,+\infty[$, $x \mapsto g(x) = x^2$

Allora $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (i codomini sono diversi, ma consideriamo comunque f e g uguali). ■

<u>Def.</u> Si dice <u>grafico</u> di una funzione $f : A \to B$ il sottoinsieme G_f (o graf f) di $A \times B$ definito da

$$G_f = \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\}.$$

<u>Esempio:</u> (a)

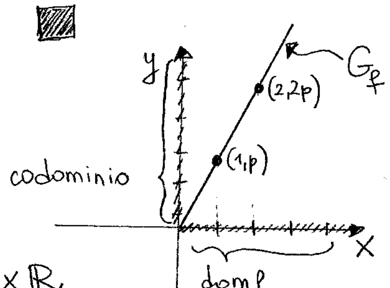


Allora $G_f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_3), (x_3, y_4)\} \subseteq A \times B$

<u>Nota:</u> $(x_1, y_2) \in A \times B$, ma $(x_1, y_2) \notin G_f$ poichè $y_2 \neq f(x_1)$. ■

(b) Sia $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$

$f(x) = p \cdot x$



Allora $G_f \subseteq [0,+\infty[\times [0,+\infty[\subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ■