

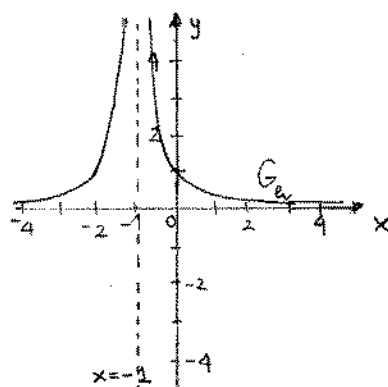
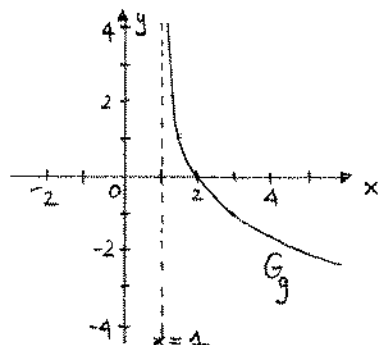
FILA (B)

1) i) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

$\text{dom } g =]1, +\infty[$

$h(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

$\text{dom } h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$



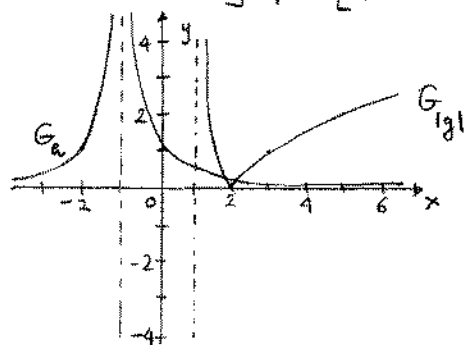
ii) g è iniettiva, essendo una funzione decrescente su $]1, +\infty[$.

h non è iniettiva: basta prendere $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ e si ha

$x_1 \neq x_2$ mentre $h(x_1) = h(x_2) = 1$.

iii) $g(]1, +\infty[) = \mathbb{R}$, $h(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) =]0, +\infty[$.

iv) Ovviamente dobbiamo considerare l'equazione $|\log_{\frac{1}{2}}(x-1)| = \frac{1}{(x+1)^2}$ nell'intervallo $]1, +\infty[$.



Abbiamo allora che il numero

delle soluzioni dell'eq. $|\log_{\frac{1}{2}}(x-1)| = \frac{1}{(x+1)^2}$

è due.

2) i) $P = (1, -3)$, $Q = (2, -2)$: la retta passante per P e Q ha

equazione $\frac{y+3}{-2+3} = \frac{x-1}{2-1}$, ossia $y = x - 4$.

ii) L'eq. della parabola sarà della forma $y = ax^2 + bx + c$, dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo che P, Q , ed R siano punti sulla parabola.

Allora si ha

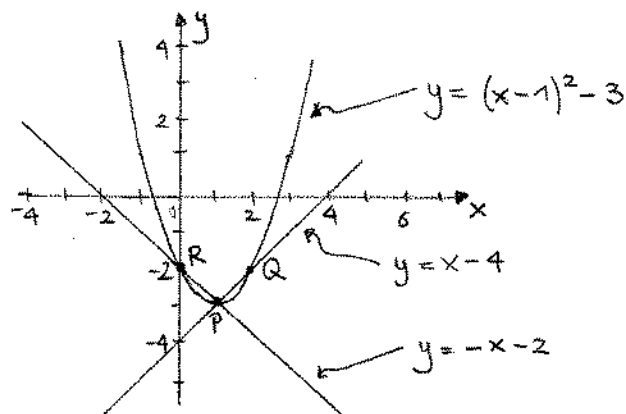
$$\begin{cases} -3 = a + b + c \\ -2 = 4a + 2b + c \\ -2 = c \end{cases} \quad R = (0, -2)$$

Moltiplicando la 1^a eq. per -2 e sommandola alla 2^a eq. si ottiene
 $4 = 2a - c$, e quindi $2a = 4 + c$. Usando allora la 3^a eq.
 si ottiene $a = 1$. Infine, usando la 1^a eq. si ha $b = -3 - a - c$,
 e quindi $b = -3 - 1 + 2 = -2$. L'eq. della parabola cercata è
 dunque $y = x^2 - 2x - 2$, ossia $y = (x-1)^2 - 3$. □

iii) Il vertice della parabola in ii) è $(1, -3)$, ossia il punto P.

Allora, l'eq. della retta r' sarà $y = -3 - (x-1)$, ossia $y = -x - 2$. □

iv)



v) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 10$. □

3) i) $\log_2(x^2+1)^2 - \log_2(x^2-4) > \log_2(x^2+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4 > 0 \\ \log_2(x^2+1) > \log_2(x^2-4) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 4 \\ x^2+1 > x^2-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 4 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{S =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[}$. □

$|e^{2x} - e^{-x^2}| = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = e^{-x^2} \Leftrightarrow 2x = -x^2$

$\Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow \underline{S = \{-2, 0\}}$. □

$|1-x| + x^2 - x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1-x+x^2-x \geq 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 1-x < 0 \\ -(1-x)+x^2-x \geq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2-2x \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x > 1 \\ x^2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq 0 \vee x \geq 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x > 1 \\ x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{S =]-\infty, 0] \cup [\sqrt{2}, +\infty[}$. □

$$\frac{1}{|x+3| - 2} < 0 \iff |x+3| - 2 < 0 \iff |x+3| < 2$$

$$\iff -2 < x+3 < 2 \Rightarrow \underline{S =]-5, -1[} \quad \blacksquare$$

$$\text{ii)} f(x) = x^n e^{-x^3} \quad f'(x) = n x^{n-1} e^{-x^3} + x^n e^{-x^3} (-3x^2) \\ = e^{-x^3} (n x^{n-1} - 3x^{n+2})$$

$$\text{Allora } f'(1) = 0 \iff n - 3 = 0; \Rightarrow \underline{n = 3.} \quad \square$$

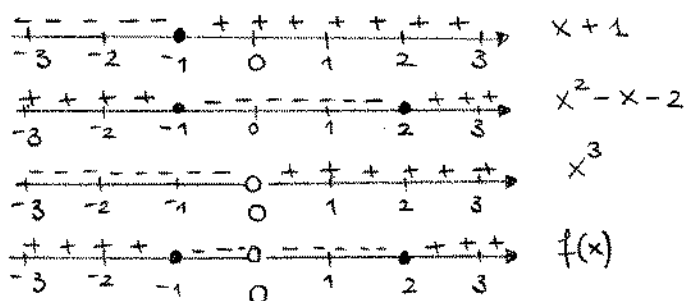
$$\text{a)} f(x) = x^3 e^{-x^3} \quad \frac{x^3}{e^{x^3}} \leq x^3 \quad \forall x \geq 0 \quad \text{poiché } e^{x^3} \geq 1 \quad \forall x \geq 0 \\ x^3 \geq 0 \quad \forall x \geq 0. \quad \square$$

$$\text{b)} \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

↑
monotonia
dell'integrale

$$\text{4)i)} f(x) = \frac{(x+1)(x^2-x-2)}{x^3} \quad \bullet \text{ dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

• segno di f



$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ asintoto verticale di f

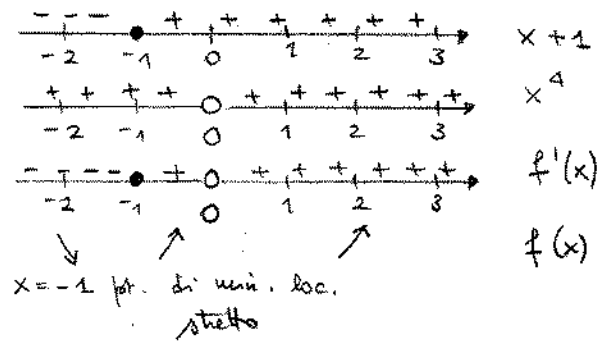
$y = 1$ asintoto orizzontale

per f (per $x \rightarrow -\infty$, per $x \rightarrow +\infty$).

$$\bullet \text{ dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad \text{Notiamo che } f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3}.$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 3)x^3 - (x^3 - 3x - 2)3x^2}{x^4} = \frac{\cancel{3x^5} - 3x - \cancel{3x^5} + 9x + 6}{x^4} \\ = \frac{6(x+1)}{x^4}.$$

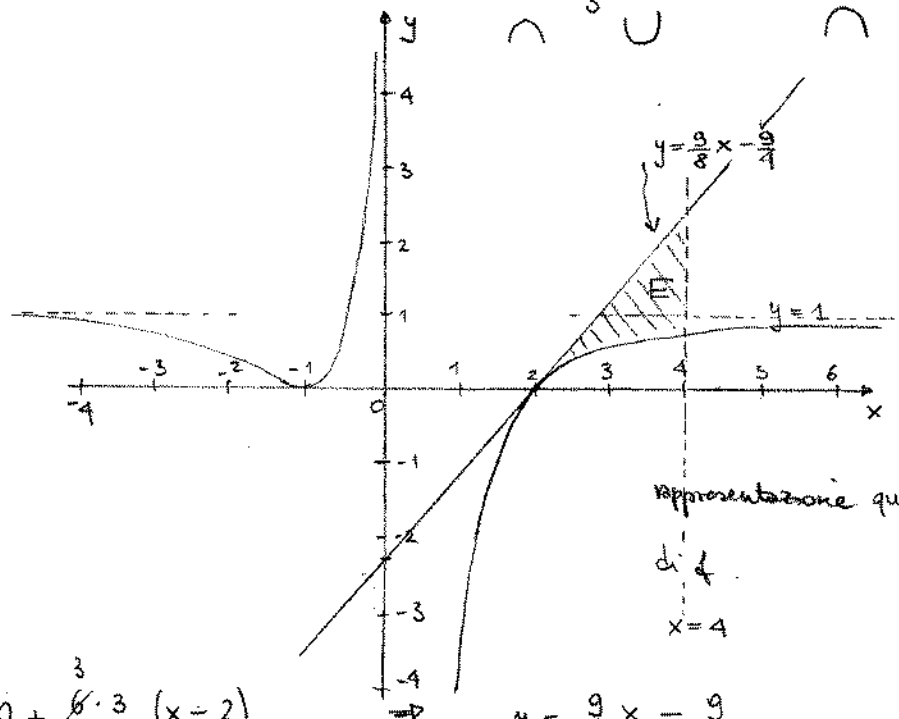
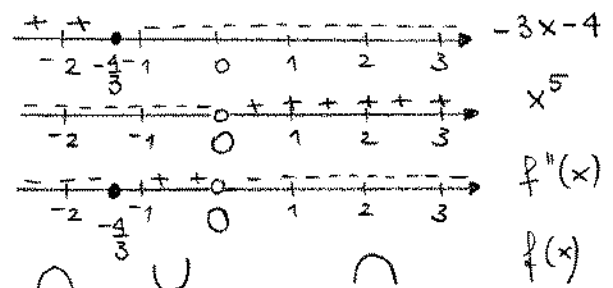
$x = -1$ pr. critico; dalla
monotonia di f' risulta che
 $x = -1$ è pr. di min. loc.
(stretto) per f ;
 $f(-1) = 0$



• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f''(x) = 6 \frac{x^4 - (x+1)4x^3}{x^5} = 6 \frac{-3x-4}{x^5}$$

$x = -\frac{4}{3}$ pr. di ferro per f
 $f(-\frac{4}{3}) = +\frac{5}{32} \quad (\approx 0.2)$



approssimazione qualitativa
di f
 $x = 4$

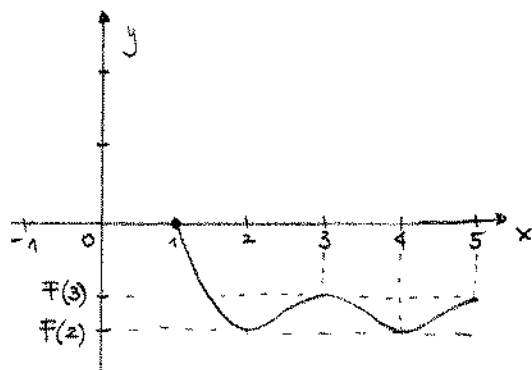
ii) $y = 0 + \frac{6 \cdot 3}{168} (x-2)$

iii) area $E = \int_2^4 \left(\frac{9}{8}x - \frac{9}{4} - f(x) \right) dx = \int_2^4 \left(\frac{9}{8}x - \frac{9}{4} - \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3} \right) dx =$
 $= \int_2^4 \left(\frac{9}{8}x - \frac{9}{4} - 1 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) dx = \left[\frac{9}{8} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{13}{4}x - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right]_2^4 =$

$$= \left(\frac{9}{16} \cdot 16 - \frac{13}{4} \cdot 4 - \frac{3}{4} - \frac{1}{16} \right) - \left(\frac{9}{8} \cdot \frac{4}{2} - \frac{13}{4} \cdot \frac{2}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= -4 - \frac{13}{16} - \frac{9}{4} + 8 + \frac{1}{4} = -4 - \frac{13}{16} + 6 = \frac{19}{16}.$$

5) i)



Una rappresentazione qualitativa di F .

Nota: dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [1, 5], \text{ e}$$

quindi $F''(x) = f'(x) \quad \forall x \in]1, 5[$ (essendo f una funzione derivabile su $]1, 5[$). Leggendo dal grafico di f il segno di f' , si ha il segno di $F''(x)$, ossia la concavità / convessità di F .

Allora abbiamo che su $[1, 2]$, $[3, 4]$ la funzione F è decrescente, mentre F è crescente su $[2, 3]$, $[4, 5]$. $\square$

ii) I punti $x=2$, $x=4$ sono pt. di minimo di F , mentre $x=1$ è pt. di massimo di F . $\blacksquare$

$$6) A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 5x - 14 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{Z} : (x-7)(x+2) \leq 0\}$$

$$= \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, 6, 7\};$$

$$\text{nr. di elementi di } (A \times A) \setminus \{(x, y) : x = y\} = 10 \cdot 10 - 10 = 90$$

$$= D_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = 10 \cdot 9 = \underline{\underline{90}}.$$