Schema per lo studio del grafico di una funzione

Questo schema è orientativo; in molte situazioni, infatti, non si riescono a studiare completamente tutti gli elementi elencati; tuttavia, si riesce a determinare ugualmente l'andamento qualitativo del grafico sfruttando un numero minore di dati.

1. Insieme di definizione: se non è stato assegnato esplicitamente il *dominio* (o *insieme di definizione*) della funzione f, si assume come insieme di definizione A il dominio naturale della f; occorre quindi determinarlo.

2. Simmetria: si esamina se la funzione f gode di particolari proprietà di simmetria (pari; dispari).

> È chiaro che se la funzione f è pari oppure dispari, basta studiarla su $A \cap [0, +\infty[$; è poi possibile disegnare per simmetria il grafico della funzione anche su $A \cap]-\infty, 0]$.

3. Segno della funzione: se è semplice, si può determinare il *segno* della funzione, cioè determinare per quali x risulta $f(x) = 0$, $f(x) < 0$, $f(x) > 0$.

> È bene osservare che, in alcuni casi, può essere anche molto complicato risolvere l'equazione $f(x) = 0$, o la disequazione $f(x) > 0$, e la risoluzione è facilitata dallo studio preliminare del segno della derivata prima e del calcolo degli asintoti.

4. Continuità e comportamento agli estremi del dominio: si esamina se esistono punti di A in cui f è *discontinua*.

> Se x_0 è un punto di discontinuità di f si calcolano (se esistono) i limiti sinistro e destro di f in x_0. Si calcolano inoltre i limiti di f nei punti estremi del suo dominio (determinando gli eventuali *asintoti* verticali o orizzontali o obliqui).

5. Derivabilità: si esamina la *derivabilità* della funzione f e si calcola, quando esiste, la *derivata prima* f' indicandone il relativo dominio $B \subseteq A$.

> Se x_0 è un punto di A in cui f non è dotata di derivata, si può indagare se $(x_0, f(x_0))$ è un punto con tangente verticale, oppure un punto angoloso, oppure una cuspide del grafico di f.

6. Segno della derivata prima - Monotonia di f: si studia il segno di f' e si determinano i punti critici di f.

> Questo permette nei casi usuali di suddividere l'insieme di definizione in intervalli in ciascuno dei quali f' ha segno costante (e quindi f è *crescente* se $f' > 0$,o *decrescente* se $f' < 0$).
>
> Tale studio è anche, in generale, sufficiente per la determinazione degli eventuali *punti di minimo* e *di massimo locale (e globale)* di f con i rispettivi valori.

7. Segno della derivata seconda - Concavità/Convessità di f: si calcola, quando esiste e non sorgono eccessive difficoltà di calcolo, la *derivata seconda* e si determina il suo segno.

> In base a ciò si determinano gli intervalli in cui la funzione è *concava* o *convessa* e gli eventuali *punti di flesso.*

8. Si traccia un grafico qualitativo di f.