

FILA (A)

$$1) i) \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+4}\right) < 0 \iff \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2+4} > 0 \\ \frac{x^2-1}{x^2+4} < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-1 > 0 \\ x^2-1 < x^2+4 \end{cases}$$

(nota: $x^2+4 > 0$
e quindi possiamo moltiplicare!)

$$\iff \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 1 \\ -1 < 4 \text{ (sempre vero!)} \end{cases} \Rightarrow \underline{S =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[}$$

□

$$\left| \frac{2x}{x^2+1} \right| > 1 \iff \frac{2x}{x^2+1} < -1 \text{ o } \frac{2x}{x^2+1} > 1$$

$$\iff 2x < -(x^2+1) \text{ o } 2x > x^2+1 \text{ (nota: } x^2+1 > 0 \text{ e quindi possiamo moltiplicare!)}$$

$$\iff x^2+2x+1 < 0 \text{ o } x^2-2x+1 < 0$$

$$\iff (x+1)^2 < 0 \text{ o } (x-1)^2 < 0 \Rightarrow \underline{S = \emptyset}$$

□

$$ii) e^{|x+1|} e^{-x^2} < 1 \iff e^{|x+1|-x^2} < 1 \iff |x+1|-x^2 < 0$$

$$\iff \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1-x^2 < 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x+1 < 0 \\ -(x+1)-x^2 < 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2-x-1 > 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < -1 \\ x^2+x+1 > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geq -1 \\ x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ o } x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < -1 \\ \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{S =]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}[\cup]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[}$$

□

$$e^{-\frac{1}{|x|}} > 0 \quad \underline{S = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

□

$$iii) \log\left(x^2 - \frac{2|x|}{3}\right) + \log(3x) \leq \log|x|$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - \frac{2|x|}{3} > 0 \\ x > 0 \\ \log\left(x^2 - \frac{2|x|}{3}\right)(3x) \leq \log|x| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - \frac{2}{3}x > 0 \\ x > 0 \\ \left(x^2 - \frac{2}{3}x\right)3x \leq x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x - \frac{2}{3}) > 0 \\ x > 0 \\ x(3x^2 - 2x - 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ 3x^2 - 2x - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S =]\frac{2}{3}, 1]}}.$$

□

$$\frac{2^{-x^2} \cdot 2^{2x}}{4^x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{-x^2} \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-2x} = 2^{-1} \Leftrightarrow -x^2 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{S = \{-1, 1\}}}.$$

■

$$2) i) \sum_{n=1}^{15} \frac{a^n (-1)^{n+1}}{n+1}.$$

□

$$ii) f^{(1)}(x) = 6x + \frac{1}{x} \Rightarrow f^{(1)}(1) = 7$$

$$f^{(2)}(x) = 6 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f^{(2)}(1) = 5$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f^{(3)}(1) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow f^{(4)}(1) = -6;$$

$$\text{ne segue } \sum_{n=1}^4 f^{(n)}(1) = 7 + 5 + 2 - 6 = \underline{\underline{8}}.$$

□

iii) a) $F(x)$ è derivabile (essendo somma, composizione e prodotto di funzioni derivabili); inoltre

$$F'(x) = (2x - 2)e^{x+2} + (x^2 - 2x + 2)e^{x+2} = x^2 e^{x+2} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$b) \int_{-2}^0 f(x) dx = F(0) - F(-2) = (2e^2 + 7) - ((4 + 4 + 2) + 7) = \underline{\underline{2e^2 - 10}}.$$

□

■

$$3) i) \underline{\underline{x=0}} \text{ pt. di discontinuità } \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq f(0) = 0 \right).$$

$$\underline{\underline{x = \frac{3}{2}}} \text{ pt. di discontinuità } \left(\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = -1 = f\left(\frac{3}{2}\right) \neq \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = -\frac{3}{2} \right).$$

□

ii) $\underline{\underline{x=-2}}$, $\underline{\underline{x=2}}$ (pt. in cui f è derivabile e ha derivata nulla; la retta tg al grafico in tali punti è orizzontale!!).

$$iii) \int_{-2}^1 f(x) dx > 0 \text{ poiché } f(x) > 0 \text{ su } [-2, 1[.$$

■

4) i) $f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x}}$

- $\text{dom} f =]0, +\infty[$
- $f(x) > 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

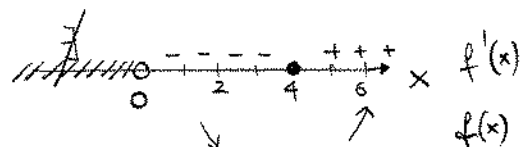
• $\text{dom} f' =]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - (x+4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x - (x+4)}{2x\sqrt{x}} = \frac{x-4}{2x\sqrt{x}}$$

$x=4$ pt. critico di f

$x=4$ pt. di min. loc. (globale) di f

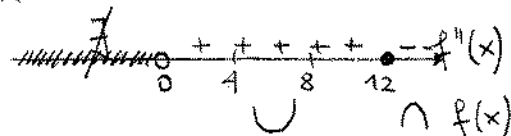
$$f(4) = \frac{8}{\sqrt{4}} = \underline{\underline{4}}$$



• $\text{dom} f'' =]0, +\infty[$

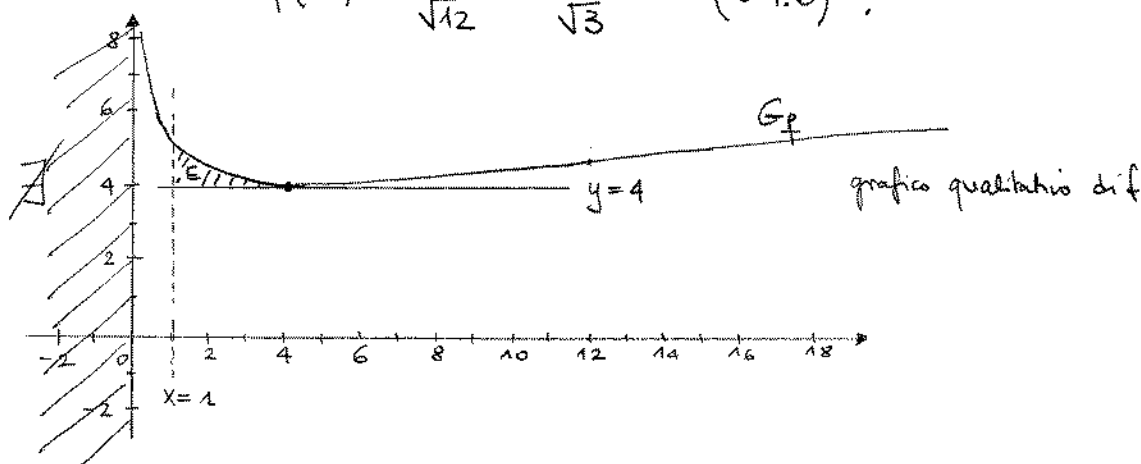
$$f''(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x\sqrt{x} - (x-4)(\sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}})}{x^3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2x^2 - (x-4)3x}{2x^3\sqrt{x}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-x^2 + 12x}{2x^3\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{4} \frac{x(-x+12)}{x^3\sqrt{x}}$$



$x=12$ pt. di flesso per f

$$f(12) = \frac{16}{\sqrt{12}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \quad (\sim 4.6)$$



ii) $y = f(4) + f'(4)(x-4) \Leftrightarrow y = 4$

iii) $\text{area } E = \int_1^4 \left(\frac{x+4}{\sqrt{x}} - 4 \right) dx = \int_1^4 \left(\sqrt{x} + 4x^{-\frac{3}{2}} - 4 \right) dx =$

$$= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4 \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - 4x \right]_1^4 = \left(\frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} + 8 \cdot 4^{-\frac{1}{2}} - 16 \right) - \left(\frac{2}{3} + 8 - 4 \right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

5) i) (V) : da $f(5)=0$ e f crescente su $[2,5]$ segue che $f(x) < 0$
 $\forall x \in [2,5[$. Dalla definizione di F segue che
 F è decrescente su $[2,5]$.

ii) (F) : Se f è costante positiva, risulta F crescente su $[2,5]$
 Se f è costante negativa, risulta F decrescente su $[2,5]$.

iii) (V) : Poiché f continua su $[2,5]$ e cambia segno su $[2,5]$,
 esiste $c \in]2,5[$ t.c. $f(c)=0$.
 Da $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [2,5]$ (teorema fondamentale
 del calcolo integrale) segue allora $F'(c) = f(c) = 0$;
 quindi F ha almeno un punto critico nell'intervallo $]2,5[$.

$$6) D_{15,5} \cdot D_{20,5} = \frac{15!}{(15-5)!} \cdot \frac{20!}{(20-5)!} = \frac{15!}{10!} \cdot \frac{20!}{15!} = \frac{20!}{10!}$$

FILA (B)

$$1) i) \left| \frac{x}{x^2+1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{x^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow -(x^2+1) \leq x \leq x^2+1$$

(nota: possiamo moltiplicare
la diseq. per x^2+1 essendo $x^2+1 > 0$!)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1 \geq 0 \\ x^2-x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{S = \mathbb{R}} \quad \square$$

$$\log \left(\frac{x^2-2}{x^2+1} \right) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-2}{x^2+1} > 0 \\ \frac{x^2-2}{x^2+1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2 > 0 \\ x^2-2 < x^2+1 \end{cases}$$

(nota: $x^2+1 > 0$!)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 2 \\ -2 < 1 \end{cases} \text{ (sempre vero)} \Rightarrow \underline{S =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[}.$$

$$ii) -e^{-\frac{1}{|x|}} > 0 \quad \underline{S = \emptyset} \quad (\text{essendo } e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}). \quad \square$$

$$e^{|2x+2|} e^{-x^2} \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{|2x+2| - x^2} \leq e^{-1} \Leftrightarrow |2x+2| - x^2 \leq -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2 \geq 0 \\ 2x+2 - x^2 \leq -1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} 2x+2 < 0 \\ -(2x+2) - x^2 \leq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < -1 \\ x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -1 \end{cases} \quad \circ \quad x \geq 3 \quad \circ \quad \begin{cases} x < -1 \\ \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[.}}$$

□

$$\text{iii) } \log\left(x^2 - \frac{2|x|}{3}\right) + \log(3x) \leq \log(5|x|)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{2|x|}{3} > 0 \\ x > 0 \\ \log\left(x^2 - \frac{2|x|}{3}\right)(3x) \leq \log(5|x|) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - \frac{2x}{3} > 0 \\ \left(x^2 - \frac{2x}{3}\right) 3x \leq 5x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x(x - \frac{2}{3}) > 0 \\ 3x^3 - 2x^2 - 5x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ 3x^2 - 2x - 5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ -1 \leq x \leq \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S = \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right].}}$$

□

$$\frac{3^{2x} 9^{-x}}{3^{x^2}} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^{2x} 3^{-2x} 3^{-x^2} = 3^{-4} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{S = \{-2, 2\}.}}$$

■

$$2) \text{ i) } \underline{x=1} \quad \text{pt. di discontinuità} \quad \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 = f(1) \right).$$

$$\underline{x=2} \quad \text{pt. di discontinuità} \quad \left(f(2) = 1 = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1 \right).$$

$$\text{ii) } \underline{x=0} \quad (\text{per cui } f \text{ è derivabile e ha derivata nulla; la retta } y \text{ al grafico in tale punto è orizzontale!}).$$

□

□

$$\text{iii) } \int_2^3 f(x) dx < 0.$$

■

$$3) \text{ i) } \underline{\sum_{n=2}^{16} \frac{a^n}{n+1} (-1)^n} = \underline{\sum_{n=2}^{16} \frac{(-a)^n}{n+1}}. \quad \square$$

$$ii) f^{(1)}(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow f^{(1)}(1) = 2$$

$$f^{(2)}(x) = 6x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f^{(2)}(1) = 7$$

$$f^{(3)}(x) = 6 - \frac{2}{x^3} \Rightarrow f^{(3)}(1) = 4$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{6}{x^4} \Rightarrow f^{(4)}(1) = 6 ;$$

ne segue $\sum_{n=1}^4 f^{(n)}(1) = 2 + 7 + 4 + 6 = \underline{19}$. □

iii) a) $F(x)$ è derivabile (essendo somma, composizione e prodotto di funzioni derivabili); inoltre

$$F'(x) = (3x^2 - 6x + 6)e^{x+1} + (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^{x+1} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$b) \int_{-1}^0 f(x) dx = F(0) - F(-1) = \left[(-6e - 3) \right] - \left[(-1 - 3 - 6 - 6) - 3 \right] \\ = \underline{-6e + 16}.$$

4) i) (F) : è vero solo se f è una funzione costante positiva.

Se f è una funzione costante negativa, allora F è decrescente.

ii) (V) : se $f(2) = 0$ e f è decrescente su $[2, 5]$, allora $f(x) < 0$ $\forall x \in [2, 5]$ e quindi $F(x)$ è decrescente su $[2, 5]$.

iii) (F) : Dal teorema fond. del calcolo integrale si ha $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [2, 5]$; se $f(x)$ è positiva su $[2, 5]$ (o negativa su $[2, 5]$), allora $F'(x) > 0$ su $[2, 5]$ (e quindi non si annulla mai!) (o $F'(x) < 0$ su $[2, 5]$). ■

$$5) i) f(x) = \frac{4x+1}{\sqrt{x}}$$

- $\text{dom} f =]0, +\infty[$

- $f(x) > 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$

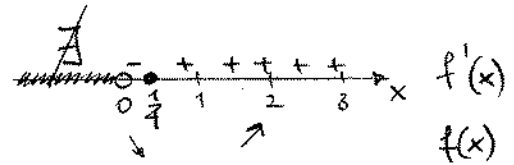
- $\text{dom} f' =]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{4\sqrt{x} - (4x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{8x - 4x - 1}{2x\sqrt{x}} = \frac{4x - 1}{2x\sqrt{x}}$$

$x = \frac{1}{4}$ pt. critico di f

$x = \frac{1}{4}$ pt. di min. loc. (globale)
di f

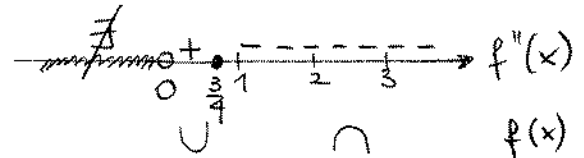
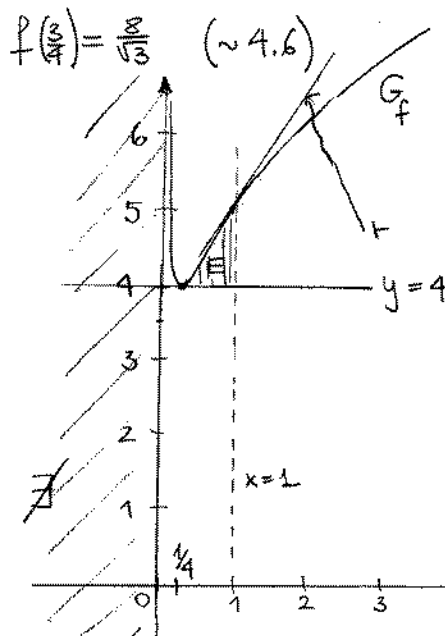
$f(\frac{1}{4}) = \underline{\underline{4}}$



• $\text{dom } f'' =]0, +\infty[$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{4x\sqrt{x} - (4x-1)(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}})}{x^3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{8x^2 - (4x-1)3x}{2x^3\sqrt{x}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{-4x^2 + 3x}{2x^3\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{(-4x+3)}{x^3\sqrt{x}}$$



ii) $y = f(1) + f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 5 + \frac{3}{2}(x-1) \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}}}$ $\square$

iii) $\int_{1/4}^1 \left(\frac{4x+1}{\sqrt{x}} - 4 \right) dx = \int_{1/4}^1 (4\sqrt{x} + x^{-1/2} - 4) dx =$

$$= \left[4 \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} - 4x \right]_{1/4}^1 = \left(\frac{8}{3} + 2 - 4 \right) - \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \right)$$

$$= \frac{7}{3} - 2 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

6) $D_{13,5} \cdot D_{18,5} = \frac{13!}{(13-5)!} \cdot \frac{18!}{(18-3)!} = \underline{\underline{\frac{13! \cdot 18!}{8! \cdot 15!}}}$