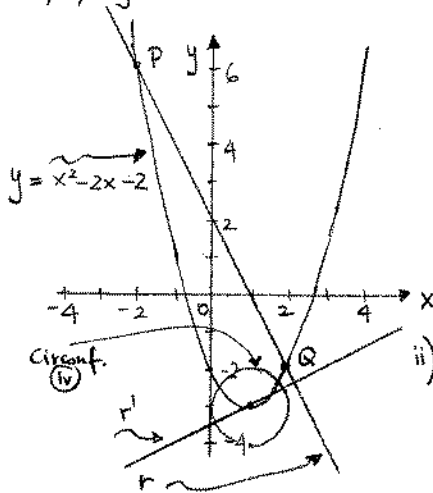


FILA (A)

1) i) $y - x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow y = x^2 - 2x - 2 \quad V = (1, -3)$ è il vertice della parabola

$= (x-1)^2 - 3$

Osserviamo che $y=0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{3}$.



ii) Per determinare i pt. di intersezione P e Q della parabola con la retta r di eq. $y + 2x - 2 = 0$ dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 2 = -2x + 2 \\ y = -2x + 2 \end{cases} \quad \text{Abbiamo} \quad \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = -2x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} P &= (-2, 6) \\ Q &= (2, -2) \end{aligned}$$

Infine, la distanza tra P e Q è data da $d(P, Q) = \sqrt{(-2-2)^2 + (6+2)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

iii) r' : ha eq. $y = \frac{1}{2}(x - x_0) + y_0$ con $(x_0, y_0) = (1, -3)$. Allora

$y = \frac{1}{2}(x-1) - 3$ diventa $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$.

iv) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 1$.

2) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x^2 - 3x \leq 4\}$: per determinare A dobbiamo risolvere il

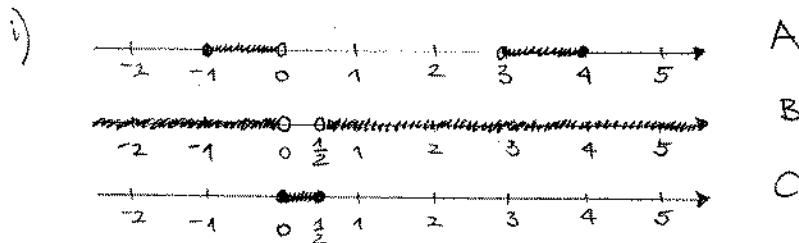
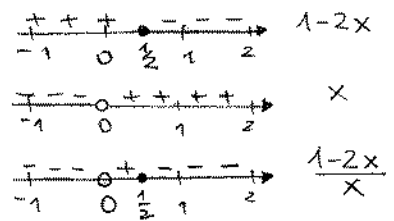
sistema di eq. $\begin{cases} 0 < x^2 - 3x \\ x^2 - 3x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[\\ x^2 - 3x - 4 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[\\ x \in [-1, 4] \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{A = [-1, 0[\cup]3, 4]}}$

$B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} < 2\}$: potete determinarlo graficamente oppure algebric.

risolvendo $\frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} < 0$

Abbiamo $B =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$.



Rappresentazione grafica degli insiemi A, B e C sulla retta reale.

ii) • A è limitato inferiormente e superiormente (quindi è un insieme limitato)

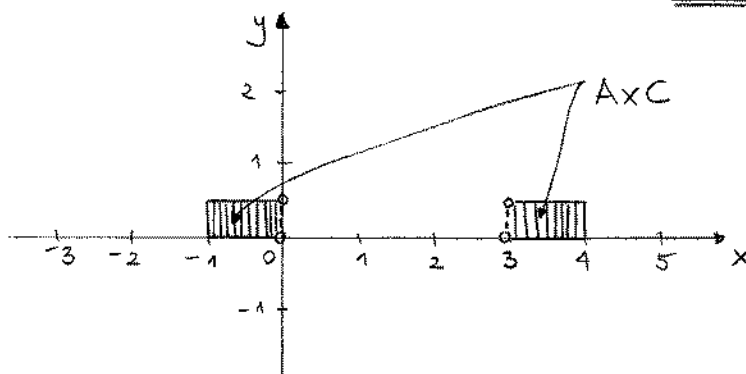
$\min A = -1$ $\max A = 4$;

• B non è limitato inferiormente e non è limitato superiormente ; $\nexists \min B, \nexists \max B$.

• C è limitato inferiormente e superiormente (quindi è un insieme limitato)

$\min C = 0$, $\max C = \frac{1}{2}$.

iii) $A \cap B = A$, $B \cup C = \mathbb{R}$, $B \setminus A =]-\infty, -1[\cup]\frac{1}{2}, 3[\cup]4, +\infty[$



3.) La proposizione data è della forma $A \Rightarrow B$, dove $A = \text{"Studio con impegno per l'esame di Analisi Matematica"}$ e $B = \text{"Supero l'esame di A.M. al primo appello"}$. Ricordiamo che $\text{non}(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \text{non}[(\text{non } A) \vee B] \Leftrightarrow A \wedge (\text{non } B)$ e quindi la negazione della proposizione data si scrive come segue:

"Studio con impegno per l'esame di Analisi Matematica e non lo supero al primo appello."

ii) a) (F) : per tutti gli $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$ non è nemmeno definita $\sqrt{x}$.

b) (V) : basta prendere, per esempio, $x=1$, $y=\sqrt{3}$.

c) (V) : basta prendere un qualunque nr. reale positivo; per esempio $x=1$;

d) (F) : Per $x=0$ non è definito $\frac{1}{x^2}$. ■

4) $-x^2+2 \leq -x \iff x^2-x-2 \geq 0$; poiché $x^2-x-2=0$ ha le soluz.

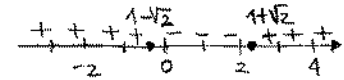
$x_1=-1$, $x_2=2$, si ha

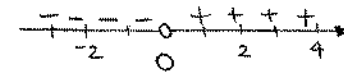
$x^2-x-2 \geq 0 \iff x \in S =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$. □

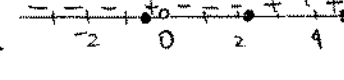
• $3x+1 < -2x-3 \iff 5x < -4 \iff x \in S =]-\infty, -\frac{4}{5}[$. □

• $x^3 \geq x^2-2x \iff x^3-x^2+2x \geq 0 \iff x(x^2-x+2) \geq 0$.

Poiché $x^2-x+2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, l'insieme delle soluzioni della diseq. data è $S = [0, +\infty[$. □

• $\frac{1}{x} < x-2 \iff \frac{1-x^2+2x}{x} < 0$  x^2-2x-1

$\iff \frac{x^2-2x-1}{x} > 0$  x

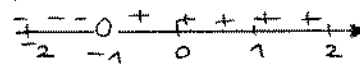
 $\frac{x^2-2x-1}{x}$

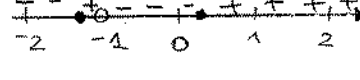
$S =]1-\sqrt{2}, 0[\cup]1+\sqrt{2}, +\infty[$. □

• $\frac{x^2}{x+1} \leq 3x-1 \iff \frac{x^2-(3x-1)(x+1)}{x+1} \leq 0$

$\iff \frac{x^2-3x^2-2x+1}{x+1} \leq 0 \iff \frac{2x^2+2x-1}{x+1} \geq 0$

 $2x^2+2x-1$

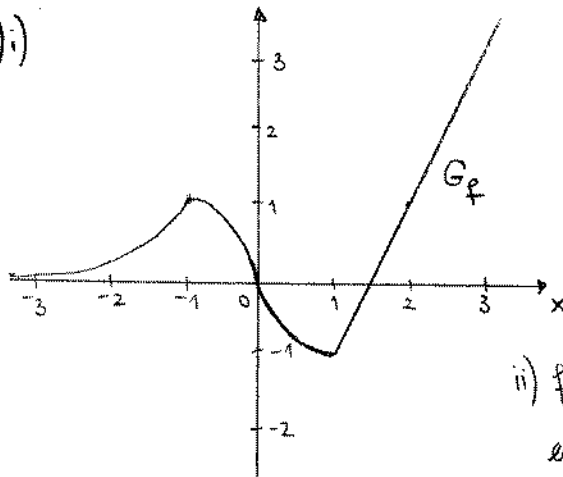
 $x+1$

 $\frac{2x^2+2x-1}{x+1}$

$S = [-\frac{1-\sqrt{3}}{2}, -1[\cup [-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty[$ ■

-4-

5) i)



$$f(-2) = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3$$

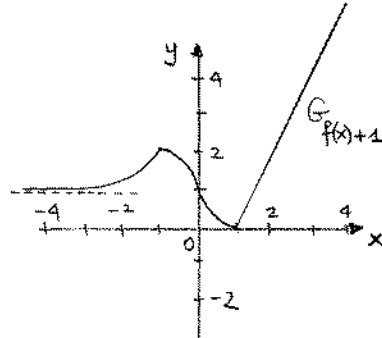
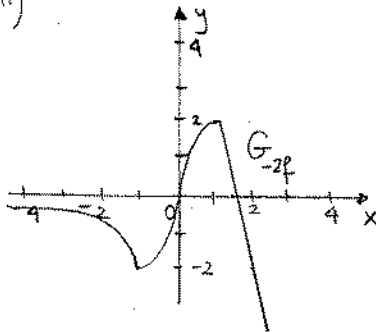
$$(2, 0) \notin G_f, \text{ poiché } 0 \neq f(2). \quad \square$$

ii) f non è iniettiva: basta prendere, per esempio, $x_1 = -1 \neq x_2 = 2$; abbiamo

$$f(x_1) = 1 = f(x_2).$$

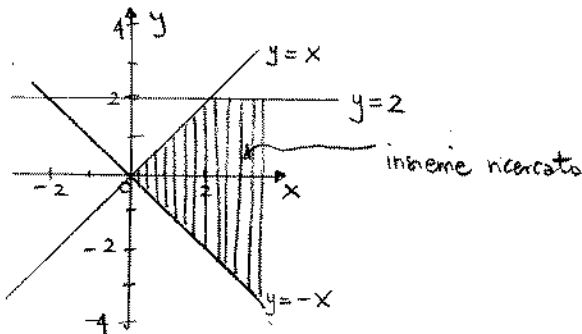
$$\underline{f(\mathbb{R}) = [-1, +\infty[} \subsetneq \mathbb{R}; \text{ quindi } f \text{ non è suriettiva.} \quad \square$$

iii)

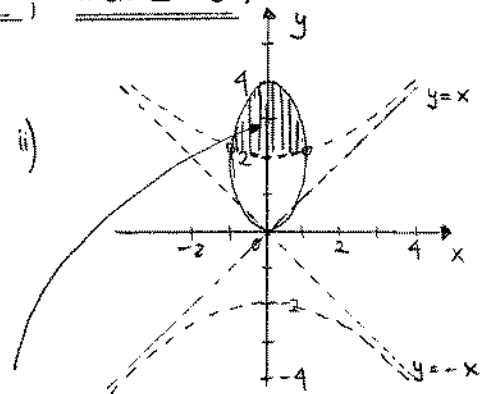


iv) $E = f([0, 1[) =]-1, 0]$: $\underline{\Delta \min E}$; $\underline{\max E = 0}$. ■

6) i)

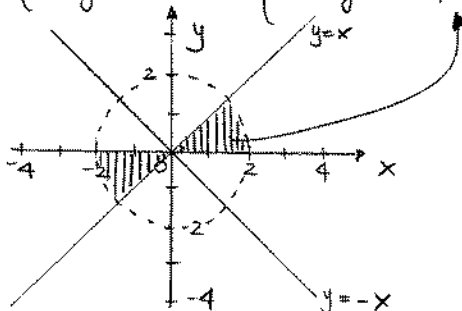


ii)



$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \\ -x^2 + y^2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} \leq 1 \\ -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} > 1 \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} xy \geq y^2 \\ x^2 + y^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x-y) \geq 0 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$$



NOTA: $y(x-y) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x-y \geq 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} y \leq 0 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq y \end{cases} \text{ o } \begin{cases} y \leq 0 \\ x \leq y \end{cases} \quad \blacksquare$$