

FILA (A)

1) i) $P = (-1, -3)$, $Q = (-2, -2)$: la retta passante per P e Q ha equazione

$$\frac{y+3}{-2+3} = \frac{x+1}{-2+1}, \text{ ossia } y+3 = -(x+1), \text{ da cui } \underline{y = -x-4.}$$

□

ii) L'eq. della parabola sarà della forma $y = ax^2 + bx + c$, dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo che P, Q, ed R siano punti sulla parabola.

Allora si ha

$$\begin{cases} -3 = a - b + c \\ -2 = 4a - 2b + c \\ -2 = c. \end{cases}$$

Moltiplicando la 1^a eq. per -2 e sommandola alla 2^a eq. si ottiene $4 = 2a - c$, e quindi $2a = 4 + c$. Usando allora la 3^a eq. si ottiene $a = 1$. Infine, usando la 1^a eq. si ha $b = a + c + 3$, e quindi $b = 1 - 2 + 3 = 2$; l'eq. della parabola ricercata è dunque

$$y = x^2 + 2x - 2, \text{ ossia } \underline{y = (x+1)^2 - 3.}$$

□

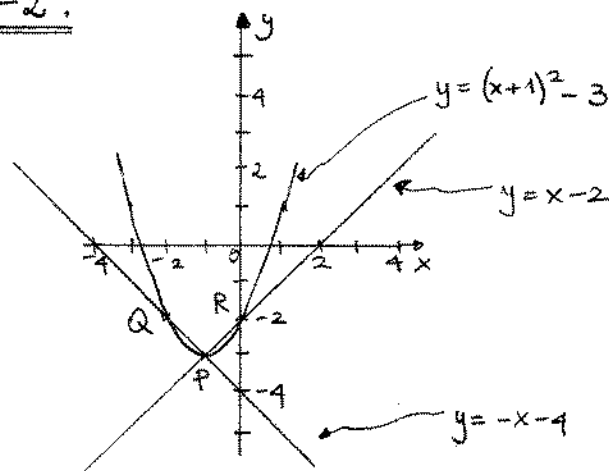
iii) Il vertice della parabola in ii) è $(-1, -3)$, ossia il punto P.

Allora, l'eq. della retta r' sarà $y = -3 + 1(x+1)$, ossia

$$\underline{y = x - 2.}$$

□

iv)



□

v) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 10.$

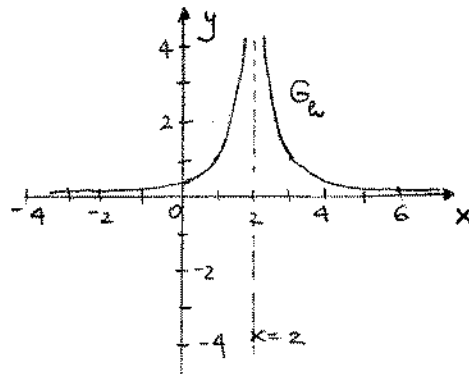
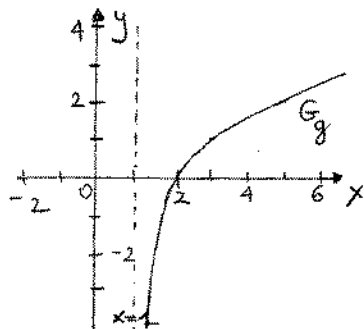
■

2) i) $g(x) = \log_2(x-1)$

$\text{dom } g =]1, +\infty[$

$h(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

$\text{dom } h = \mathbb{R} \setminus \{2\}$



ii) g è iniettiva, essendo una funzione crescente su $]1, +\infty[$.

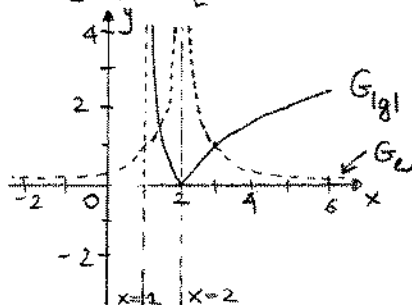
La non è iniettiva: basta prendere $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ e si ha

$x_1 \neq x_2$ mentre $h(x_1) = h(x_2) = 1$. □

iii) $g(]1, +\infty[) = \mathbb{R}$, $h(\mathbb{R} \setminus \{2\}) =]0, +\infty[$. □

iv) Ovviamente dobbiamo considerare l'equazione $|\log_2(x-1)| = \frac{1}{(x-2)^2}$

su $]1, +\infty[$.



Abbiamo visto che il numero delle soluzioni

dell'eq. $|\log_2(x-1)| = \frac{1}{(x-2)^2}$ è due. ■

3) i) $\log_3(x^2+1)^2 - \log_3(x^2-9) \geq \log_3(x^2+1) \iff \begin{cases} x^2-9 > 0 \\ \log_3(x^2+1) \geq \log_3(x^2-9) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2 > 9 \\ x^2+1 \geq x^2-9 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 > 9 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{S =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[}$. □

$|e^{x^2} - e^{-x}| = 0$

$\iff e^{x^2} = e^{-x} \iff x^2 = -x$

$\iff x(x+1) = 0 \Rightarrow \underline{S = \{-1, 0\}}$. □

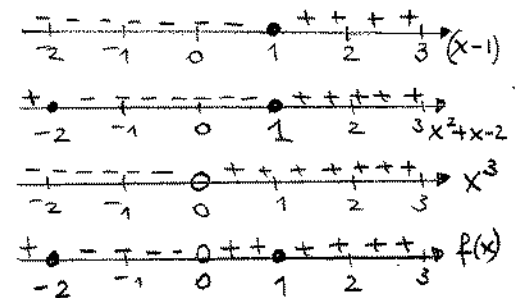
$|2x+1| + x^2 + 2x \geq 1 \iff \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 2x+1+x^2+2x \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+1 < 0 \\ -(2x+1)+x^2+2x \geq 1 \end{cases}$

Allora abbiamo che in $[0,1]$, $[2,3]$ la funzione F è crescente,
mentre F è decrescente in $[1,2]$, $[3,4]$. $\square$

ii) I punti $x=1$ e $x=3$ sono pt. di massimo di F ,
mentre $x=0$ è pt. di minimo di F . $\square$

5) i) $f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{x^3}$ • $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

• segno di f



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

$x=0$ asintota verticale per f
 $y=1$ asintota orizzontale per f
(per $x \rightarrow -\infty$, per $x \rightarrow +\infty$).

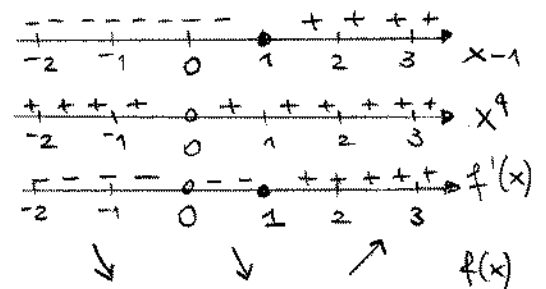
• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ • Notiamo che $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3}$

$f'(x) = \frac{(3x^2 - 3)x^3 - (x^3 - 3x + 2)3x^2}{x^6}$

$= \frac{3x^5 - 3x - 3x^5 + 9x - 6}{x^6} = \frac{6(x-1)}{x^4}$

$x=1$ pt. critico; dalla monotonia di f
si ha che $x=1$ è pt. di min. loc.
(chiaro) per f ;

$f(1) = 0$

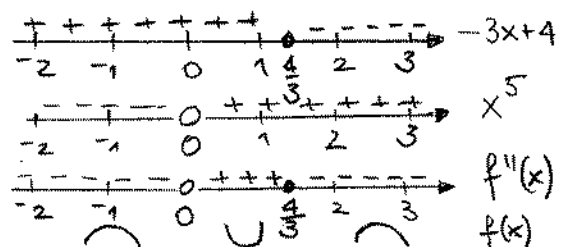


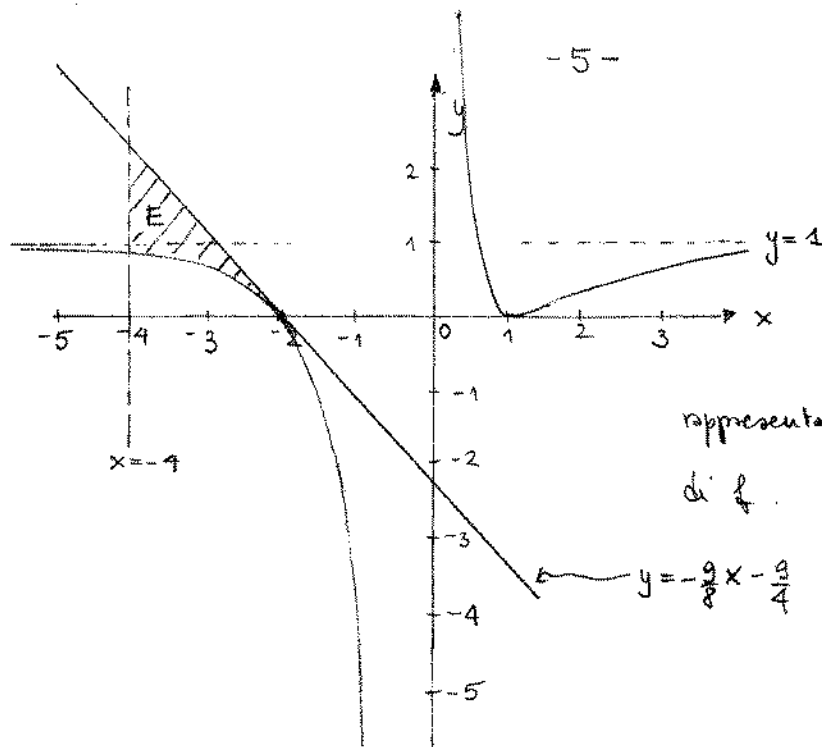
$x=1$ pt. di min. loc. chiaro

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f''(x) = 6 \left(\frac{x^4 - (x-1) \cdot 4x^3}{x^8} \right) = 6 \left(\frac{-3x + 4}{x^5} \right)$

$x = \frac{4}{3}$ pt. di flesso per f , e $f(\frac{4}{3}) = \frac{5}{32}$ (v.o.2)





$$ii) y = 0 + \frac{3(-3)}{16 \cdot 8} (x+2) \Rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{9}{8}x - \frac{9}{4}}}$$

$$iii) \text{ area } E = \int_{-4}^{-2} \left(-\frac{9}{8}x - \frac{9}{4} - f(x) \right) dx =$$

$$= \int_{-4}^{-2} \left(-\frac{9}{8}x - \frac{9}{4} - \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3} \right) dx = \int_{-4}^{-2} \left(-\frac{9}{8}x - \frac{9}{4} - 1 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{9}{8} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{13}{4}x - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right]_{-4}^{-2} = \left(-\frac{9}{16} \cdot 4 + \frac{13}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \right) -$$

$$- \left(-\frac{9}{16} \cdot 16 + 13 + \frac{3}{4} + \frac{1}{16} \right) = -\frac{9}{4} + 8 + \frac{1}{4} - 4 - \frac{13}{16} = \underline{\underline{\frac{19}{16}}}$$

$$6) A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 2x - 15 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{Z} : (x-5)(x+3) \leq 0\}$$

$$= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 5\};$$

$$\text{nr. di elementi di } (A \times A) \setminus \{(x, y) : x = y\} = 9 \cdot 9 - 9 = 72$$

$$= D_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = 9 \cdot 8 = \underline{\underline{72}}$$